فیزیک

جلد اول

(ویراست چهارم)

رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین

ترجمهٔ

جلال‌الدین پاشایی راد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۱۰۹۲

فیزیک
۹۵

Physics
(4 th Edition)
Volume 1
Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane
John Wiley & Sons, 1992

فیزیک
(ویراست چهارم)
جلد اول
تألیف رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین
ترجمهٔ دکتر جلال‌الدین پاشایی راد، دکتر محمد خرمی، محمدرضا بهاری
نسخه‌پرداز: زهرا دلاوری
حروفچین: پروین حاج‌اسماعیل زنجانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۱
تعداد ۵۰۰۰
چاپ و صحافی: معراج

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

رسنیک، رابرت، ۱۹۲۳ - م. Resnick, Robert
فیزیک / رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنت اس. کرین؛ ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱ - .
ج.: مصور، جدول، نمودار. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۰۹۲. فیزیک؛ ۹۵)
ISBN 964-01-8176-5 (دوره)
ISBN 964-01-1092-2 (ج. ۱)

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Physics 4th ed, 1992.
در چاپهای قبلی دیوید هالیدی به‌عنوان نویسندهٔ اول ذکر شده است.
واژه‌نامه.
۱. فیزیک. الف. هالیدی، دیوید، ۱۹۱۶ - م. Halliday, David ب. کرین، کنت Krane, Kenneth S. ج. پاشایی‌راد، جلال‌الدین، ۱۳۲۴ - ، مترجم. د. خرمی، محمد، ۱۳۲۸ - ، مترجم. هـ. بهاری، محمدرضا، ۱۳۲۷ - ، مترجم. و. مرکز نشر دانشگاهی. ز. عنوان.
۵۳۰ QC۲۱/۲/م۲ف۸۷
۱۳۸۱
کتابخانهٔ ملی ایران ۳۷۸۵۹-۸۱م

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

پیشگفتار

اولین ویراست این کتاب با عنوان فیزیک برای دانشجویان علوم و مهندسی در سال ۱۹۶۰، و سومین ویراست آن با عنوان فیزیک در سال ۱۹۷۷ منتشر شد. کتابی که در دست دارید ویراست چهارم (۱۹۹۲) است که همکار جدیدی هم به مؤلفان قبلی آن اضافه شده است.

کتاب را روزآمد کرده‌ایم و ملاحظات مربوط به پیشرفتهای جدید فیزیک و آموزش فیزیک را در آن گنجانده‌ایم. برای تغییراتی که در این ویراست اعمال شده است، علاوه بر مطالعات خودمان در بارهٔ مباحث متعدد، از نظریات بسیاری از خوانندگان ویراستهای قبلی هم استفاده کرده‌ایم، و توصیه‌های داوران و مرورکنندگان متعهد کتاب را هم به کار گرفته‌ایم. تغییرات و اصلاحاتی که در این ویراست اعمال کرده‌ایم از این قرارند:

۱. ملاحظات مربوط به انرژی را، از قضیهٔ کار و انرژی گرفته تا ترمودینامیک، در تمام کتاب یکدست کرده‌ایم. مثلاً، کار را همیشه کاری گرفته‌ایم که روی سیستم انجام می‌شود، و در نتیجه، چه در مکانیک و چه در ترمودینامیک، برای کار از علامت قراردادیِ یکسانی استفاده کرده‌ایم. توجه به این قبیل جزئیات، به دانشجویان در فهم مفاهیم مشترکی که در زمینه‌های مختلف فیزیک ظاهر می‌شوند کمک می‌کند.

۲. نسبیت خاص را، که در ویراستهای قبلی به‌صورت یک مبحث تکمیلی آورده می‌شد، در خودِ متن گنجانده‌ایم. دو فصل را به نسبیت خاص اختصاص داده‌ایم: یکی را بعد از امواج مکانیکی و دیگری را بعد از امواج الکترومغناطیسی آورده‌ایم. مفاهیم مربوط به نسبیت خاص (از قبیل حرکت نسبی، چارچوب مرجع، تکانه، و انرژی) را در ضمن بسیاری از مباحث کتاب، در فصلهای سینماتیک، دینامیک، و الکترومغناطیس بررسی کرده‌ایم. چنین رهیافتی را باید جزئی از فیزیک کلاسیک تلقی کرد. اما برای همراهی با مدرسانی که مایل‌اند نسبیت خاص را به پایانِ درس موکول کنند، مطالب مربوط به آن را در بخشهای مشخصی از هر فصل آورده‌ایم تا بشود فعلاً از کنارشان گذشت.

۳. در مقایسه با ویراست سوم، فصلهای ۲ و ۳ را جابه‌جا کرده‌ایم و در نتیجه سینماتیک یک‌بعدی قبل از بردارها آمده است. تمام مطالب مربوط به تکانهٔ زاویه‌ای را به فصل ۱۳ برده‌ایم (که بعد از سینماتیک دورانی و دینامیک دورانی می‌آید، و در نتیجه ترتیب ارائهٔ مطالب حرکت دورانی شبیه به ترتیب ارائهٔ مطالب حرکت انتقالی شده است). فصلهای مربوط به ترمودینامیک را قدری جابه‌جا و بازنویسی اساسی کرده‌ایم، و ضمن تأکیدِ بیشتر بر جنبه‌های آماری، رنگ و بوی جدیدی به موضوع داده‌ایم.

۴. در پاسخ به درخواستهای خوانندگان، چندین مبحث کلاسیکی جدید، از جمله تحلیل ابعادی، نیروی مقاومت شاره‌ها، کشسانی، کشش سطحی، چسبندگی (ویسکوزیته)، و آکوستیک موسیقیایی را (به مطالب ویراست قبلی) اضافه کرده‌ایم.

۵. مفاهیم جدیدتر را هم در تمام کتاب پراکنده‌ایم: از جمله کوانتش انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای، واپاشی هسته‌ای و ذرات بنیادی، نظریهٔ آشوب، نسبیت عام، و آمار کوانتومی. منظورمان از گنجاندن این مطالب، بررسی منسجم فیزیک جدید نبوده است (که مفاهیم آن را در ۸ فصل اضافی نسخهٔ مفصلِ جلد دوم آورده‌ایم)، بلکه می‌خواسته‌ایم مرزهای فیزیک کلاسیک و ارتباط آن با فیزیک جدید را به دانشجو نشان بدهیم.

۶. مسئله‌های آخر فصل را افزایش چشمگیری داده‌ایم. در این ویراست ۱۵۱۹ مسئله آورده‌ایم که در مقایسه با ۹۵۸ مسئله در ویراست قبلی، یک افزایش ۵۹ درصدی است. تعداد پرسشهای آخر فصل را هم‌از ۶۱۴ به ۸۲۱ رسانده‌ایم، یعنی ۳۴ درصد زیاد کرده‌ایم.

۷. تعداد مثالهای داخل متن را از ۱۳۵ در ویراست قبلی، به ۱۸۳ در ویراست فعلی رسانده‌ایم (۳۶ درصد)؛ در واقع افزایش از این هم بیشتر است، چون بعضی مثالهای ویراست قبلی به بهانهٔ معرفی مبحث جدیدی بود، در حالی‌که در این ویراست همهٔ مطالب جدید را فقط در متن آورده‌ایم و غرض از مثالها فقط تمرینِ کاربرد این مطالب است.

۸. روشهای کامپیوتری را، از طریق بعضی مثالها و تعدادی پروژه در آخر فصلها، معرفی کرده‌ایم. چند برنامهٔ کامپیوتری هم به صورت پیوست در انتهای کتاب آورده‌ایم تا دانشجویان به کاربردهای دیگر این روشها هم بپردازند.

۹. تعداد مراجع متن را افزایش داده‌ایم و بسیاری از مقالات این مراجع را روزآمد کرده‌ایم. منظور از بعضی مقالات (که اغلب از مجلات عمومی مثل ساینتیفیک آمریکن انتخاب شده‌اند) فراهم کردن زمینهٔ وسیعتری برای دانشجو از طریق مطالعهٔ کاربردهای جالبِ مباحثِ

مربوط است. در موارد دیگر، که معمولاً شامل موضوعاتی است که امیدواریم هم دانشجویان و هم مدرسان به اهمیت آموزشی آنها توجه کنند، به مقالاتی ارجاع داده‌ایم که از مجلاتی مانند آمریکن جورنال آو فیزیکس یا فیزیکس تودی انتخاب شده‌اند.

۱۰. شکلهای کتاب عموماً از نو ترسیم شده‌اند و تعداد آنها در جلد اول تقریباً دو برابر شده و از ۴۶۳ به ۸۹۹ رسیده است. درمواردی یک رنگِ دیگر هم به شکلها اضافه کرده‌ایم تا واضح‌تر و برای آموزش مفیدتر باشند.

۱۱. بسیاری از استنتاجها، اثباتها، و استدلالها را محکمتر کرده‌ایم، و هر جا که فرض یا تقریبی به کار گرفته باشیم آن‌را به وضوح اظهار کرده‌ایم. بنابراین، بی‌آنکه سطحِ کتاب را بالاتر برده باشیم، دقت و استحکام آن‌را بیشتر کرده‌ایم. نگران این بوده‌ایم که دانشجو قلمرو اعتبار هر استدلالی را بشناسد و می‌خواسته‌ایم او را ترغیب کنیم که چنین سؤالاتی را در نظر بگیرد که: آیا این یا آن نتیجهٔ خاص همیشه صدق می‌کند یا فقط گاهی صادق است؟ چه اتفاق می‌افتد وقتی به حد کوانتومی یا نسبیتی نزدیک می‌شویم؟

اگرچه سعی کرده‌ایم مطالبی را هم از ویراست قبلی حذف کنیم، اما اضافات ویراست جدید آنقدر زیاد بوده که در مجموع حجم کتاب را بیشتر کرده است. باید تأکید کنیم که کمتر مدرسی خواهد خواست یا خواهد توانست که به همهٔ مطالب کتاب، از اول تا آخر، بپردازد. ما تلاش کرده‌ایم کتابِ کامل و دقیقی از کلیات فیزیک تدوین کنیم، اما مدرس می‌تواند برای هر چه پربار کردنِ زحماتش، به‌راههای متعددی عمل کند. مدرسی که می‌خواهد مباحث محدودتری را در نظر بگیرد اما عمیق‌تر به آنها بپردازد (این روشی است که اخیراً به آن "کمتری که بیشتر است" می‌گویند)، می‌تواند راهِ مناسبی از میان این راهها انتخاب کند. بعضی بخشها را صریحاً "اختیاری" اعلام کرده‌ایم (که با حروف کوچکتر چاپ شده‌اند)؛ منظورمان این بوده است که می‌شود این بخشها را کنار گذاشت بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب به‌هم بخورد. بسته به طرحِ درس و مدت کلاسها، می‌شود بخشهای دیگری را هم حذف کرد یا حتی کل بعضی فصلها را به اختصار برگزار کرد. [در "راهنمایِ مدرس"، که جزء ضمائم متن اصلی این کتاب است، پیشنهادهایی برای انتخاب مباحث مناسبتر برای دوره‌های کوتاهتر آمده است.] در چنین مواردی البته باید دانشجویانِ کنجکاو و علاقه‌مند را ترغیب کرد که خودشان مستقلاً بخشها و فصلهای حذف شده را مطالعه کنند و معلوماتشان را گسترش بدهند. برای مدرسانی که می‌خواهند مطالب را به‌طور کامل ــ مثلاً به دانشجویانِ رشتهٔ فیزیک و دانشجویانِ ممتازِ رشته‌های دیگرِ علوم و مهندسی، یا به هر حال در دوره‌های سه ترمی ــ تدریس کنند، این کتاب به قدر کافی جامع و مفصل هست که تجربهٔ خوبی برای دانشجویان باشد. امیدواریم که این کتاب "نقشهٔ راههای" فیزیک باشد؛ می‌شود راههای مختلفی، مستقیم و غیر مستقیم، انتخاب کرد، و ضرورتی ندارد که در اولین سفر همهٔ راهها را طی کنیم. مسافرِ مشتاق را می‌شود دوباره به نقشه احاله کرد تا در آن بگردد و راههایی را که در سفرِ قبلی‌اش طی نکرده است امتحان کند.

از همهٔ همکاران و کسانی که در تهیهٔ این کتاب به ما کمک کرده‌اند صمیمانه سپاسگزاریم.

سپتامبر ۱۹۹۱

دیوید هالیدی
سیاتِل، واشنگتن

رابرت رزنیک
انستیتو پلی‌تکنیک رنسلر

کنت کرین
دانشگاه ایالتی اوهایو

۱

اندازه‌گیری

فیزیک، با آن همه زیبایی ریاضیاتی بعضی از پیچیده‌ترین و مجردترین نظریه‌هایش، نهایتاً یک علم تجربی است. بنابراین، کسانی که اندازه‌گیریهای دقیق انجام می‌دهند باید استانداردهای مشترکی را بپذیرند تا بتوانند نتایج اندازه‌گیریهایشان را برحسب آنها بیان کنند. به‌این‌ترتیب، نتایج هر آزمایشگاه را می‌توان به آزمایشگاههای دیگر ارائه داد، و امکان تأیید این نتایج را فراهم کرد.

در این فصل به‌معرفی بعضی از یکاهای اصلی کمیتهای فیزیکی و استانداردهای پذیرفته شده برای سنجش آنها می‌پردازیم. روش درست بیان نتایج محاسبات و اندازه‌گیریها را از لحاظ مناسب بودن تعداد ارقام با معنی بررسی می‌کنیم و اهمیت توجه به‌ابعاد کمیتهای موجود در معادلات را نشان می‌دهیم. در فصلهای بعدی، هرجا لازم باشد، یکاهای اصلی دیگر و یکاهای مشتق از آنها را هم تعریف خواهیم کرد.

۱ـ۱ کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاها

واحدهای ساختاری فیزیک، همین کمیتهایی هستند که برای بیان قوانین این علم به‌کار می‌روند: طول، جرم، زمان، نیرو، سرعت، چگالی، مقاومت ویژه، دما، شدت روشنایی، شدت میدان مغناطیسی، و بسیاری کمیتهای دیگر. خیلی از این واژه‌ها، مثل طول و نیرو، در شمار واژه‌های روزمره‌اند. مثلاً ممکن است گفته شود: "او در طول زندگی‌اش فشار زیادی را تحمل کرده است." اما، در فیزیک نباید گولِ معنی روزمرهٔ این واژه‌ها را خورد. تعریف علمیِ دقیق طول و فشار، هیچ ربطی به معنی این دو واژه در جملهٔ بالا ندارد.

می‌توانیم، مثلاً، طول چیزی را با یک کمیت جبری دلبخواه مثل L مشخص کنیم، و فرض کنیم که این کمیت دقیقاً معین است. اما اگر بخواهیم یکایی به‌مقدار خاصی از این کمیت نسبت بدهیم، ناچاریم یک استاندارد تعیین کنیم. به‌این‌ترتیب، کسانی که بخواهند طولهای مختلف را با هم مقایسه کنند، یکای یکسانی در اختیار خواهند داشت که طول را با آن می‌سنجند. زمانی یکای طول یارد بود، که از اندازهٔ دورِ کمرِ فرمانروا به‌دست می‌آمد. تصور مشکلات ناشی از چنین استانداردی بسیار آسان است: این استاندارد برای همه کسانی که بخواهند استانداردهای ثانویهٔ خودشان را با آن میزان کنند، به‌راحتی قابل وصول نیست، و دیگر اینکه با گذشتِ زمان، تغییرناپذیر هم نیست.

خوشبختانه لزومی به‌تعریف استاندارد برای همهٔ کمیتهای فیزیکی نیست. تعیین استاندارد برای بعضی از کمیتهای پایه ساده‌تر است. خیلی از کمیتهای پیچیده‌تر را می‌توان برحسب این کمیتهای پایه بیان کرد. مثلاً، تا مدتها دقت اندازه‌گیری طول و زمان از خیلی از کمیتهای فیزیکی دیگر بیشتر بود و این دو کمیت را عموماً برای تعیین استاندارد به‌کار می‌بردند. دقت اندازه‌گیری سرعت کمتر بود، و بنابراین به‌عنوان کمیتی مشتق (زمان/طول = سرعت) در نظرگرفته می‌شد. اما امروزه دقت سنجش سرعت نور، بیش از دقت استاندارد پیشین طول است؛ البته هنوز هم طول را کمیتی بنیادی می‌دانیم، اما استاندارد آن‌را از استاندارد سرعت و زمان به‌دست می‌آوریم.

به‌این ترتیب، مسئلهٔ اساسی آن است که کمترین تعداد ممکن کمیتهای فیزیکی را به‌عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کنیم و استانداردهایی برای سنجش آنها تعریف کنیم. این استانداردها باید دست‌یافتنی و تغییرناپذیر باشند، که البته ممکن است تأمین هر دوی این ویژگیها با هم کارساده‌ای نباشد. مثلاً اگر قرار است استانداردِ کیلوگرم، یک جسمِ تغییرناپذیر باشد، باید این جسم دور از دسترس باشد، یعنی در چنان انزوایی نگهداری شود که از دستکاری، یا مثلاً خوردگی، مصون بماند.

توافقهای مربوط به استانداردها، حاصل یک رشته مذاکراتِ بین‌المللی در "کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها" بوده است. این مجمع جهانی درسال ۱۸۸۹ (۱۲۶۸ شمسی) تأسیس شد و نوزدهمین دور مذاکرات آن در سال ۱۹۹۱ صورت گرفت. وقتی استانداردی پذیرفته شد، می‌توانیم آن‌را برای اندازه‌گیری درگسترهٔ

وسیعی به‌کار ببریم؛ مثلاً از ثانیه، یکای زمان، برای اندازه‌گیری زمانهایی از طول عمر پروتون (بیش از 10^{40} ثانیه) گرفته تا طول عمر ناپایدارترین ذرهٔ آزمایشگاهی (حدود 10^{-23} ثانیه) استفاده می‌کنیم. وقتی می‌گوییم عمر پروتون، برحسب یکای ثانیه، 10^{40} است، منظورمان این است که نسبت این کمیت به بازهٔ زمانی‌ای که به‌عنوان ثانیهٔ استاندارد اختیار شده است، 10^{40} است. برای انجام چنین سنجشی، باید به‌نحوی بتوان سنجه‌های آزمایشگاهی را با استاندارد مقایسه کرد. خیلی از این مقایسه‌ها غیرمستقیم است: هیچ سنجه‌ای نمی‌تواند در گسترهٔ ۴۰ مرتبهٔ بزرگی دقیق باشد. با وجود این، برای پیشرفت علم ضروری است که اگر پژوهشگری یک بازهٔ زمانی را با سنجه‌اش ثبت می‌کند، بتواند این مقدار را به‌نحوی به‌ثانیهٔ استاندارد مربوط کند.

جستجو برای استانداردهای دقیقتر یا دست‌یافتنی‌تر، به‌خودی‌خود یک مسئلهٔ مهم علمی است که فیزیکدانان و پژوهشگران دیگری در آزمایشگاههای سراسر جهان به‌آن می‌پردازند. در ایالات متحد امریکا، آزمایشگاههای "مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی" (که قبلاً دفتر ملی استانداردها نامیده می‌شد) وظیفهٔ نگهداری، تولید، و آزمودن استانداردهایی را‌که پژوهشگران علوم پایه و همچنین مهندسان و علم‌پیشگان در صنعت به‌کار می‌برند، به‌عهده دارد. بهبود استانداردها در سالهای اخیر، بسیارچشمگیر بوده است: دقت ثانیهٔ استاندارد، از زمان ویراست اول این کتاب (۱۹۶۰) تاکنون، بیش از ۱۰۰۰ برابر شده است.

۲ـ۱ سیستم بین‌المللی یکاها[1]

کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، در طیِ مذاکرات سالهای ۱۹۵۴ تا ۱۹۷۱ هفت کمیت را به‌عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کرده است. سیستم بین‌المللی یکاها، SI[2]، مبتنی بر همین کمیتهاست، که فهرستی از آنها هم درجدول ۱ آمده است.

در این کتاب با بسیاری از یکاهای فرعی SI ـــ مثل یکای سرعت، نیرو، و مقاومت الکتریکی ـــ سروکار خواهیم داشت. این یکاها از یکاهای جدول ۱ مشتق می‌شوند. مثلاً یکای نیرو نیوتون (N) است. این یکا، برحسب یکاهای اصلی SI، به‌صورت

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

تعریف می‌شود. (در فصل ۵ خواهیم دید که چرا.)

اگر بخواهیم کمیتهایی مثل توان یک نیروگاه، یا زمان بین دو رویداد هسته‌ای را برحسب یکاهای SI بیان کنیم، با اعدادی بسیار بزرگ، یا بسیارکوچک، مواجه می‌شویم. برای ساده شدن بیان چنین کمیتهایی، کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها طی مذاکرات سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ خود توصیه کرد که از پیشوندهایی که در جدول ۲ آمده است استفاده شود. به‌این‌ترتیب، می‌توانیم توانِ خروجی یک نیروگاه معمولی برق، $1{,}3 \times 10^{9}$ وات، را به‌صورت ۱٫۳ گیگاوات یا ۱٫۳GW بیان کنیم. همچنین، یک بازهٔ زمانی معمول در فیزیک هسته‌ای، مثل $2{,}35 \times 10^{-9}$ ثانیه، را می‌شود به‌صورت ۲٫۳۵ نانوثانیه یا ۲٫۳۵ns

جدول ۱. یکاهای اصلی SI

کمیت	یکای SI: نام	یکای SI: نماد
زمان	ثانیه	s
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
مقدار ماده	مول	mol
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K
جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت نور	کاندلا	cd

جدول ۲. پیشوندهای SI*

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
10^{18}	اگزا	E	10^{-1}	دسی	d
10^{15}	پتا	P	10^{-2}	**سانتی**	c
10^{12}	ترا	T	10^{-3}	**میلی**	m
10^{9}	**گیگا**	G	10^{-6}	**میکرو**	μ
10^{6}	**مگا**	M	10^{-9}	**نانو**	n
10^{3}	**کیلو**	k	10^{-12}	**پیکو**	p
10^{2}	هکتو	h	10^{-15}	فمتو	f
10^{1}	دکا	da	10^{-18}	آتو	a

* پیشوندهایی را که در این کتاب زیاد به‌کار می‌روند با حروف‌سیاه مشخص کرده‌ایم.

نوشت. پیشوندهای مربوط به ضریبهای بزرگتر از یک، ریشهٔ یونانی دارند و پیشوندهای مربوط به ضریبهای کوچکتر از یک، ریشهٔ لاتین (جز فمتو و آتو، که ریشهٔ دانمارکی دارند).[1,2]

در تکمیل جدول ۱، باید هفت مجموعه دستورالعمل داشته باشیم تا بتوانیم یکاهای‌اصلی SI را در آزمایشگاه تولیدکنیم. دستورالعملهای مربوط به زمان، طول، و جرم را در سه بخشِ بعدی شرح می‌دهیم.

درکنار SI، دو سیستمِ مهم دیگر هم برای یکاها داریم. یکی‌سیستم گاؤسی است که درخیلیِ از منابع فیزیک مورد استفاده است. این سیستم را در این کتاب به‌کار نخواهیم برد. ضرایب تبدیل یکاهای این سیستم به سیستم SI، در پیوستِ ز آمده است.

سیستمِ دیگر، سیستم بریتانیایی است، که هنوز هم در بعضی کشورها واز جمله درایالات متحدِ امریکا کاربردهای روزمره دارد. کمیتها

۱. نگاه کنید به
Robert A. Nelson, "SI: The International System of Units", (American Association of Physics Teachers, 1981).

2. Le Système International d'Unités.

و یکاهای اصلی مکانیک در این سیستم، طول (فوت)، نیرو (پاوند)، و زمان (ثانیه)‌اند. ضریب تبدیل این یکاها به یکاهای SI هم در پیوست ز آمده است. ما در این کتاب عموماً یکاهای SI را به‌کار برده‌ایم (و در بعضی موارد به معادلهای بریتانیایی آنها هم اشاره کرده‌ایم). تنها در سه کشور (میانمار، لیبریا، و ایالات متحد امریکا) است که استانداردهای ملی اندازه‌گیری مبتنی بر سیستمی جز SI اند.

مثال ۱. هرکمیت فیزیکی را می‌شود در ۱ ضرب کرد (چون مقدارش را تغییر نمی‌دهد). مثلاً $1\,\text{min} = 60\,\text{s}$ است، پس $1 = 60\,\text{s}/1\,\text{min}$؛ به‌همین ترتیب، $1\,\text{ft} = 12\,\text{in}$، پس $1 = 1\,\text{ft}/12\,\text{in}$ است. با استفاده از ضرایب تبدیل مناسب، (الف) سرعت ۵۵ مایل بر ساعت را برحسب متر بر ثانیه، و (ب) حجم مخزنی را که ۱۶ گالن بنزین می‌گیرد برحسب سانتی‌متر مکعب به‌دست بیاورید.

حل: (الف) برای ضرایب تبدیل، به روابط $1\,\text{mi} = 1609\,\text{m}$ $(1 = 1609\,\text{m}/1\,\text{mi})$ و $1\,\text{h} = 3600\,\text{s}$ $(1 = 1\,\text{h}/3600\,\text{s})$ نیاز داریم (نگاه کنید به پیوست ز). به‌این‌ترتیب

$$\text{سرعت} = 55\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}$$

(ب) یک گالن مایع ۲۳۱ اینچ مکعب، و $1\,\text{in} = 2{,}54\,\text{cm}$ است.

پس

$$\text{حجم} = 16\,\cancel{\text{gal}} \times \frac{231\ \text{in}^3}{1\ \cancel{\text{gal}}} \times \left(\frac{2{,}54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{in}}}\right)^3 = 6{,}1 \times 10^4\,\text{cm}^3$$

توجه کنید که در این دو محاسبه، ضرایب تبدیل را چنان به‌کار برده‌ایم که یکاهای ناخواسته در صورت یک کسر و مخرج کسر دیگر ظاهر شوند، و یکدیگر را حذف کنند.

۱ـ۳ استاندارد زمان[1]

سنجش زمان دو جنبه دارد. برای امور روزمره، و برای بعضی از مقاصد علمی، لازم است بدانیم چه وقت از روز است تا بتوانیم ترتیب وقایع را تعیین کنیم. در بسیاری از کارهای علمی، می‌خواهیم بدانیم که فلان رویداد چقدر طول می‌کشد (بازهٔ زمانی چقدر است). پس هر استاندارد زمانی باید بتواند به‌این دو پرسش پاسخ بدهد. "فلان رویداد در چه زمانی وقوع یافته؟" و "چقدر طول کشیده است؟" جدول ۳ گسترهٔ بازه‌های زمانی سنجش‌پذیر را نشان می‌دهد. نسبت حدود بالا و پایین این گستره از مرتبهٔ 10^{63} است.

هر پدیدهٔ تکرارشونده‌ای را می‌شود به‌عنوان مقیاس زمان به‌کار برد. برای سنجش زمان با چنین پدیده‌ای، عدهٔ تکرارهای پدیده را (به‌اضافهٔ کسری از یک‌دور در صورت لزوم) می‌شماریم. به‌این منظور می‌توانیم مثلاً از آونگ، سیستم جرم‌ـفنر، یا بلور کوارتز استفاده کنیم.

جدول ۳. مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ چند بازهٔ زمانی.*

بازهٔ زمانی	ثانیه
طول عمر پروتون	$> 10^{40}$
نیمه عمر واپاشی بتایی مضاعف ^{82}Se	3×10^{27}
سنّ جهان	5×10^{17}
سن هرم خئوپس	1×10^{11}
میانگین عمر انسان (در ایالات متحد امریکا)	2×10^{9}
دورهٔ تناوب گردش زمین به‌دور خورشید (۱ سال)	3×10^{7}
دورهٔ تناوب چرخش زمین حول محور خودش (۱ روز)	9×10^{4}
دورهٔ تناوب گردش ماهوارهٔ کم ارتفاع نوعی به‌دور زمین	5×10^{3}
فاصلهٔ زمانی بین ضربانهای عادی قلب	8×10^{-1}
دورهٔ تناوب دیاپازون تولیدکنندهٔ نت لا(ی وسط)	2×10^{-3}
دورهٔ تناوب نوسانهای میکروموج ۳cm	1×10^{-10}
دورهٔ تناوب نوعی چرخشهای مولکولی	1×10^{-12}
کوتاهترین تپ نوری تولیدشده (تا سال ۱۹۹۰)	6×10^{-15}
طول عمر ناپایدارترین ذرات	$< 10^{-23}$

* مقادیر تقریبی‌اند.

قرنهای متمادی پدیدهٔ تکرارشوندهٔ چرخش زمین حول محور خودش، که مدت روز را تعیین می‌کند، به‌عنوان مقیاس زمان به‌کار می‌رفت. بعدها یک ثانیه (میانگین خورشیدی) برابر با ۱/۸۶۴۰۰ روز (میانگین خورشیدی) تعریف شد.

ساعتهای بلورکوارتز، که براساس ابقای الکتریکی ارتعاشات دوره‌ای بلور کوارتز کار می‌کنند، به‌عنوان استاندارد ثانویهٔ زمان به‌کار می‌روند. ساعت کوارتز را می‌شود با استفاده از رصدهای نجومی، برحسب چرخش زمین مدرج کرد و برای سنجش زمان در آزمایشگاه به‌کار برد. خطای انباشتهٔ بهترین این ساعتها، در طول سال، حداکثر $5\,\mu\text{s}$ بوده است. اما حتی این دقت هم برای علوم و تکنولوژی جدید کافی نیست.

برای دستیابی به‌استاندارد زمانی بهتر، ساعتهای اتمی در چندین کشور ساخته شده است. شکل ۱ چنین ساعتی را نشان می‌دهد. کار این ساعت، براساس بسامد مشخصهٔ تابش میکروموجی است که از اتمهای عنصر سزیم گسیل می‌شود. این ساعت، که در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی در ایالات متحد امریکا نگهداری می‌شود، مبنای تعیین زمان جهانیِ هماهنگ (UTC) در این کشور است.

شکل ۲ تغییرات دورهٔ تناوب چرخشی زمین را، نسبت به ساعت

---

۱. برای مطالعهٔ تاریخچهٔ زمان‌سنجی، نگاه کنید به

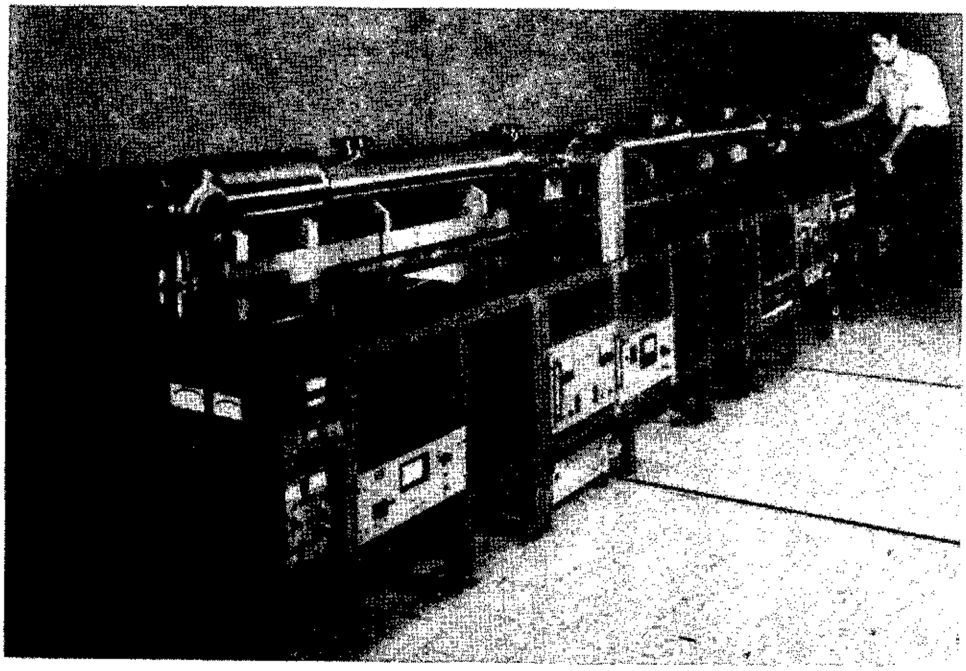
Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World, David S. Landes (Harvard University Press, 1983).

برای پیشرفتهای اخیر در سنجش دقیق زمان به

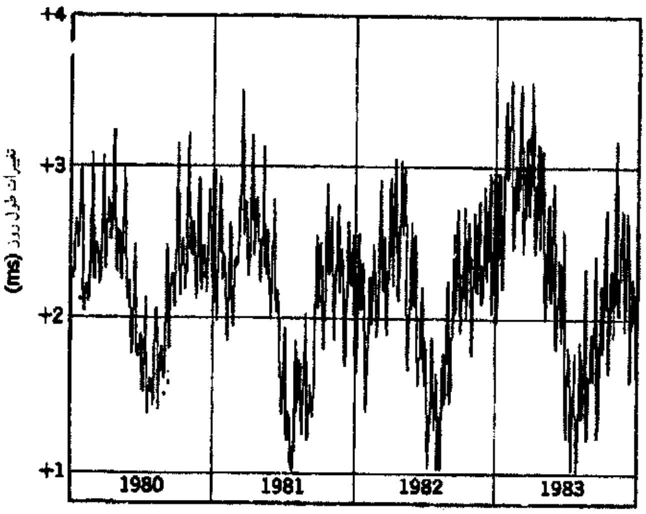
"Precise Measurement of Time," Norman F. Ramsey, *American Scientist*, January-February 1988, p. 42.

برای توضیح سیستمهای مختلف ثبت زمان به

"Time and the Amateur Astronomer," Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, April 1989, p. 378.



شکل۱. استاندارد بسامد اتمی (سزیم) شمارهٔ NBS-۶ در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی در بولدر کلرادو. این استاندارد اصلی یکای زمان در ایالات متحد امریکاست.



شکل۲. تغییرات طول روز در یک دورهٔ ۴ ساله. دقت کنید که مقیاس عمودی تنها ۰٫۰۰۳s = ۳ms است.[1]

سزیم، در یک دورهٔ ۴ سالهٔ نشان می‌دهد. پس ببینید که دورهٔ تناوب چرخش زمین، برای کار دقیق، چه استاندارد ضعیفی برای زمان است. تغییراتی را که در شکل ۲ می‌بینیم می‌شود به اثرهای کشندی [جزر و مدی] ماه، و تغییرات فصلی بادهای جو زمین نسبت داد.

در سیزدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۷، ثانیهٔ ساعت سزیم به‌عنوان استاندارد جهانی زمان پذیرفته شد. تعریف ثانیه این است:

یک ثانیه برابر است با مدت ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ ارتعاش تابشی (با طول‌موج خاص) که از اتم سزیم گسیل می‌شود.

دو تا ساعت جدید سزیم، طی ۳۰۰۰۰۰ سال حداکثر ممکن است 1s با هم اختلاف پیدا کنند. ساعتهای میزر هیدروژن به‌دقت باورنکردنی 1s در ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال رسیده‌اند. ساعتهایی که مبتنی بر یک تک اتم محبوس باشند شاید بتوانند این دقت را به‌اندازهٔ ۳ مرتبهٔ بزرگی زیاد کنند. شکل ۳ پیشرفت چشمگیر زمان‌سنجی را طی حدود ۳۰۰ سال نشان می‌دهد. این تاریخچه، با ساعت آونگی آغاز می‌شود، که کریستین هویگنس آن‌را در سال ۱۶۵۶ اختراع کرد، و با ساعتهای میزر هیدروژن امروزی به‌پایان می‌رسد.

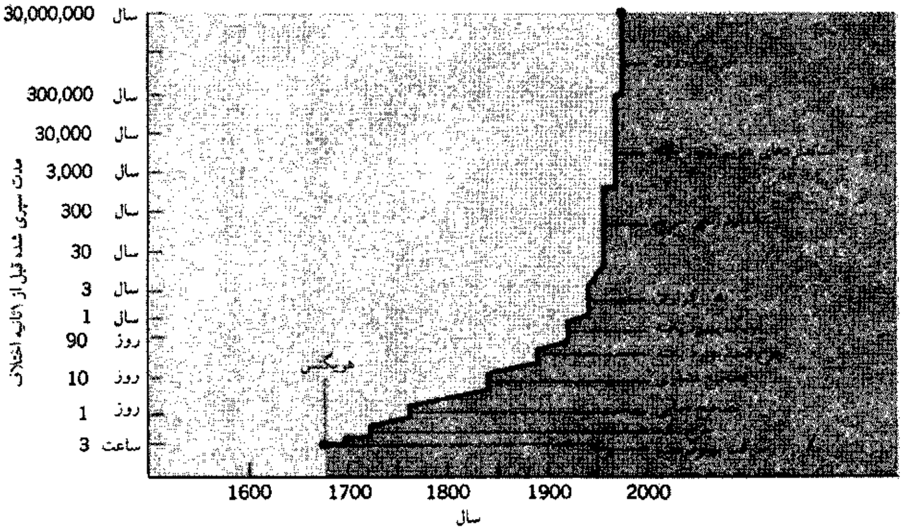
۱-۴ استاندارد طول[2]

اولین استاندارد بین‌المللی طول، میله‌ای از جنس آلیاژ پلاتین-ایریدیم، به‌نام متر استاندارد، بود که در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسها، در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شد. یک متر، طبق تعریف، برابر بود با فاصلهٔ بین دو شیار باریک که نزدیک دو انتهای میله حک شده بود؛ در شرایطی که میله در دمای صفر درجهٔ کلاسیوس (سانتی‌گراد)، و در وضعیت مکانیکی معینی قرار داشت. به‌ملاحظات تاریخی، قرار بود این متر برابر با یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ قطب شمال تا استوا، روی نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، باشد. اما اندازه‌گیری دقیق‌نشان داد که طول میلهٔ مترِ استاندارد، کمی (در حدود ۰٫۰۲۳ درصد) با این مقدار تفاوت دارد.

از آنجا که مترِ استاندارد، چندان در دسترس نیست، بَدَلهای

۱. نگاه کنید به
"The Earth's Rotation Rate", John Wahr, *American Scientist* January-February 1985, p. 41.

۲. نگاه کنید به
"The New Definition of the Meter," P. Giacomo, *American Journal of Physics*, July 1984. p. 607.



شکل۳. پیشرفت زمان‌سنجی در طی قرون. ساعتهای آونگی اولیه، در هر چند ساعت یک ثانیه جلو یا عقب می‌افتادند؛ ساعتهای امروزی میزر هیدروژن، هر ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال یک ثانیه اختلاف پیدا می‌کنند.

دقیقی از روی آن ساخته شد و به‌عنوان نمونه‌های اصلی در اختیار مؤسسات و آزمایشگاههای استانداردها در سراسر دنیا قرار گرفت. از این استانداردهای ثانویه، برای مدرج کردن میله‌های سنجش، که از استانداردهای ثانویه هم قابل وصولتر بودند، استفاده می‌شد. بنابراین، تا همین اواخر، مأخذ همهٔ وسایل و میله‌های سنجش طول ـــ که طی مقایسه‌های پیچیده‌ای به‌کمک میکروسکوپ و ابزارهای تقسیم‌کننده تولید می‌شدند ـــ متر استاندارد بود.

دقت فرایندهای مقایسهٔ خراشهای روی میله به‌وسیلهٔ میکروسکوپ، دیگر برای تکنولوژی و علوم جدید کافی نیست. در سال ۱۸۹۳، آلبرت مایکلسون، فیزیکدان امریکایی، متر استاندارد را با طول‌موج نور سرخی که از اتم کادمیم گسیل می‌شود مقایسه کرد و به‌این وسیله استانداردی دقیقتر و قابل وصولتر به‌دست آورد. مایکلسون طول میلهٔ متر را به‌دقت اندازه گرفت و دریافت که مترِ استاندارد، ۱۵۵۳۱۶۳٫۵ برابر این طول‌موج است. در هر آزمایشگاهی، به‌راحتی می‌شد لامپ کادمیم مشابهی تهیه کرد. به‌این‌ترتیب، مایکلسون روشی یافت که دانشمندان سراسر جهان می‌توانستند با آن استاندارد دقیقی از طول داشته باشند، بی‌آنکه به‌میلهٔ متر استاندارد رجوع کنند.

با وجود این پیشرفت تکنولوژیکی، میلهٔ فلزی تا سال ۱۹۶۰ همچنان استاندارد رسمی طول بود، تا آنکه در این سال، در یازدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، یک استاندارد اتمی برای متر پذیرفته شد. این استاندارد، عبارت است از طول‌موج (در خلأ) نور سرخ‌ـ‌نارنجی معینی که از یک ایزوتوپ خاص کریپتون[1]، ۱ در ^{86}Kr، در شرایط تخلیهٔ الکتریکی گسیل می‌شود (شکل ۴). به‌طور مشخص، یک متر برابر با ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ طول‌موج این نور تعریف شد. با فراهم شدن امکان اندازه‌گیری طولهایی به‌اندازهٔ کسری از طول‌موج، دانشمندان با این استاندارد جدید می‌توانستند طولها را با خطایی کمتر از ۱ در ۱۰^{۹} با هم مقایسه کنند.

انتخاب استاندارد اتمی، علاوه بر افزایش دقت سنجش طول، مزایای دیگری هم دارد. اتمهای ^{86}Kr همه‌جا پیدا می‌شوند، همسان‌اند، و نوری با طول‌موج یکسان گسیل می‌کنند، طول‌موج خاصی که انتخاب شده است، مشخصهٔ انحصاری ^{86}Kr، و بسیار تیز و مشخص است. این ایزوتوپ را می‌شود به‌آسانی در شکل خالص‌اش فراهم کرد.

تا سال ۱۹۸۳، دقتهای مورد نیاز به‌حدی رسید که دیگر استاندارد ^{86}Kr هم نمی‌توانست پاسخگوی آن باشد. در این سال، گام متهورانه‌ای برداشته شد. تعریف متر عوض شد؛ طبق تعریف جدید، متر فاصله‌ای است که نور در بازهٔ زمانی مشخصی می‌پیماید. به‌بیانِ هفدهمین کنفرانس عمومی اوزان مقیاسها:

> متر طول راهی است که نور در خلأ در بازهٔ زمانی ۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه می‌پیماید.

این، معادل آن است که بگوییم سرعت نور، c، اکنون طبق تعریف برابر است با

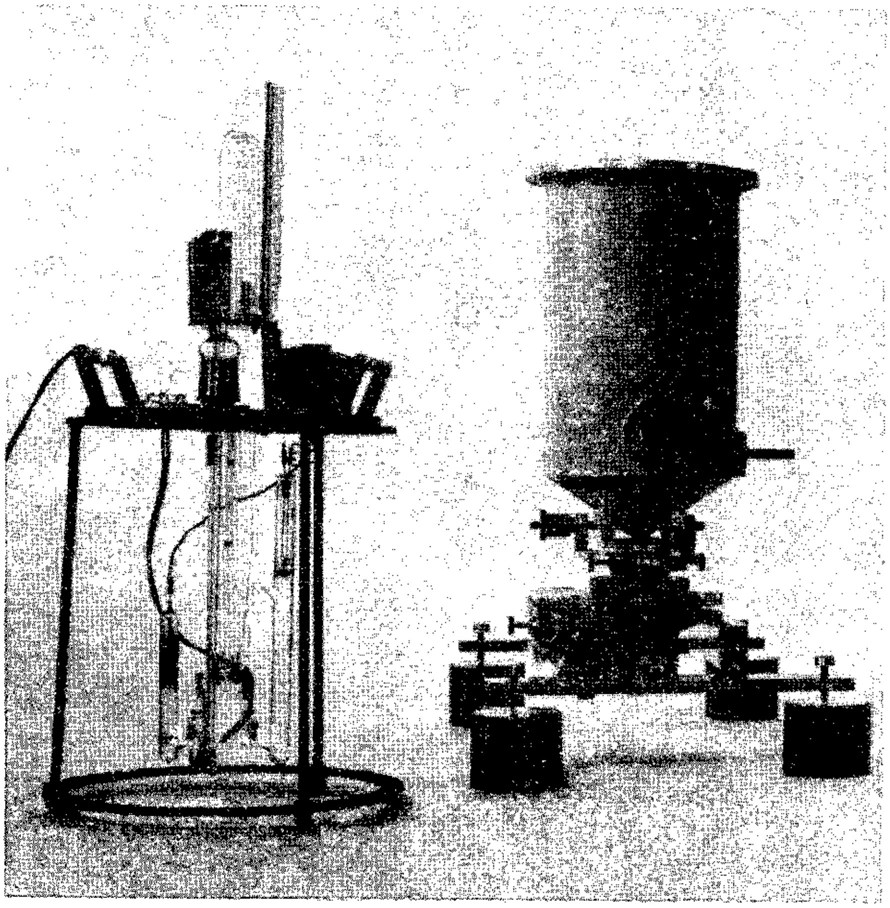
$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \text{ m/s} \quad \text{(دقیقاً)}$$

این تعریفِ جدید لازم بود، زیرا سنجش سرعت نور چنان دقیق شده بود که صِرف تکرارپذیری تولید مترِ ^{86}Kr، عاملی محدودکننده به‌حساب می‌آمد. بنابراین، معقول می‌نمود که سرعت نور را به‌عنوان کمیتی تعریف شده بپذیریم و آن‌را، همراه با استاندارد دقیقاً تعریف‌شدهٔ زمان (ثانیه)، برای تعریف جدید متر به‌کار ببریم.

جدول ۴، گسترهٔ طولهای مختلف را، برحسب استاندارد متر، نشان می‌دهد.

---

۱. شاخص ۸۶ در ^{86}Kr، عدد جرمی (عدهٔ پروتونها به‌اضافهٔ عدهٔ نوترونهای هستهٔ) این ایزوتوپ کریپتون است. گاز کریپتون طبیعی، شامل ایزوتوپهای ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۳، ۸۴ و ۸۶ است. طول‌موج تابش انتخاب شده در هر یک از این ایزوتوپها، در حدود ۱ در ۱۰^{۵} با ایزوتوپهای دیگر متفاوت است. این اختلاف از دقت استاندارد، در حدود ۱ در ۱۰^{۹}، خیلی بیشتر است. در مورد ساعت سزیم، این عنصر تنها یک ایزوتوپ طبیعی دارد، که عدد جرمی آن ۱۳۳ است.



شکل ۴. یک لامپ کریپتون در آزمایشگاههای ملی فیزیک، تدینگتون، انگلستان. لولهٔ شیشه‌ای در سیستم طرف چپ، حاوی گاز ^{86}Kr است. این گاز، در اثر تحریک با جریان الکتریکی، نورگسیل می‌کند. لامپ را در زمزای طرف راست می‌گذارند تا آن‌را در دمای نیتروژن مایع ($-۲۱۰°C$) نگه دارد. نور از سوراخ کوچک زمزا مشاهده می‌شود.

جدول ۴. مقادیر اندازه‌گیری‌شدهٔ بعضی طولها*

طول	متر
فاصلهٔ دورترین اختروش رصد شده	۲×۱۰^{۲۶}
فاصلهٔ کهکشان امرأةالمسلسله از ما	۲×۱۰^{۲۲}
شعاع کهکشان ما	۶×۱۰^{۱۹}
فاصلهٔ نزدیکترین ستاره از ما (پروکسیماقنطورس)	۴×۱۰^{۱۶}
شعاع میانگین مدار دورترین سیاره (پلوتون)	۶×۱۰^{۱۲}
شعاع خورشید	۷×۱۰^{۸}
شعاع زمین	۶×۱۰^{۶}
ارتفاع قلهٔ اورست	۹×۱۰^{۳}
قد یک آدم معمولی	۲×۱۰^{۰}
ضخامت هر صفحه این کتاب	۱×۱۰^{-۴}
اندازهٔ یک ویروس معمولی	۱×۱۰^{-۶}
شعاع اتم هیدروژن	۵×۱۰^{-۱۱}
شعاع مؤثر پروتون	۱×۱۰^{-۱۵}

* مقادیر تقریبی‌اند.

مثال ۲. سال نوری که یک مقیاس طول است (نه مقیاس زمان) برابر با مسافتی است که نور در یک سال می‌پیماید. ضریب تبدیل سال نوری به‌متر را حساب کنید، و تعیین کنید که فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیماقنطورس از ما ($۴٫۰ \times ۱۰^{۱۶}m$) چند سال نوری است.

حل: ضریب تبدیل سال به ثانیه عبارت است از

$$۱\ y = ۱\ y \times \frac{۳۶۵٫۲۵\ d}{۱\ y} \times \frac{۲۴\ h}{۱\ d} \times \frac{۶۰\ min}{۱\ h} \times \frac{۶۰\ s}{۱\ min}$$

$$= ۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷}s$$

سرعت نور، تا سه رقم با معنی $۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸}m/s$ است. بنابراین، نور در یک سال، مسافت

$$(۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸}m/s)(۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷}s) = ۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵}m$$

را می‌پیماید. پس

$$۱\ \text{سال نوری} = ۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵}m$$

فاصلهٔ پروکسیماقنطورس از ما برابر است با

$$(۴٫۰ \times ۱۰^{۱۶}m) \times \frac{۱\ \text{سال نوری}}{۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵}m} = ۴٫۲\ \text{سال نوری}$$

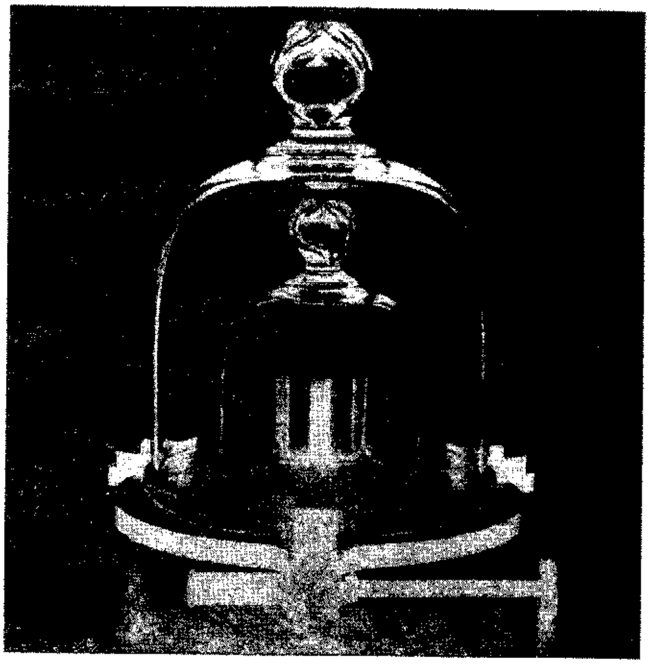
نزدیکترین ستاره از زمین در فاصلهٔ ۴٫۲ سال نوری قرار دارد.

۱ـ۵ استاندارد جرم

استاندارد SI جرم، استوانه‌ای از جنس پلاتین‌ـ‌ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها نگهداری می‌شود، و بنابر توافق بین‌المللی، جرم آن ۱ کیلوگرم تعیین شده است. استانداردهای ثانوی برای مؤسسات استاندارد به‌همهٔ کشورهای جهان فرستاده می‌شوند. جرم اجسام دیگر را می‌توان، با استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای یکسان، با دقت ۱ در $۱۰^{۸}$ تعیین کرد.

نسخهٔ بدلی از استاندارد بین‌المللی جرم، به نام کیلوگرم سرنمونهٔ شمارهٔ ۲۰، در ایالات متحد امریکا در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی، زیر یک سرپوش، نگهداری می‌شود (شکل ۵). این استاندارد را، حداکثر سالی یک‌بار، برای کنترل مقادیر استانداردهای سوم از زیر سرپوشها بیرون می‌آورند. سرنمونهٔ شمارهٔ ۲۰ را از سال ۱۸۸۹ تاکنون دوبار به‌فرانسه برده‌اند و با کیلوگرم اصلی مجدداً مقایسه کرده‌اند. هنگامی‌که این جسم را از زیر سرپوش خارج می‌کنند، همیشه دو نفر حضور دارند: یکی کیلوگرم را با پنس نگه می‌دارد، و دومی مراقب است که اگر کیلوگرم از دست اولی افتاد آن‌را بگیرد.

جدول ۵ اندازه‌های چند جرم را نشان می‌دهد. توجه کنید که حدود گسترهٔ این جرمها تا $۱۰^{۸۳}$ مرتبهٔ بزرگی با هم اختلاف دارند. بیشتر این جرمها را به‌طور غیرمستقیم با کیلوگرم استاندارد مقایسه کرده‌اند. مثلاً، برای تعیین جرم زمین می‌توان نیروی جاذبهٔ گرانشی بین دو کرهٔ سربی را در آزمایشگاه، سنجید و آن‌را با جاذبهٔ زمین بر یک جرم معین مقایسه کرد (بخش ۱۶ـ۳). جرم کره‌ها را باید با مقایسهٔ مستقیم با استاندارد کیلوگرم به‌دست آورد.



شکل۵. استاندارد ملی سرنمونهٔ کیلوگرم شمارهٔ ۲۰، زیر سرپوش دوگانه‌اش در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی ایالات متحد امریکا.

جدول ۵. مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ بعضی از جرمها*.

جسم	کیلوگرم
عالم شناخته‌شده (تخمین)	$۱۰^{۵۳}$
کهکشان ما	۲×۱۰^{۴۲}
خورشید	۲×۱۰^{۳۰}
زمین	۶×۱۰^{۲۴}
ماه	۷×۱۰^{۲۲}
کشتی اقیانوس‌پیما	۷×۱۰^{۷}
فیل	۴×۱۰^{۳}
انسان	۶×۱۰^{۱}
دانهٔ انگور	۳×۱۰^{-۳}
ذرهٔ غبار	۷×۱۰^{-۱۰}
ویروس	۱×۱۰^{-۱۵}
مولکول پنی‌سیلین	۵×۱۰^{-۱۷}
اتم اورانیم	۴×۱۰^{-۲۶}
پروتون	۲×۱۰^{-۲۷}
الکترون	۹×۱۰^{-۳۱}

* مقادیر تقریبی‌اند.

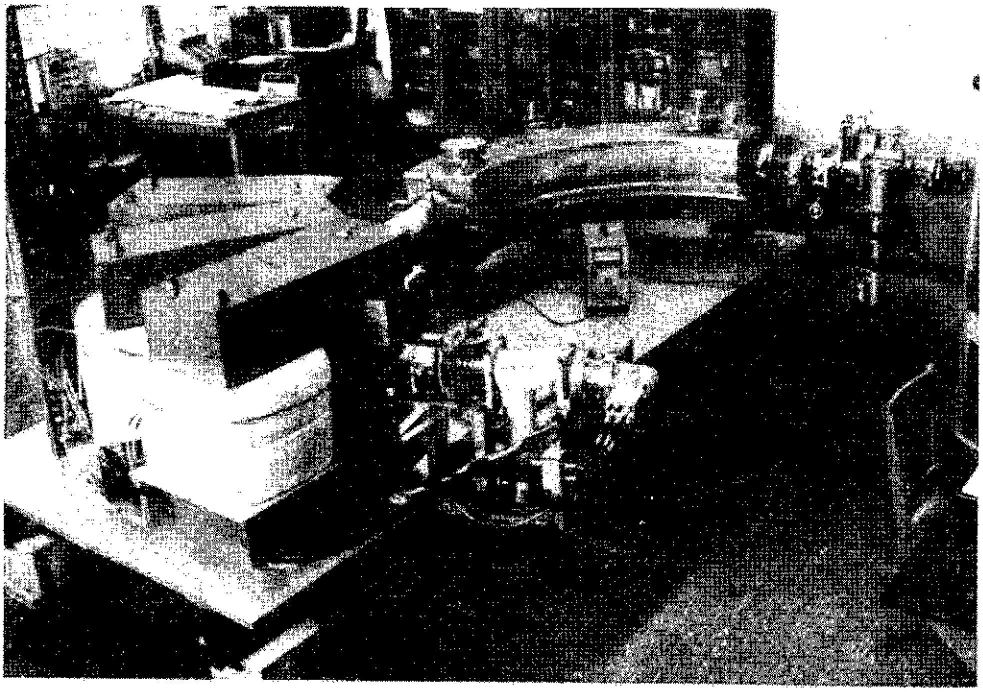
جدول ۶. نتایج اندازه‌گیری جرم چند اتم.

ایزوتوپ	جرم (u)	خطا (u)
^{1}H	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۱
^{12}C	۱۲٫۰۰۰۰۰۰۰۰	(دقیق)
^{64}Cu	۶۳٫۹۲۹۷۶۵۶	۰٫۰۰۰۰۰۱۷
^{102}Ag	۱۰۱٫۹۱۱۹۵	۰٫۰۰۰۱۲
^{137}Cs	۱۳۶٫۹۰۷۰۷۳	۰٫۰۰۰۰۰۶
^{190}Pt	۱۸۹٫۹۵۹۹۱۷	۰٫۰۰۰۰۰۷
^{238}Pu	۲۳۸٫۰۴۹۵۵۴۶	۰٫۰۰۰۰۰۲۴

در مقیاس اتمی، استاندارد دیگری برای جرم وجود دارد که جزو یکاهای SI نیست. این استاندارد، جرم اتم ^{12}C است که، طبق توافق بین‌المللی، دقیقاً برابر با ۱۲ یکای جرم اتمی (u) تعریف می‌شود. جرم اتمهای دیگر را می‌توان، به‌کمک طیف‌سنج جرمی، با دقت خوبی تعیین کرد (شکل ۶؛ و بخش ۳۴ـ۲). جدول ۶ جرم چند اتم را، همراه با براورد خطاهای سنجش آنها، نشان می‌دهد. علت نیاز به‌چنین استانداردی برای جرم آن است که، به‌لطف روشهای آزمایشگاهی امروزی، دقت مقایسهٔ جرم اتمهای مختلف می‌تواند بیش از آنی باشد که با کیلوگرم استاندارد امکان دارد. به‌هرحال در جانشین کردن یک استاندارد اتمی جرم به‌جای استاندارد کیلوگرم پیشرفتهایی حاصل شده است. رابطهٔ تقریبی استاندارد اتمی فعلی و استاندارد اصلی چنین است

$$۱\ u = ۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷} kg$$

یکای دیگری در SI که به یکای بالا مربوط می‌شود مول است،



شکل۶. یک طیف‌سنج جرم با قدرت تفکیک زیاد در دانشگاه مانیتوبا درکانادا. از چنین ابزارهایی برای تعیین دقیق جرم اتمها، مانند آنهایی که در جدول ۶ آمده است، استفاده می‌شود.

که برای سنجش مقدار ماده به‌کار می‌رود. یک مول اتم ^{۱۲}C، مقدار ماده‌ای است که دقیقاً ۱۲ گرم جرم دارد و تعداد اتمهای آن برابر با ثابت آووگادرو، N_A، است

$$N_A = ۶٫۰۲۲۱۳۶۷ \times ۱۰^{۲۳} \quad \text{ذره بر مول}$$

این عدد با آزمایش به‌دست می‌آید و خطای آن در حدود یک در میلیون است. یک مول از هر ماده‌ای شامل همین تعداد جزء بنیادی (اتم، مولکول، یا هر چیز دیگر) از آن ماده است. پس ۱ مول گاز هلیم N_A اتم He دارد، ۱ مول اکسیژن شامل N_A مولکول O_2 است، و ۱ مول آب N_A مولکول H_2O دارد.

برای ارتباط دادن یکاهای اتمی جرم به‌یکاهای بزرگ، باید از ثابت آووگادرو استفاده کرد. جانشین کردن استاندارد کیلوگرم با استانداردهای اتمی مستلزم آن خواهد بود که دقت سنجش مقدار N_A، حداقل دو مرتبهٔ بزرگی بیشتر شود تا بتوان جرم اجسام را با دقت ۱ در $۱۰^۸$ تعیین کرد.

۱ـ۶ دقت و رقمهای بامعنی

با بهتر شدن کیفیت سنجه‌ها و پیچیده‌تر شدن روشهای سنجش، می‌توان دقت آزمایشها را مدام بالا برد؛ یعنی می‌توان نتایجی با رقمهای بامعنی بیشتر به‌دست آورد و خطای اندازه‌گیری را کم کرد. هم تعداد رقمهای بامعنی، و هم خطا، نشانه‌هایی حاکی از براورد ما از دقتِ نتیجه‌اند. یعنی مثلاً $x = ۳m$ اطلاعات کمتری از $x = ۳٫۱۴۱۵۹m$ دربردارد. وقتی اظهار می‌کنیم $x = ۳m$ است، منظورمان این است که تا حدمعقولی مطمئنیم که x بین $۲m$ و $۴m$ است. اما زمانی که می‌گوییم $x = ۳٫۱۴۱۵۹m$، منظوراین است که x احتمالاً بین $۳٫۱۴۱۵۸m$ و $۳٫۱۴۱۶۰m$ است. اگر واقعاً مطمئن باشیم که x، $۳٫۱۴۱۵۹m$ است و بگوییم $x = ۳m$، اطلاعاتی را حذف کرده‌ایم که می‌تواند مهم باشد. اگر بیش از $x = ۳m$ چیزی ندانیم و بگوییم $x = ۳٫۱۴۱۵۹m$، اطلاعات اضافی داده‌ایم، اطلاعاتی که نمی‌دانیم درست است یا نه. دقت در تعداد رقمهای بامعنی، در بیان نتایج آزمایش و محاسبه، اهمیت دارد، و ارائهٔ رقمهای بامعنی به‌تعداد بیشتر یا کمتر از آنچه باید، هر دو به‌یک میزان نادرست است.

برای تعیین تعداد رقمهای بامعنی چند قاعدهٔ ساده وجود دارد.

قاعدهٔ ۱. از چپ شروع کنید و بدون در نظر گرفتن صفرهای سمت چپ عدد، تعداد رقمها را تا نخستین رقم مشکوک بشمارید. به‌این‌ترتیب $x = ۳m$ تنها یک رقم بامعنی دارد و نوشتن آن به‌شکل $x = ۰٫۰۰۳km$ نیز تعداد رقمهای بامعنی را تغییر نمی‌دهد. اما اگر بنویسیم $x = ۳٫۰m$ (یا $x = ۰٫۰۰۳۰km$، که هم‌ارز همان است)، معنی‌اش این است که مقدار x را تا دو رقم بامعنی می‌دانیم. به‌ویژه به‌یاد داشته باشید که، اگر دقت داده‌های اولیه به‌شما اجازه نمی‌دهد، نباید همهٔ ۹ یا ۱۰ رقمی را که روی صفحهٔ ماشین حسابتان ظاهر می‌شود در نتیجه بنویسید! بیشتر محاسباتی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم تا دو یا سه رقم بامعنی است.

مراقب نمادگذاریهای مبهم باشید: معلوم نیست که $x = ۳۰۰m$ یک رقم بامعنی، دو رقم بامعنی، یا سه رقم بامعنی دارد؛ نمی‌توان گفت که صفرهای این عبارت، اطلاعاتی در بر دارند یا صرفاً برای مشخص کردن مرتبهٔ رقم ۳ اند. دراین مورد برای روشنترکردن وضعیت رقمهای بامعنی، باید بنویسیم $x = ۳\times۱۰^۲$ یا $x = ۳٫۰\times۱۰^۲$ یا $x = ۳٫۰۰\times۱۰^۲$.

قاعدهٔ ۲. هنگام ضرب و تقسیم، تعداد رقمهایی که در نتیجه نگه

می‌دارید نباید بیشتر از تعداد رقمهای بامعنی عددی باشد که کمترین دقت را دارد. پس

$$۲٫۳ \times ۳٫۱۴۱۵۹ = ۷٫۲$$

گاهی لازم است که این قاعده را با دقت بیشتری به‌کار ببریم. مثلاً

$$۹٫۸ \times ۱٫۰۳ = ۱۰٫۱$$

زیرا اگرچه ۹٫۸ به‌لحاظ فنی تنها دو رقم بامعنی دارد، اما خیلی نزدیک به‌عددی با سه رقم بامعنی است. بنابراین، حاصلضرب را باید با سه رقم بامعنی بیان کرد.

قاعدهٔ ۳. هنگام جمع و تفریق، کم‌معنی‌ترین رقمهای حاصل در همان جای (نسبی)ای ظاهر می‌شوند که در اعداد اولیه بوده‌اند. در این موارد آنچه اهمیت دارد تعداد رقمهای بامعنی نیست، بلکه جای قرارگرفتن آنهاست. مثلاً

۱۰۳٫۹	kg
۲٫۱۰	kg
۰٫۳۱۹	kg
۱۰۶٫۳۱۹	یا ۱۰۶٫۳ kg

کم‌اهمیت‌ترین رقم، یا نخستین رقم مشکوک، را با حرف سیاه نشان داده‌ایم. طبق قاعدهٔ ۱، باید فقط یک رقم مشکوک داشته باشیم. پس نتیجه را باید به‌صورت ۱۰۶٫۳kg بیان کنیم، زیرا اگر "۳" مشکوک باشد، "۱۹"ای که بعد از آن آمده است اطلاعاتی دربرندارد و بی‌فایده است.

مثال ۳. شخصی می‌خواهد یک گربهٔ خانگی را وزن کند. تنها وسیله‌ای که در اختیار دارد یک ترازوی معمولی خانگی است. این ترازو رقمی است ونتیجه را به‌شکل عددی صحیح، برحسب پاوند، بیان می‌کند. بنابراین، شخص ابتدا خودش را وزن می‌کند: ۱۱۹ پاوند. سپس گربه را بغل می‌گیرد و وزن مجموع خودش و گربه را تعیین می‌کند: ۱۲۸ پاوند. خطای نسبی یا درصد خطای اندازه‌گیری وزن شخص و وزن گربه چقدر است؟

حل: کم‌معنی‌ترین رقم، رقم یکان است. بنابراین، خطای سنجش وزن شخص، در حدود یک پاوند است؛ یعنی ترازو همهٔ مقادیر بین ۱۱۸٫۵ lb و ۱۱۹٫۵ lb را ۱۱۹ lb نشان می‌دهد. بنابراین، خطای نسبی برابر است با

$$\frac{۱\ \mathrm{lb}}{۱۱۹\ \mathrm{lb}} = ۰٫۰۰۸ \quad \text{یا} \quad ۰٫۸\%$$

وزن گربه ۹ lb = ۱۱۹ lb − ۱۲۸ lb است. اما خطای سنجش وزن گربه هم حدود 1lb است. پس خطای نسبی در این مورد برابر است با

$$\frac{۱\ \mathrm{lb}}{۹\ \mathrm{lb}} = ۰٫۱۱ \quad \text{یا} \quad ۱۱\%$$

خطای مطلق سنجش وزن شخص و گربه یکسان است (1lb)، اما خطای نسبی سنجش وزن شخص، یک مرتبهٔ بزرگی از خطای نسبی سنجش وزن گربه کمتر است. اگر با این روش بخواهید یک بچه گربهٔ یک پاوندی را وزن کنید، خطای نسبی سنجش ۱۰۰٪ می‌شود. این نشان می‌دهد که تفریق دو عدد نزدیک به‌هم چه خطری دارد: خطای نسبی حاصل تفریق می‌تواند بسیار بزرگ باشد.

۱ـ۷ تحلیل ابعادی

به هرکمیتی که می‌سنجیم یا محاسبه می‌کنیم، معمولاً بُعدی وابسته است، مثلاً، مقدار جذب صوت در یک محیط بسته و احتمال وقوع واکنشهای هسته‌ای، هر دو بُعد مساحت دارند. هرکمیت را می‌توان برحسب یکاهای متفاوتی بیان کرد، اما این کار بعد کمیت را عوض نمی‌کند: مساحت را چه برحسب m^2 بیان کنند، چه برحسب ft^2، چه برحسب هکتار، چه برحسب سابین (برای جذب صوت)، و چه برحسب بارن (برای واکنشهای هسته‌ای)، به‌هر حال مساحت است و بعد مساحت دارد.

پیش از این، استانداردهای سنجش را به‌عنوان کمیتهای بنیادی تعریف کردیم. به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم مجموعه‌ای از ابعاد بنیادی را، براساس استانداردهای مستقل، انتخاب کنیم. در میان کمیتهای مکانیکی، جرم، طول، و زمان، بنیادی و مستقل از یکدیگرند و کمیتهای دیگر را می‌توان برحسب آنها تعریف کرد. پس اینها را به‌عنوان ابعاد بنیادی می‌گیریم و، به‌ترتیب، با M، L، و T نشان می‌دهیم.

هر معادله‌ای باید از نظر ابعادی سازگار باشد؛ یعنی بعد کمیتهای دوطرف معادله باید یکی باشد. در خیلی از موارد، توجه به بعد کمیتها می‌تواند جلوی اشتباه را بگیرد. مثلاً، در فصل بعد نشان می‌دهیم که مسافت x، که متغیری با شروع از حالت سکون، و حرکت با شتاب ثابت a، طی زمان t می‌پیماید، $x = \frac{1}{2}at^2$ است. یکای شتاب، چیزی مثل $\mathrm{m/s^2}$ است. بعد هرکمیت را، با کروشه نشان می‌دهیم: $[x] = \mathrm{L}$ و $[t] = \mathrm{T}$. بنابراین، $[a] = \mathrm{L/T^2}$ یا $[a] = \mathrm{LT^{-2}}$. اگر به‌یکا و در نتیجه به بعد شتاب توجه داشته باشیم، هیچ‌وقت رابطه‌ای مثل $x = \frac{1}{2}at$ یا $x = \frac{1}{2}at^3$ نخواهیم نوشت.

تحلیل ابعادی خیلی وقتها می‌تواند در به‌دست آوردن معادلات هم مفید باشد. روش کار را در دو مثال زیر شرح می‌دهیم.

مثال ۴. برای اینکه جسمی را واداریم که با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، به نیرویی به‌نام "نیروی مرکزگرا" نیاز داریم. (حرکت دایره‌ای در فصل ۴ بررسی می‌شود.) نیروی مرکزگرا را تحلیل ابعادی کنید.

حل: اول از خودمان می‌پرسیم که "نیروی مرکزگرای F، به‌چند متغیرهای دینامیکی‌ای می‌تواند بستگی داشته باشد؟" این جسم

متحرک تنها سه‌ویژگی دارد که می‌توانند مهم باشند: جرم m، سرعت v، و شعاع مسیر دایره‌ای r. بنابراین، نیروی مرکزگرای F، صرفنظر از ثابتهای بی‌بعد، باید از چنین معادله‌ای به‌دست بیاید:

$$F \propto m^a v^b r^c$$

که در آن، $\propto$ یعنی "متناسب است با"، و a و b و c نماهایی عددی‌اند که باید از تحلیل ابعادی به‌دست بیایند. چنانکه در بخش ۱ـ۲ گفتیم (و در فصل ۵ خواهیم دید)، یکای نیرو $\mathrm{kg\,m/s^۲}$ است، یعنی بعد آن $[F] = \mathrm{MLT^{-۲}}$ است. پس معادلهٔ ابعادی نیروی مرکزگرا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$[F] = [m^a][v^b][r^c]$$
$$\mathrm{MLT^{-۲}} = \mathrm{M}^a(\mathrm{L/T})^b\mathrm{L}^c$$
$$= \mathrm{M}^a\mathrm{L}^{b+c}\mathrm{T}^{-b}$$

سازگاری ابعادی مستلزم آن است که ابعاد بنیادی دوطرف معادله یکسان باشد. پس نماها را در دو طرف برابر می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

نمای M : $a = ۱$

نمای T : $b = ۲$

نمای L : $b + c = ۱$ و از آنجا $c = -۱$

بنابراین

$$F \propto \frac{mv^۲}{r}$$

رابطهٔ واقعی نیروی مرکزگرا، که از قوانین نیوتون و هندسهٔ حرکت دایره‌ای به‌دست می‌آید، $F = mv^۲/r$ است. می‌بینیم که تحلیل ابعادی، بستگی دقیق این نیرو با متغیرهای مکانیکی را به‌ما داده است! اما همیشه هم نتیجه به‌این خوبی نیست، چون تحلیل ابعادی چیزی در مورد ثابتهای بی‌بعد نمی‌گوید، در این موردِ خاص، ثابت موردنظر ۱ بوده است.

مثال ۵. یکی از مراحل مهم تحول جهان، بلافاصله پس از مهبانگ، زمان پلانک t_P است. مقدار این کمیت به سه ثابت بنیادی بستگی دارد: (۱) سرعت نور (ثابت بنیادی نسبیت)، $c = ۳{,}۰۰ \times ۱۰^۸\mathrm{m/s}$؛ (۲) ثابت گرانش نیوتون (ثابت بنیادی گرانش)، $G = ۶{,}۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m^۳/s^۲\,kg}$؛ و (۳) ثابت پلانک (ثابت بنیادی مکانیک کوانتومی)، $h = ۶{,}۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\mathrm{kg\,m^۲/s}$. مقدار زمان پلانک را، با استفاده از تحلیل ابعادی، به‌دست بیاورید.

حل: با توجه به‌یکاهای این سه کمیت، ابعاد آنها را می‌نویسیم

$$[c] = [\mathrm{m/s}] = \mathrm{LT^{-۱}}$$
$$[G] = [\mathrm{m^۳/s^۲\,kg}] = \mathrm{L^۳T^{-۲}M^{-۱}}$$
$$[h] = [\mathrm{kg\,m^۲/s}] = \mathrm{ML^۲T^{-۱}}$$

فرض می‌کنیم بستگی زمان پلانک به‌این ثابتها به‌صورت زیر باشد

$$t_\mathrm{P} \propto c^i G^j h^k$$

باید نماهای i، j، و k را پیدا کنیم. معادلهٔ ابعادی رابطهٔ بالا عبارت است از

$$[t_\mathrm{P}] = [c^i][G^j][h^k]$$
$$\mathrm{T} = (\mathrm{LT^{-۱}})^i(\mathrm{L^۳T^{-۲}M^{-۱}})^j(\mathrm{ML^۲T^{-۱}})^k$$
$$= \mathrm{L}^{i+۳j+۲k}\mathrm{T}^{-i-۲j-k}\mathrm{M}^{-j+k}$$

نماهای دوطرف را برابر می‌گذاریم، نتیجه می‌شود که

نمای L : $۰ = i + ۳j + ۲k$

نمای T : $۱ = -i - ۲j - k$

نمای M : $۰ = -j + k$

این سه معادله را حل می‌کنیم و سه مجهول را به‌دست می‌آوریم

$$i = -\frac{۵}{۲}, \quad j = \frac{۱}{۲}, \quad k = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$t_\mathrm{P} \propto c^{-۵/۲}G^{۱/۲}h^{۱/۲} = \sqrt{\frac{Gh}{c^۵}}$$
$$= \sqrt{\frac{(۶{,}۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m^۳/s^۲kg})(۶{,}۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\mathrm{kg\,m^۲/s})}{(۳{,}۰۰ \times ۱۰^۸\mathrm{m/s})^۵}}$$
$$= ۱{,}۳۵ \times ۱۰^{-۴۳}\mathrm{s}$$

ثابت پلانک، طبق تعریف معمول، با یک ضریب $(۲\pi)^{-۱/۲}$ با عبارت بالا فرق می‌کند. چنین ضرایب بی‌بعدی را نمی‌توان با تحلیل ابعادی به‌دست آورد.

به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم طول پلانک و جرم پلانک را هم به‌دست بیاوریم (مسائل ۴۱ و ۴۲). این کمیتها هم تعبیرهای بنیادی دارند.

پرسشها

۱. این گفته را نقد کنید: "یک استاندارد، یکبار که انتخاب شد، به صرف "استاندارد" بودنش، تغییرناپذیر است".

۲. به‌نظر شما یک استاندارد، به‌جز دسترس‌پذیری و تغییرناپذیری، چه خواص مطلوب دیگری باید داشته باشد؟

۳. آیا می‌توانیم سیستمی از یکاهای پایه (جدول ۱) داشته باشیم که زمان جزء آن نباشد؟

۴. از هفت یکای پایهٔ جدول ۱، تنها یکی ــ کیلوگرم ــ پیشوند دارد (جدول ۲). آیا معقولتر نیست که جرم استوانهٔ پلاتین‌ـ‌ایریدیم (در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها) را، به‌جای 1kg برابر با 1g تعریف کنند؟

۵. پیشوند "میکرو" در عبارت "اجاق میکروموج" نشانهٔ چیست؟ پیشنهاد شده است که به موادغذایی که با تابش پرتو گاما قابلیت نگهداری آن‌را زیاد کرده‌ایم، "پیکوموجیده" بگوییم. فکر می‌کنید معنی‌این اصطلاح چیست؟

۶. خیلی از پژوهشگران، براساس شواهدی، معتقدند که ادراکات فراحسی واقعیت دارند. با فرض اینکه چنین پدیده‌ای واقعاً در طبیعت وجود داشته باشد، برای توصیف کمّی آن دنبال کدام کمیت یا کمیتهای فیزیکی باید گشت؟

۷. عده‌ای از فیزیکدانها و فیلسوفها معتقدند که اگر نتوان روشی برای تعیین یک کمیت فیزیکی توصیف کرد، آن کمیت آشکارناپذیر است؛ کمیتی است که باید آن‌را رها کرد زیرا واقعیت فیزیکی ندارد. همهٔ دانشمندان چنین نظری ندارند. به‌نظر شما، نکات مثبت و منفی این دیدگاه چیست؟

۸. چند پدیدهٔ تکرارشوندهٔ طبیعی نام ببرید که بتواند استانداردهای مناسب زمان باشند.

۹. می‌شد "۱ ثانیه" را به‌عنوان زمانِ یک نبضِ رئیسِ وقتِ اتحادیهٔ معلمان فیزیک امریکا تعریف کرد. گالیله هم در بعضی کارهایش ضربان نبض خود را به‌عنوان زمان‌سنج به‌کار گرفت. چرا تعریفی که براساس ساعتهای اتمی باشد بهتر است؟

۱۰. ویژگیهای یک ساعت خوب چیست؟

۱۱. با توجه به‌آنچه دربارهٔ آونگ می‌دانید، بگویید که اشکالات استفاده از دورهٔ تناوب آونگ به‌عنوان استاندارد زمان چیست.

۱۲. در روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۸۱، دقیقهٔ بین ساعت ۵۹ : ۱۰ و ساعت ۰۰ : ۱۱ صبح را 61s گرفتند. همچنین، روز آخر سال ۱۹۸۹ را هم، به‌اندازه 1s، طولانیتر اختیار کردند. گاه‌به‌گاه، این یک ثانیهٔ اضافی (کبیسه) را وارد می‌کنند، چون سرعت چرخش زمین، براساس استاندارد اتمی، در حال کند شدن است. چرا این کار، یعنی تنظیم دوبارهٔ ساعتها به‌این شکل، کارِ خوبی است؟

۱۳. یک ایستگاه رادیویی "روی ۸۹٫۵ باند FM" برنامه پخش می‌کند. معنی این عدد چیست؟

۱۴. چرا در SI، یکای پایه‌ای برای مساحت یا حجم وجود ندارد؟

۱۵. در ابتدا متر را برابر با یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ قطب شمال تا استوا، از طریق نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، تعریف کرده بودند. این تعریف، به مقدار ۰٫۰۲۳٪ با میلهٔ متر تفاوت دارد. آیا معنی‌اش این است که میلهٔ متر استاندارد تا این اندازه خطا دارد؟

۱۶. آیا می‌توان طول یک خط خمیده را اندازه گرفت؟ اگرمی‌شود، چگونه؟

۱۷. هنگامی که میلهٔ متر را به‌عنوان استاندارد طول برگزیدند، مشخص کردند که این تعریف، در چه دمایی است. آیا می‌توان طول را ویژگی بنیادی نامید در حالی‌که برای تعیین استاندارد آن باید کمیت فیزیکی دیگری، مثل دما، را مشخص کرد؟

۱۸. چرا شرکت‌کنندگان در کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۸۳، سرعت نور را دقیقاً برابر با $3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ تعریف نکردند؟ آیا این انتخاب، کار را ساده‌تر نمی‌کرد؟ چرا سرعت نور را دقیقاً 1m/s اختیار نکردند؟ آیا امکان هر دو انتخاب بالا برای آنها وجود داشت؟ اگر داشت، چرا هر دو را کنار گذاشتند؟

۱۹. روشی برای سنجش (الف) شعاع کرهٔ زمین، (ب) فاصلهٔ میان خورشید و زمین، و (ج) شعاع خورشید، پیشنهاد کنید.

۲۰. روشی برای سنجش (الف) ضخامت یک صفحهٔ کاغذ، (ب) ضخامت یک حباب صابون، و (ج) قطر اتم، پیشنهاد کنید.

۲۱. اگر کسی بگوید که ابعاد همهٔ اجسام، یک شبه نصف شده است، چگونه می‌توان ادعای او را رد کرد؟

۲۲. آیا استاندارد فعلی کیلوگرم برای جرم، قابل حصول، تغییرناپذیر، قابل بازسازی، و تخریب‌ناپذیر هست؟ آیا مقایسهٔ جرمهای مختلف با آن ساده است؟ آیا استانداردهای اتمی، از هر نظر بهتر نیستند؟ چرا برای جرم هم، مثل طول و زمان، استانداردِ اتمی اختیار نمی‌کنیم؟

۲۳. چرا داشتن دو استانداردِ جرم، یکی کیلوگرم و یکی جرم اتم $^{12}\mathrm{C}$، مفید است؟

۲۴. رابطهٔ میان جرم کیلوگرم استاندارد و جرم اتم $^{12}\mathrm{C}$ چگونه به‌دست می‌آید؟

۲۵. برای تعیین جرم اجسام جدول ۵، روشهایی عملی پیشنهاد کنید.

۲۶. اجسامی پیشنهاد کنید که جرم آنها در گسترهٔ وسیع بین جرم کشتی اقیانوس‌پیما و جرم ماه (جدول ۵) واقع باشد و این جرمها را تخمین بزنید.

۲۷. مخالفان سیستم متریک (در کشورهایی که این سیستم را نپذیرفته‌اند) اغلب سفسطه می‌کنند که، مثلاً، "به‌جای اینکه 1lb کره بخرید، باید 0٫454kg کره بخرید." منظورشان این است که زندگی مشکلتر می‌شود. این نوع استدلالها را چگونه باید رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۱ـ۲ سیستم بین‌المللی یکاها

۱. با استفاده از پیشوندهای جدول ۲، این عبارتها را بیان کنید. (الف) 10^6 فون؛ (ب) 10^{-6} فون؛ (ج) 10^1 کارت؛ (د) 10^9 لو؛ (ه) 10^{12} ورس؛ (و) 10^{-1} مال؛ (ز) 10^{-2} مانتال؛ (ح) 10^{-9} مسکن؛ (ط) 10^{-12} لو؛ (ی) 10^{-18} ماتیک؛ (ک) 2×10^3 مرغ. خودتان هم عبارتهای مشابهی بسازید.[1]

۲. بعضی از پیشوندهای یکاهای SI، وارد زندگی روزمره هم شده‌اند. (الف) حقوق سالانه 36K (یعنی 36k$) معادل هفته‌ای چقدر است؟ (ب) جایزهٔ بزرگ یک بخت‌آزمایی، ۱۰ مگادلار است که طی

---

۱. رجوع کنید به‌صفحهٔ ۶۱ کتابِ
A Random Walk in Science, compiled, R. L. Weber; Crane, Russak & Co., NewYork, 1974.

ساعت	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
A	۱۲ : ۳۶ : ۴۰	۱۲ : ۳۶ : ۵۶	۱۲ : ۳۷ : ۱۲	۱۲ : ۳۷ : ۲۷	۱۲ : ۳۷ : ۴۴	۱۲ : ۳۷ : ۵۹	۱۲ : ۳۸ : ۱۴
B	۱۱ : ۵۹ : ۵۹	۱۲ : ۰۰ : ۰۲	۱۱ : ۵۹ : ۵۷	۱۲ : ۰۰ : ۰۷	۱۲ : ۰۰ : ۰۲	۱۱ : ۵۹ : ۵۶	۱۲ : ۰۰ : ۰۳
C	۱۵ : ۵۰ : ۴۵	۱۵ : ۵۱ : ۴۳	۱۵ : ۵۲ : ۴۱	۱۵ : ۵۳ : ۳۹	۱۵ : ۵۴ : ۳۷	۱۵ : ۵۵ : ۳۵	۱۵ : ۵۶ : ۳۳
D	۱۲ : ۰۳ : ۵۹	۱۲ : ۰۲ : ۵۲	۱۲ : ۰۱ : ۴۵	۱۲ : ۰۰ : ۳۸	۱۱ : ۵۹ : ۳۱	۱۱ : ۵۸ : ۲۴	۱۱ : ۵۷ : ۱۷
E	۱۲ : ۰۳ : ۵۹	۱۲ : ۰۲ : ۴۹	۱۲ : ۰۱ : ۵۴	۱۲ : ۰۱ : ۵۲	۱۲ : ۰۱ : ۳۲	۱۲ : ۰۱ : ۲۲	۱۲ : ۰۱ : ۱۲

۲۰ سال پرداخت می‌شود. برندهٔ جایزه، هرماه چقدر پول می‌گیرد؟ (ج) ظرفیت دیسک سخت یک کامپیوتر ۳۰MB است. اگر هر کلمه ۸ بایت را اشغال کند، این کامپیوتر چند کلمه گنجایش دارد؟ مقصود کامپیوتر کارها از کیلو، ۱۰۲۴ (یعنی $۲^{۱۰}$) است، نه ۱۰۰۰.

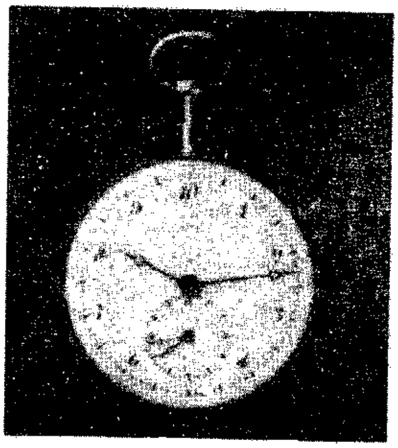
بخش ۱ـ۳ استاندارد زمان

۳. انریکو فرمی زمانی گفته بود که مدت استاندارد یک جلسه درس (۵۰min) نزدیک به یک میکروقرن است. هر میکروقرن چند دقیقه است و درصد اختلاف این رقم با تقریب فرمی چقدر است؟

۴. فاصلهٔ نیویورک و لوس‌آنجلس در حدود ۳۰۰۰mi است؛ اختلاف زمانی این شهرها، ۳h است. محیط زمین چقدر است؟

۵. یکی از ارقام معمول برای تعداد ثانیه‌های موجود در یک‌سال، $\pi \times ۱۰^{۷}$ است. این مقدار چند درصد خطا دارد؟

۶. کمی پس از انقلاب فرانسه، کنوانسیون ملی به‌عنوان بخشی از برنامهٔ معرفی سیستم‌متریک، تلاش کرد زمان را هم دهدهی کند. در این تلاش، که البته موفق نشد، هر شبانه‌روز که از نیمه‌شب آغاز می‌شد، به ۱۰ ساعت دهدهی تقسیم شده بود، و هرساعت برابر با ۱۰۰ دقیقهٔ دهدهی بود. عقربه‌های ساعتی که از آن دوران باقی‌مانده است، روی ساعت ۸ دهدهی و دقیقهٔ ۲۲٫۸ دهدهی متوقف شده‌اند. ساعت (به‌معیار خودمان) چند است؟ (شکل ۷).



شکل ۷. مسئلهٔ ۶

۷. (الف) شیک[1] یکی از واحدهای زمان است که، گاهی، در فیزیک میکروسکوپیکی به‌کار می‌رود. هر شیک $۱۰^{-۸}$s است. تعداد شیکهای یک ثانیه بیشتر است یا تعداد ثانیه‌های یک سال؟ (ب) قدمت انسان در حدود $۱۰^{۶}$ سال است، در حالی‌که سن جهان در حدود $۱۰^{۱۰}$ سال است. اگر سن جهان را ۱ روز بگیریم، قدمت انسان چند ثانیه می‌شود؟

۸. رکوردهایی که دو دونده در دو مسابقهٔ متفاوت دو به مسافت یک مایل به‌دست آورده‌اند؛ ۳ دقیقه و ۵۸٫۰۵ ثانیه، و ۳ دقیقه و ۵۸٫۲۰ ثانیه، است. حداکثر خطا در تعیین مسافت دو مسابقه برحسب فوت چقدر باید باشد تا بتوانیم نتیجه بگیریم که دونده‌ای که این مسافت را در زمان کمتری طی کرده، واقعاً سریعتر دویده است؟

۹. یک ساعت آونگی (با صفحهٔ ۱۲ ساعته) به‌اندازهٔ ۱min/day جلو می‌رود. اگر این‌ساعت را میزان کنیم چقدر طول می‌کشد تا دوباره زمان درست را نشان بدهد؟

۱۰. پنج دستگاه ساعت در آزمایشگاهی آزمایش می‌شوند. هر روز درست سر ظهر، که با ساعت اتمی معلوم می‌شود، رقمی که ساعتها نشان می‌دهند ثبت می‌شود. این‌کار به‌مدت یک هفته ادامه می‌یابد. نتایج آزمایش در جدول بالا آمده است. این ساعتها را به‌ترتیبِ بهتر بودن زمان‌سنجی آنها مرتب کنید. علت انتخاب خودتان را بیان کنید.

۱۱. سن جهان در حدود ۵×۱۰^{۱۷}s است؛ دوام کوتاهترین تپ [پالس] نور که (تا سال ۱۹۹۰) در آزمایشگاه تولید شده است، تنها ۶×۱۰^{-۱۵}s بوده است (جدول ۳). یک‌بازهٔ زمانی فیزیکی ذکر کنید که، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً وسط این دو عدد باشد.

۱۲. با این فرض که طول روز، به‌طور یکنواخت، به‌مقدار ۰٫۰۰۱s در قرن زیاد می‌شود، اثر تجمعی این پدیده بر سنجش زمان در طی ۲۰ قرن را حساب کنید. چنین کاهشی در سرعت چرخش زمین را از روی مشاهدات مربوط به‌کسوف در این دوره (۲۰ قرن) پیدا کرده‌اند.

۱۳. زمانی که طول می‌کشد تا ماه، نسبت به ستاره‌های ثابت، به‌مکان اولیهٔ خود برگردد، ۲۷٫۳ روز است و آن‌را ماه نجومی می‌نامند. بازهٔ زمانی بین دو وضعیت یکسان ماه را ماه قمری می‌نامند. ماه قمری از ماه نجومی طولانیتر است. چرا و چقدر؟

بخش ۱ـ۴ استاندارد طول

۱۴. قد شخصی ۱٫۹m است. این کمیت برحسب یکاهای بریتانیایی چقدر است؟

1. shake

۱۵. (الف) هم مسابقهٔ دو ۱۰۰ یارد داریم و هم مسابقهٔ دو ۱۰۰ متر. کدام‌یک طولانیتر است؟ چند متر؟ چند فوت؟ (ب) هم رکوردهای دو یک مایل را ثبت می‌کنند و هم رکوردهای دو یک مایل متریک (۱۵۰۰ متر) را. این دو مسافت را با هم مقایسه کنید.

۱۶. پایداری ساعتهای سزیومی که به‌عنوان استاندارد اتمی زمان به‌کار می‌روند، چنان است که دو ساعت سزیمی در طی حدود ۳۰۰۰۰۰ سال حداکثر 1s با هم اختلاف خواهند داشت. اگر فاصلهٔ میان نیویورک و سان‌فرانسیسکو (2572mi) هم با همین دقت تعیین شده باشد، اختلاف دوبار سنجش این مسافت چقدر خواهد بود؟

۱۷. جنوبگان تقریباً به‌شکل نیمدایره‌ای به‌شعاع 2000km است. ضخامت متوسط پوشش یخی آن 3000m است. جنوبگان چند سانتی‌متر مکعب یخ دارد؟ (خمیدگی زمین را در نظر نگیرید.)

۱۸. هکتار یکی از یکاهای مساحت است که معمولاً برای سنجش مساحت زمینها به‌کار می‌رود. هر هکتار طبق تعریف $10^4 m^2$ است. در یک معدن روباز زغال‌سنگ، هر سال ۷۷ هکتار زمین به‌عمق 26m حفاری می‌شود. چند کیلومتر مکعب خاک در سال از این معدن بیرون می‌آید؟

۱۹. زمین تقریباً به‌شکل کره‌ای است به‌شعاع $6{,}37 \times 10^6 m$. (الف) محیط آن چند کیلومتر است؟ (ب) مساحت سطح آن چند کیلومتر مربع است؟ (ج) حجم آن چند کیلومتر مکعب است؟

۲۰. مقدار تقریبی حداکثر سرعت چند جانور برحسب یکاهای متفاوت، در سطرهای پایین ذکر شده است. این سرعتها را به m/s تبدیل کنید و جانوران را به‌ترتیب صعودی حداکثر سرعتشان مرتب کنید: سنجاب، 19km/h؛ خرگوش، ۳۰ گره؛ حلزون، 0,030mi/h؛ عنکبوت، 1,8ft/s؛ چیتا، 1,9km/min؛ انسان، 1000cm/s؛ روباه، 1100m/min؛ شیر، 1900km/day.

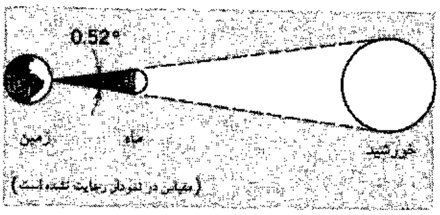
۲۱. سرعت یک سفینهٔ فضایی 19200mi/h است. این سرعت برحسب سالِ نوری بر قرن، چقدر است؟

۲۲. یک نوع اتومبیل جدید، مجهز به‌یک نمایشگر میزان مصرف سوخت است. راننده می‌تواند، با یک کلید، یکاهای بریتانیایی یا SI را انتخاب کند. اعداد نمایش بریتانیایی برحسب mi/galاند، اما نمایش SI برعکس آن، یعنی برحسب L/km است. نمایش SI برای معادل 30,0mi/gal چه عددی است؟

۲۳. فاصله‌های نجومی در مقایسه با ابعاد زمینی آنقدر بزرگ‌اند که برای درک آسانتر فواصل نسبی اشیای نجومی از یکاهای طولی استفاده می‌شود که خیلی از یکاهای معمولی بزرگترند: یک یکای نجومی (AU) برابر است با فاصلهٔ متوسط زمین از خورشید، یعنی $1{,}50 \times 10^8 km$. یک پارسک (pc) مسافتی است که طول یک یکای نجومی از آن فاصله، تحت یک ثانیهٔ قوسی دیده شود. یک سال نوری (ly) مسافتی است که نور، با سرعت $3{,}00 \times 10^5 km/s$ در خلأ، طی یک سال می‌پیماید. (الف) فاصلهٔ زمین تا خورشید را برحسب پارسک و سال نوری بیان کنید. (ب) سال نوری و پارسک را برحسب کیلومتر بیان کنید. در نوشته‌های عامه‌خوان از سال‌نوری خیلی استفاده می‌شود، اما پارسک را عموماً اخترشناسان به‌کار می‌برند.

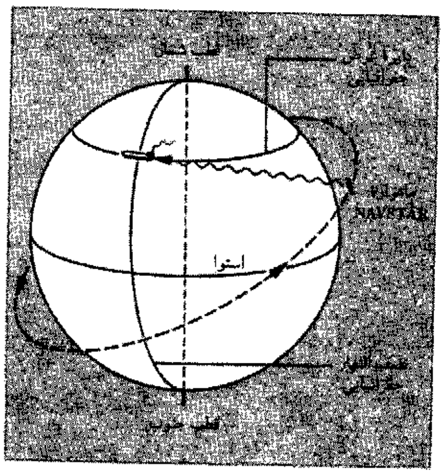
۲۴. شعاع مؤثر پروتون $1 \times 10^{-15} m$ است؛ شعاع جهان مشاهده‌پذیر (براساس فاصلهٔ دورترین اختروش مشاهده‌پذیر) $2 \times 10^{26} m$ است (جدول ۴). یک مسافت فیزیکی ذکر کنید که مقدار آن، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً در وسط این دو عدد باشد.

۲۵. فاصلهٔ متوسط خورشید از زمین، ۳۹۰ برابر فاصلهٔ متوسط ماه از زمین است. کسوف کامل را در نظر بگیرید (ماه بین زمین و خورشید؛ شکل ۸) و (الف) نسبت قطر خورشید به قطر ماه، و (ب) نسبت حجم خورشید به حجم ماه را حساب کنید. (ج) ماه از زمین تحت زاویهٔ °0,520 دیده می‌شود و فاصلهٔ زمین از ماه $3{,}82 \times 10^5 km$ است. قطر ماه را حساب کنید.



شکل ۸. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. سیستم ناوبریِ یک نفتکش، با استفاده از ماهواره‌های سیستم جهانی تعیین موقعیت (GPS/NAVSTAR)، عرض و طول جغرافیایی مکان را به‌ترتیب برابر با ″N 43°36′25,3 و ″W 77°31′48,2 تعیین می‌کند (شکل ۹). اگر خطای این اعداد ″0,5± باشد، خطای سنجش موقعیت نفتکش در راستای (الف) شمال-جنوب (نصف‌النهاری که از آن نقطه می‌گذرد) و (ب) شرق-غرب (مداری که از آن نقطه می‌گذرد) چقدر است؟ (ج) نفتکش در کجاست؟



شکل ۹. مسئلهٔ ۲۶

بخش ۱ـ۵ استاندارد جرم

۲۷. با استفاده از ضرایب تبدیل و داده‌های این فصل، حساب کنید که در $۱٫۰۰\,\mathrm{kg}$ هیدروژن چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۲۸. مولکول آب (H_2O) دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. جرم اتم هیدروژن $۱٫۰\,\mathrm{u}$ و جرم اتم اکسیژن $۱۶\,\mathrm{u}$ است. (الف) جرم یک مولکول آب چند کیلوگرم است؟ (ب) در آب اقیانوسهای جهان چند مولکول آب وجود دارد؟ جرم کل اقیانوسهای جهان $۱٫۴ \times ۱۰^{۲۱}\,\mathrm{kg}$ است.

۲۹. در قارهٔ اروپا، یک "پاوند" نیم کیلوگرم است. کدام‌یک از این خریدها بصرفه‌تر است؟ یک پاوندِ پاریسی قهوه به‌قیمت ۳٫۰۰ دلار یا یک پاوندِ نیویورکی به‌قیمت ۲٫۴۰ دلار؟

۳۰. ابعاد یک اتاق $۲۱\,\mathrm{ft} \times ۱۳\,\mathrm{ft} \times ۱۲\,\mathrm{ft}$ است. جرم هوای موجود در آن چقدر است؟ چگالی هوا، در دمای اتاق و فشار عادی جو، $۱٫۲۱\,\mathrm{kg/m^3}$ است.

۳۱. طول ضلع یک حبه قند معمولی $۱\,\mathrm{cm}$ است. طول ضلع جعبه‌ای که درست یک مول حبه قند در آن جا بگیرد چقدر است؟

۳۲. شخصی، با رژیم غذایی، هفته‌ای $۲٫۳\,\mathrm{kg}$ (حدود $۵\,\mathrm{lb}$) وزن کم می‌کند. آهنگ کاهش وزن این شخص برحسب میلی‌گرم بر ثانیه چقدر است؟

۳۳. فرض کنید $۱۲\,\mathrm{h}$ طول می‌کشد که مخزنی محتوی $۵۷۰۰\,\mathrm{m^3}$ آب خالی شود. آهنگ خروج آب (برحسب $\mathrm{kg/s}$) از این مخزن چقدر است؟ چگالی آب $۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^3}$ است.

۳۴. شعاع متوسط دانه‌های ماسه در ساحل کالیفرنیا $۵۰\,\mu\mathrm{m}$ است. مساحت کلِ چه جرمی از این ماسه‌ها برابر با مساحت سطح مکعبی به‌ضلع $۱\,\mathrm{m}$ است؟ ماسه از جنس سیلیسیم‌دیوکسید است، که جرم هر مترمکعب آن $۲۶۰۰\,\mathrm{kg}$ است.

۳۵. کیلوگرم استاندارد (شکل ۵) به‌شکل استوانه‌ای است که ارتفاع آن با قطرش برابر است. نشان بدهید که در میان استوانه‌هایی با حجم یکسان، استوانه‌ای‌که قطر و ارتفاعش برابر باشد کمترین مساحت سطح را دارد. به‌این‌ترتیب، آثار سایش و آلودگی سطحی استوانهٔ استاندارد به حداقل می‌رسد.

۳۶. برای تخمین فاصلهٔ بین دو اتم یا دو مولکول مجاور در یک مادهٔ جامد، می‌توان دو برابر شعاع کره‌ای را در نظر گرفت که حجم آن برابر با حجم بر اتم آن ماده باشد. فاصلهٔ بین اتمهای مجاور را (الف) در آهن و (ب) در سدیم حساب کنید. چگالی آهن و سدیم به‌ترتیب $۷۸۷۰\,\mathrm{kg/m^3}$ و $۱۰۱۳\,\mathrm{kg/m^3}$ است. جرم هر اتم آهن $۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{kg}$، و جرم هر اتم سدیم $۳٫۸۲ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{kg}$ است.

بخش ۱ـ۶ دقت و ارقام بامعنی

۳۷. طی سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۳، متر برابر با ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ طول‌موج نور قرمزـنارنجی خاصی که از اتمهای کریپتون گسیل می‌شود تعریف شده بود. یک طول‌موج این تابش، برحسب نانومتر، چقدر است؟ نتیجه را با تعداد مناسبی از رقمهای بامعنی بیان کنید.

۳۸. (الف) $۱۳۲٫۰ + ۳۷٫۷۶$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید. (ب) $۱۶٫۲۶۳۲۵ - ۱۶٫۲۶۴$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

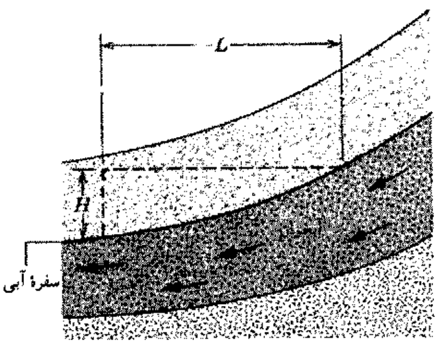
۳۹. (الف) طول یک صفحهٔ مستطیلی فلزی $۸٫۴۳\,\mathrm{cm}$ و عرض آن $۵٫۱۲\,\mathrm{cm}$ است. مساحت این صفحه را، با رقمهای بامعنی به‌تعدادِ درست حساب‌کنید. (ب) شعاع یک صفحهٔ فلزی گرد $۳٫۷\,\mathrm{cm}$ است. مساحت صفحه را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

بخش ۱ـ۷ تحلیل ابعادی

۴۰. سنگهای متخلخل می‌توانند آب زیرزمینی را از خودشان عبور بدهند. حجم V آب، که در زمان t از سطح مقطعی به‌مساحت A عبور می‌کند، از رابطهٔ

$$\frac{V}{t} = KA\frac{H}{L}$$

به‌دست می‌آید، که در آن H برابر با مقدار کاهش ارتفاع سطح بستر نسبت به‌افق، در طی مسافت L است (شکل ۱۰). این رابطه را قانون دارسی[1] می‌نامند. کمیت K رسانندگی هیدرولیکی بستر است یکای SI کمیت K چیست؟



شکل ۱۰. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. در مثال ۵، ثابتهای h، G، و c را ترکیب کردیم و کمیتی با بعد زمان به‌دست آوردیم. با تکرار همین کار کمیتی با بعد طول به‌دست بیاورید و مقدار عددی آن‌را محاسبه کنید. ثابتهای بی‌بعد را کنار بگذارید. این طول پلانک است؛ اندازهٔ جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

۴۲. روش مسئلهٔ ۴۱ را تکرار کنید و کمیتی با بعد جرم به‌دست بیاورید. این کمیت جرم پلانک است، یعنی جرم جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

1. Darcy

۲

حرکت در یک بُعد

مکانیک، قدیمی‌ترین شاخهٔ علوم‌فیزیکی، علم بررسی حرکت اجسام است. از محاسبهٔ مسیر توپ بیسبال یا مسیر سفینهٔ فضایی‌ای که به مریخ می‌رود گرفته تا تحلیل ردّ حرکتهای ذرات بنیادی‌ای که از برخورد ذرات در بزرگترین شتابدهنده‌ها حاصل می‌شوند، همه جزو مسائل مکانیک‌اند. بخشی از مکانیک که به **توصیف** حرکت اختصاص دارد **سینماتیک** نامیده می‌شود (سینماتیک برگرفته از معادل واژهٔ حرکت در زبان یونانی است؛ "سینما" به معنی تصاویر **متحرک** را هم از همین واژه گرفته‌اند). به آن بخشی از مکانیک که به تحلیل **علل** حرکت مربوط می‌شود **دینامیک** می‌گویند، (برگرفته از معادل یونانی واژهٔ نیرو؛ دینامیت هم از همین واژه می‌آید). در این فصل، تنها به سینماتیک در یک بعد می‌پردازیم. در دو فصل بعدی این نتایج را به دو و سه بعد تعمیم می‌دهیم. مطالعهٔ دینامیک را در فصل ۵ آغاز خواهیم کرد.

۲ـ۱ سینماتیک ذره

برای شروع مطالعه، مورد ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند. حرکت راست‌خط خوبی‌اش این است که با آن می‌توانیم مفاهیم بنیادی سینماتیک، مثل سرعت و شتاب را بدون نیاز به ریاضیات مربوط به بردارها، که معمولاً برای تحلیل حرکتهای دوبعدی و سه‌بعدی به‌کار می‌رود، به‌سادگی معرفی کنیم. البته در همین شکل محدود حرکت هم می‌توانیم خیلی از وضعیتهای واقعی را بررسی کنیم: سنگ در حال سقوط، قطار شتابدار، اتومبیل در حال ترمز، گوی هاکی در حال لغزش، صندوقی که از شیبی بالا کشیده می‌شود، الکترونهای سریع لامپ پرتو x، و نظایر آنها نمونه‌هایی از این مواردند. در این موارد حالت حرکت می‌تواند تغییر کند (مثلاً ممکن است به گوی هاکی ضربه بزنیم تا شروع به حرکت کند)، جهت حرکت هم می‌تواند تغییر کند (مثلاً می‌شود سنگ را به هوا پرتاب کرد تا دوباره به زمین برگردد)، اما در هر حال این حرکت باید مقید به یک خط راست باشد.

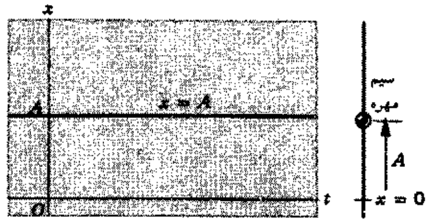
برای اینکه بحث را باز هم ساده‌تر کرده باشیم، فعلاً فقط به حرکت یک ذره می‌پردازیم. یعنی اجسام پیچیده را هم مثل یک نقطهٔ‌مادی فرض می‌کنیم. به این ترتیب، می‌توانیم از همهٔ حرکتهای درونی ممکن چشمپوشی کنیم ــ مثلاً از حرکت چرخشی (فصلهای ۱۱ تا ۱۳) یا از حرکت ارتعاشی اجزای جسم (فصل ۱۵). در این بحث مواردی را در نظر می‌گیریم که همهٔ اجزای جسم، دقیقاً در یک جهت حرکت می‌کنند. چرخ غلتان چنین خاصیتی ندارد زیرا حرکت نقاط روی لبهٔ آن، با حرکت نقاط روی محورش فرق می‌کند. (اما چرخ لغزان این خاصیت را دارد. بنابراین چرخ را هم مثل اجسام دیگر، می‌توانیم برای بعضی از محاسبات مانند ذره در نظر بگیریم و برای بعضی دیگر نمی‌توانیم.) تا جایی که تنها با متغیرهای سینماتیکی سروکار داریم، علتی وجود ندارد که حرکت قطار و الکترون را بر یک اساس بررسی نکنیم. هر دو نمونه‌هایی از حرکت ذره‌اند.

همهٔ انواع حرکت راست‌خط ذره را بررسی می‌کنیم. ذره ممکن است سرعت بگیرد، سرعت کم کند، و حتی بایستد و برگردد. به دنبال توصیفی می‌گردیم که همهٔ این امکانات را در برداشته باشد.

۲ـ۲ توصیف حرکت

حرکت ذره را به دو طریق توصیف می‌کنیم: با معادلات ریاضی و با نمودار. هر دو راه برای مطالعهٔ سینماتیک مفیدند، و ما هم از هر دو استفاده می‌کنیم. معمولاً روش ریاضی برای حل مسائل بهتر است، زیرا دقت بیشتری از روش نموداری دارد. روش نموداری از این جهت مفید است که خیلی وقتها بصیرت فیزیکی بیشتری، نسبت به معادلات ریاضی، به‌دست می‌دهد.

اگر بستگی ریاضی مکان x ذره (نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع معین) به زمان t را برای همهٔ زمانها داشته باشیم، توصیف کاملی از حرکت ذره به‌دست می‌آید. این همان تابع $x(t)$ است. در مثالهای زیر، چند نمونه از انواع ممکن حرکت را همراه با توابع و نمودارهای توصیف‌کنندهٔ آنها در نظر می‌گیریم:



شکل۱. مهره‌ای که می‌تواند آزادانه در یک‌بعد روی سیمی حرکت کند؛ راستای (ثابت) حرکت دلبخواه است و الزاماً قائم نیست. در این مورد، مهره در مختصهٔ x برابر با A ساکن است، و "حرکت" آن با خط راست افقی $x = A$ توصیف می‌شود.

۱. سکون. در این حالت ذره همیشه در نقطهٔ A است:

$$x(t) = A \tag{۱}$$

نمودار این "حرکت" در شکل ۱ آمده است. برای توضیح این نمودار، فرض می‌کنیم ذره مهره‌ای است که بدون اصطکاک روی سیم بلندی می‌لغزد. در این مورد، مهره در نقطهٔ $x = A$ در حالت سکون است. دقت کنید که در نمودار، x را متغیر وابسته (روی محور قائم) و t را متغیر مستقل (روی محور افقی) می‌گیریم.

۲. حرکت با سرعت ثابت. آهنگ حرکت ذره را با سرعت آن توصیف می‌کنیم. در حرکت یک‌بعدی، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد: ذره اگر در جهت افزایش x حرکت کند سرعت مثبت است، و اگر در جهت کاهش x حرکت کند سرعت منفی است. اندازهٔ سرعت هم معیار دیگری از آهنگ حرکت است. اندازهٔ سرعت همیشه مثبت است و اطلاعی در بارهٔ جهت حرکت در بر ندارد.

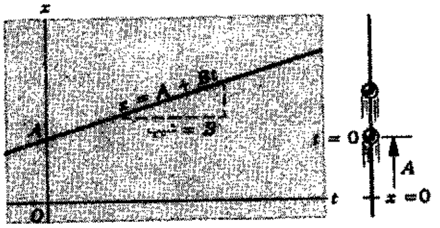
در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان برحسب زمان خطی راست با شیب ثابت است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که شیب هرتابعی مشخص‌کنندهٔ آهنگ تغییر آن است. در اینجا، آهنگ تغییر مکان سرعت است، و هر چه شیب نمودار بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در شکل ریاضیاتی داریم

$$x(t) = A + Bt \tag{۲}$$

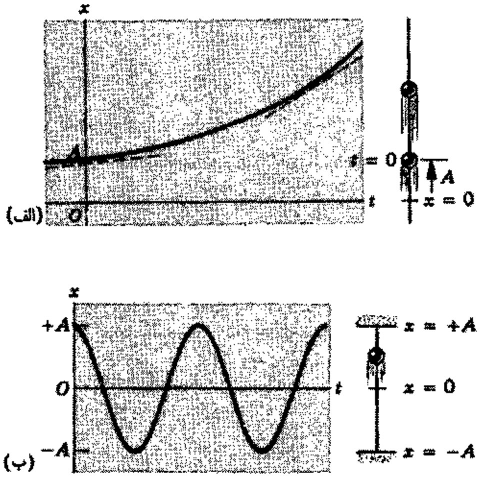
که نمایش معمول یک خط راست با شیب B است (البته خط را اغلب با $y = mx + b$ نشان می‌دهند).

شکل ۲ حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در زمان $t = ۰$ در نقطهٔ $x = A$ است. این ذره با سرعت ثابت در جهت افزایش x حرکت می‌کند. به این ترتیب، همان‌طور که از شیب مثبت نمودار برمی‌آید، سرعت آن مثبت است.

۳. حرکت شتابدار. در این مورد سرعت ذره تغییر می‌کند (شتاب، طبق تعریف، برابر است با آهنگ تغییر سرعت)؛ بنابراین، شیب نمودار هم متغیر است. پس نمودار چنین حرکتهایی منحنی است نه خط



شکل۲. مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت B در جهت مثبت x روی سیمی می‌لغزد؛ مهره در زمان صفر از $x = A$ شروع به حرکت می‌کند و حرکت آن با خط $x = A + Bt$ توصیف می‌شود.



شکل۳. (الف) مهره‌ای که در یک بعد با سرعت فزاینده در جهت مثبت در روی سیم می‌لغزد. سرعت مهره برابر است با شیب منحنی‌ای که حرکت آن‌را توصیف می‌کند؛ می‌توانید ببینید که چگونه شیب منحنی به‌طور پیوسته زیاد می‌شود. (ب) مهره‌ای در یک بعد روی سیم بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند.

راست. دو نمونه از این نوع حرکت عبارت است از:

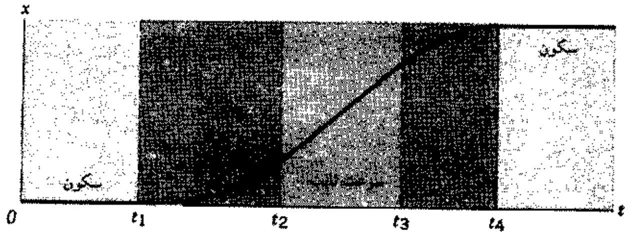
$$x(t) = A + Bt + Ct^۲ \tag{۳}$$

$$x(t) = A \cos \omega t \tag{۴}$$

در اولی با فرض $C > ۰$، شیب به‌طور پیوسته زیاد می‌شود و حرکت ذره مدام سریعتر می‌شود (شکل ۳الف). در دومی، ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند (شکل ۳ب)، و سرعت آن نیز همراه با تغییر علامت شیب منحنی در شکل ۳ب، تغییر علامت می‌دهد.

توصیف کامل حرکت، معمولاً پیچیده‌تر از آن است که تا به حال با مثالهای ساده نشان داده‌ایم. به این مثالها توجه کنید:

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. اتومبیلی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، شتاب می‌گیرد، و به سرعت معینی می‌رسد. سپس مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سرانجام ترمز می‌کند و می‌ایستد. شکل ۴ این حرکت را نشان می‌دهد. این حرکت را نمی‌شود صرفاً با یک معادله توصیف کرد؛ برای حالتهای سکون باید رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۱ به‌کار ببریم؛ برای بخش شتابدار تندشونده



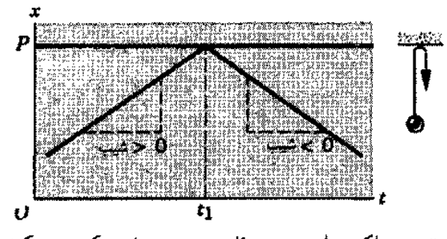
شکل۴. این منحنی اتومبیلی را توصیف می‌کند که از $t = ۰$ تا $t = t_۱$ در حالت سکون است، و از این لحظه شروع به شتاب گرفتن می‌کند. در $t = t_۲$ شتاب خود را از دست می‌دهد و مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در زمان $t = t_۳$ ترمز می‌کند، و سرعتش به‌تدریج کم می‌شود تا آنکه در زمان $t = t_۴$ به‌صفر می‌رسد.

رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۳، برای بخش سرعت ثابت رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۲، و برای بخش ترمز هم رابطه‌ای دیگر، باز هم از نوع معادلهٔ ۳.

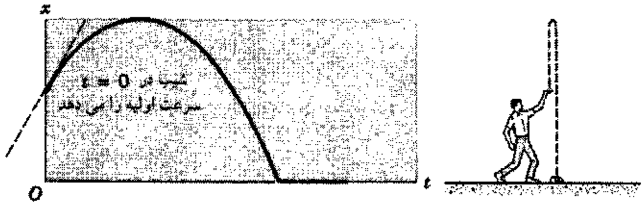
دقت کنید که نمودار این حرکت دو ویژگی دارد: $x(t)$ پیوسته است (نمودار پرشی ندارد) و شیب نیز پیوسته است (نمودار نقاط تیز ندارد). انتظار داریم که $x(t)$ همواره پیوسته باشد؛ در غیر این‌صورت، اتومبیل در نقطه‌ای ناپدید می‌شود و در نقطه‌ای دیگر ظاهر می‌شود. بعداً خواهیم دید که نقاط تیز نمودار، نقاطی‌اند که در آنها سرعت به‌طور آنی تغییر می‌کند. این البته گویای یک وضعیت کاملاً فیزیکی نیست، اما تقریب خوبی برای بعضی وضعیتهای فیزیکی است.

۵. جسمی که به مانع برمی‌خورد و بازمی‌گردد. یک "گوی" هاکی با سرعت ثابت روی یخ می‌لغزد، به دیوار برمی‌خورد، و در جهت مخالف و با همان اندازهٔ سرعت بازمی‌گردد. شکل ۵ این حرکت را نشان می‌دهد؛ در اینجا فرض شده است که برخورد آناً جهت حرکت را معکوس می‌کند. در واقع اگر "نقطهٔ" برخورد را دقیقاً بررسی کنیم، درمی‌یابیم که این نقطه تیز نیست بلکه کمی گرد است. این امر ناشی از کشسانی دیوار و گوی هاکی است.

۶. گلولهٔ خمیر چسبنده. دانشجویی یک گلولهٔ خمیر مدلسازی را به بالا پرتاب می‌کند؛ نقطهٔ رها کردن توپ بالای سر دانشجو است. توپ تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، و سپس برمی‌گردد و به زمین می‌چسبد. شکل ۶ این حرکت را نشان می‌دهد. شیب منحنی در $t = ۰$ سرعت



شکل۵. یک توپ هاکی با سرعت ثابت روی یخ حرکت می‌کند و در زمان $t_۱$ در $x = P$ به یک دیوارهٔ صلب برمی‌خورد؛ پس از برخورد از دیواره برمی‌گردد و با سرعتی به‌همان اندازهٔ سرعت اولیه ولی در خلاف جهت آن حرکت می‌کند. حرکت توپ یک‌بعدی است. در مورد اجسام واجهندهٔ واقعی، نقطهٔ تیز در $x(t)$ به‌این تیزی نیست.



شکل۶. یک گلوله خمیر را به بالا پرتاب می‌کنیم؛ گلوله تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، سپس برمی‌گردد و به زمین می‌افتد، و به محض برخورد به زمین ساکن می‌شود. این منحنی حرکت گلوله را توصیف می‌کند. درحرکت واقعی، نقطهٔ تیز در $x(t)$ کمی گرد است.

اولیهٔ گلوله‌ای است که به طرف بالا پرتاب شده است. سرعت در اوج مسیر (که در آنجا شیب صفر است) به‌صفر می‌رسد و پس از آن خمیر به طرف پایین حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن دائماً بیشتر می‌شود. هنگامی که خمیر به زمین می‌خورد، آناً به حالت سکون در می‌آید و سرعت آن صفر می‌شود.

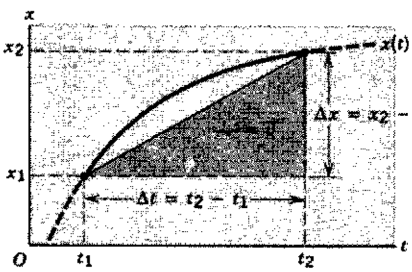
توجه داشته باشید که نمودارهای این بخش اگرچه حرکت را نمایش می‌دهند اما نشان‌دهندهٔ شکل مسیری نیستند که ذرات واقعاً می‌پیمایند. مثلاً در شکل ۶، ذره فقط روی یک خط به بالا و پایین حرکت می‌کند و مسیر آن شبیه به منحنی این شکل نیست.

۲ـ۳ سرعت متوسط

اگر حرکت ذره با نمودارهایی از نوع شکل ۱ یا ۲ توصیف شود، سرعت را می‌توانیم به سادگی در هر بازهٔ زمانی‌ای به‌دست بیاوریم: سرعت ثابت، و برابر با شیب خط است. در موارد پیچیده‌تر، مثل شکلهای ۳ تا ۶، که سرعت تغییر می‌کند، بهتر است که سرعت متوسط $(\overline{v})$ را تعریف کنیم. (پاره‌خط روی نماد هر کمیت فیزیکی برای نشان دادن متوسط آن کمیت است.)

در شکل ۷ ذره در زمان $t_۱$ در نقطهٔ $x_۱$ است، و درزمان $t_۲$ به نقطهٔ $x_۲$ می‌رسد. سرعت متوسط ذره در این بازهٔ زمانی، طبق تعریف، برابر است با

$$\overline{v} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۵)$$



شکل۷. سرعت متوسط در بازهٔ Δt بین $t_۱$ و $t_۲$ از روی جابه‌جایی Δx در این بازه به‌دست می‌آید، شکل واقعی منحنی $x(t)$ در این بازه، درتعیین سرعت متوسط نقشی ندارد.

که در آن

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \qquad (۶)$$

و

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ \qquad (۷)$$

Δx جابه‌جایی (یعنی تغییر در مکان ذره در بازهٔ زمانی Δt است). از شکل ۷ می‌بینیم که $\overline{v}$ صرفاً همان شیب خط راستی است که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند.

سرعت متوسط معرف رفتار متوسط در بازهٔ زمانی Δt است. رفتار واقعی ذره بین $x_۱$ و $x_۲$ برای محاسبهٔ سرعت متوسط اهمیتی ندارد. با متوسط‌گیری در واقع جزئیات حرکت بین $x_۱$ و $x_۲$ حذف می‌شود.

اگر فرض کنیم که ساعتها همیشه به جلو حرکت می‌کنند ($t_۲ > t_۱$)، علامت $\overline{v}$ را علامت $\Delta x = x_۲ - x_۱$ تعیین می‌کند. اگر $\overline{v}$ مثبت باشد، حرکت ذره به‌طور متوسط چنان است که x با افزایش زمان زیاد می‌شود. (ممکن است ذره در ناحیه‌ای از این بازه به عقب هم برگردد. اما به هر حال مختصهٔ x آن در انتهای بازه، بزرگتر از همین مختصه‌اش در ابتدای بازه است.) اگر $\overline{v}$ منفی باشد، ذره به‌طور متوسط رو به عقب حرکت می‌کند. به‌خصوص توجه کنید که طبق تعریف $\overline{v}$، در هر حرکتی که نقطهٔ انتهایی و ابتدایی یکی باشد، سرعت متوسط صفر است؛ فرقی هم نمی‌کند که قطعهٔ خاصی در بازهٔ مورد نظر، چقدر سریع طی شده باشد، زیرا جابه‌جایی صفر است. در مسابقات اتومبیلرانی‌ای که مسیر آنها بسته است، اگر بازهٔ زمانی را از ابتدا تا انتهای مسابقه بگیریم، سرعت متوسط صفر است!

مثال ۱. دارید اتومبیل خود را در یک جادهٔ مستقیم می‌رانید. سرعت اتومبیل ۴۳mi/h است و با این سرعت ۵٫۲mi را می‌پیمایید. اینجا بنزین اتومبیلتان تمام می‌شود و شما ناچار می‌شوید ۱٫۲mi دیگر تا نزدیکترین پمپ بنزین پیاده بروید. زمان این پیاده‌روی ۲۷min است. سرعت متوسط شما، از زمانی که اتومبیل به‌راه افتاد تا زمانی که به پمپ بنزین رسیدید، چقدر است؟

حل: برای اینکه سرعت متوسط را از معادلهٔ ۵ به‌دست بیاورید باید Δx یعنی کل مسافتی را که پیموده‌اید (جابه‌جایی شما)، و Δt یعنی زمان سپری شده را بدانید. این دو کمیت عبارت‌اند از

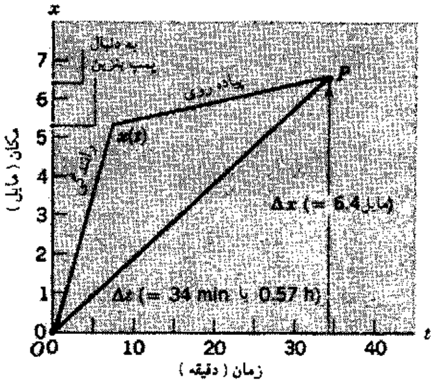
$$\Delta x = ۵٫۲\text{mi} + ۱٫۲\text{mi} = ۶٫۴\text{mi}$$

و

$$\Delta t = \frac{۵٫۲\text{mi}}{۴۳\text{mi/h}} + ۲۷\text{min} = ۷٫۳\text{min} + ۲۷\text{min} = ۳۴\text{min} = ۰٫۵۷\text{h}$$

بنابراین، از معادلهٔ ۵، نتیجه می‌شود که

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶٫۴\text{mi}}{۰٫۵۷\text{h}} = ۱۱٫۲\text{mi/h}$$



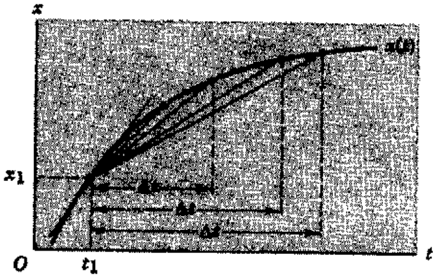
شکل۸. مثال ۱. خطهایی که با "رانندگی" و "پیاده‌روی" مشخص شده‌اند، حرکت با سرعتهای ثابت متفاوت با هم را، در دو بخش سفر، نشان می‌دهند. سرعت متوسط، شیب خط OP است.

نمودار $x(t)$ در شکل ۸، به‌تصور مسئله کمک می‌کند. نقاط O و P بازه‌ای را مشخص می‌کنند که می‌خواهیم سرعت متوسط را در آن به‌دست بیاوریم. این کمیت، شیب خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

۲ـ۴ سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط برای بررسی رفتار کلی ذره در یک بازه مفید است، اما برای بررسی جزئیات حرکت کافی نیست. مناسب‌تر آن است که یک تابع ریاضی، $v(t)$، داشته باشیم که سرعت ذره را در هر زمان دلخواه به‌دست بدهد. این تابع، سرعت لحظه‌ای است؛ از این به بعد، همه جا منظورمان از "سرعت" همین سرعت لحظه‌ای است.

اگر سرعت متوسط را برای Δtهایی که دائماً کوچکتر می‌شوند حساب کنیم (شکل ۹)، در حالت حدی $\Delta t \to ۰$، خطی که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند به مماس بر منحنی $x(t)$ در آن نقطه میل می‌کند و سرعت متوسط نیز به سرعت لحظه‌ای در آن نقطه



شکل۹. بازهٔ Δt را دائما کوچک می‌کنیم. در این مورد، $t_۱$ را ثابت نگه داشته‌ایم و سر دیگر بازه، $t_۲$، را به $t_۱$ نزدیک می‌کنیم. در حد، بازه به صفر میل می‌کند و وتر، مماس می‌شود.

جدول ۱. فرایند حدگیری

نقطهٔ ابتدایی $x_۱(\mathrm{m})$	نقطهٔ ابتدایی $t_۱(\mathrm{s})$	نقطهٔ پایانی $x_۲(\mathrm{m})$	نقطهٔ پایانی $t_۲(\mathrm{s})$	بازه‌ها $\Delta x(\mathrm{m})$	بازه‌ها $\Delta t(\mathrm{s})$	سرعت متوسط $(\mathrm{m/s})$
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱۳٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	۷٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۷٫۰۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۹٫۰۰۰	۱٫۵۰۰	۳٫۰۰۰	۰٫۵۰۰	۶٫۰۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۸٫۳۲۰	۱٫۴۰۰	۲٫۳۲۰	۰٫۴۰۰	۵٫۸۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۷٫۳۷۵	۱٫۲۵۰	۱٫۳۷۵	۰٫۲۵۰	۵٫۵۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۷٫۰۸۰	۱٫۲۰۰	۱٫۰۸۰	۰٫۲۰۰	۵٫۴۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۵۲۰	۱٫۱۰۰	۰٫۵۲۰	۰٫۱۰۰	۵٫۲۰
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۲۵۵	۱٫۰۵۰	۰٫۲۵۵	۰٫۰۵۰	۵٫۱
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۱۵۲	۱٫۰۳۰	۰٫۱۵۲	۰٫۰۳۰	۵٫۱
۶٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۵۰	۱٫۰۱۰	۰٫۰۵۰	۰٫۰۱۰	۵٫۰

تبدیل می‌شود.

$$v = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۸)$$

طرف راست معادلهٔ ۸ در واقع مشتق $x(t)$ نسبت به t، یا همان dx/dt است. پس

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (۹)$$

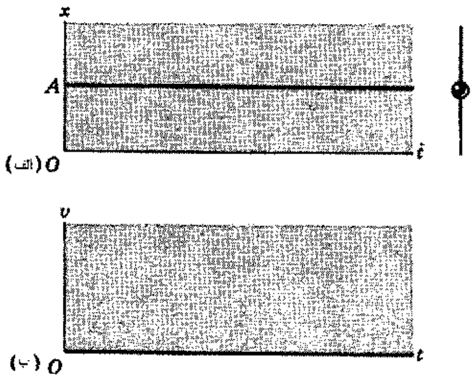
سرعت (لحظه‌ای) صرفاً آهنگ تغییر مکان نسبت به زمان است.

جدول ۱ مثالی است از این فرایند حدگیری، و نشان می‌دهد که چگونه مقدار متوسط به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند. داده‌های جدول ۱ را با استفاده از تابع $x(t) = ۳٫۰۰۰ + ۱٫۰۰۰t + ۲٫۰۰۰t^۲$ محاسبه کرده‌ایم (t برحسب s و x برحسب متر است). نقطهٔ $(t_۱, x_۱)$ را ثابت گرفته‌ایم و نقطهٔ $(t_۲, x_۲)$ را به‌تدریج به $(t_۱, x_۱)$ نزدیکتر کرده‌ایم تا فرایند حدگیری را شبیه‌سازی کنیم. به‌نظر می‌رسد که حد سرعت متوسط در $t_۱ = ۱٫۰\,\mathrm{s}$ به $v = ۵٫۰\,\mathrm{m/s}$ میل کند؛ با مشتق‌گیری از تابع $x(t)$ عبارتی برای سرعت لحظه‌ای به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(۳٫۰۰۰ + ۱٫۰۰۰t + ۲٫۰۰۰t^۲) \\ &= ۰ + ۱٫۰۰۰ + ۲(۲٫۰۰۰t) = ۱٫۰۰۰ + ۴٫۰۰۰t \end{aligned}$$

این تابع هم به‌ازای $t = ۱٫۰۰۰\,\mathrm{s}$، همان مقدار $۵٫۰۰۰\,\mathrm{m/s}$ را می‌دهد. پس معلوم است که با کوچک شدن بازه، مقدار متوسط واقعاً به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند.

بنابراین، اگر $x(t)$ را بدانیم، می‌توانیم $v(t)$ را با مشتق‌گیری به‌دست بیاوریم. در روش نموداری هم می‌توان شیب (نقاط مختلف) را به‌دست آورد و به کمک آن $v(t)$ را رسم کرد. حالا می‌خواهیم مثالهای بخش ۲ـ۲ را مرور کنیم. سه مثال اول، در مورد همان مهره‌ای است که روی یک سیم راست طویل می‌لغزد.



شکل ۱۰. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در نقطه‌ای از سیم، $x = A$، در حالت سکون است.

۱. سکون. از معادلهٔ ۱ داریم $x(t) = A$، پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = ۰ \qquad (۱۰)$$

چون مشتق هر کمیت ثابتی صفر است. شکل ۱۰، $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

۲. حرکت با سرعت ثابت. از معادلهٔ ۲ داریم $x(t) = A + Bt$، پس

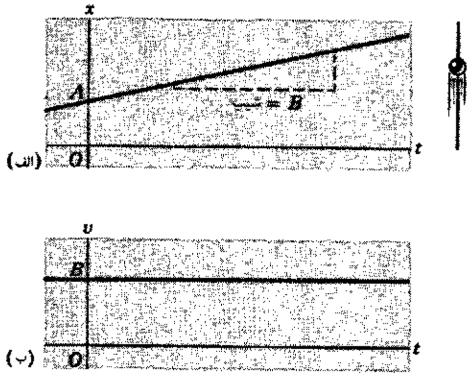
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = ۰ + B \qquad (۱۱)$$

سرعت لحظه‌ای (ثابت) B است؛ (شکل ۱۱).

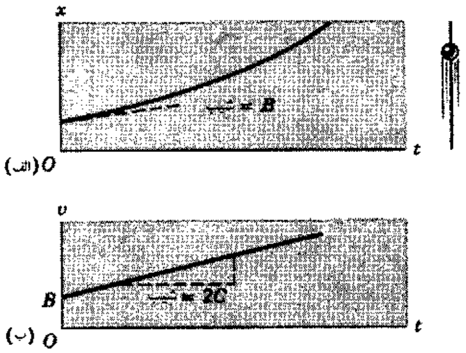
۳. حرکت شتابدار. با استفاده از معادلهٔ ۳، $x(t) = A + Bt + Ct^۲$، نتیجه می‌شود که

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^۲) = ۰ + B + ۲Ct \qquad (۱۲)$$

سرعت با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ اگر $C > ۰$ باشد، سرعت زیاد می‌شود. شکل ۱۲ منحنیهای $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل۱۱. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت روی سیمی می‌لغزد. سرعت برابر با شیب نمودار $x(t)$ یعنی B است. نمودار $v(t)$ همان خط افقی $v = B$ است.

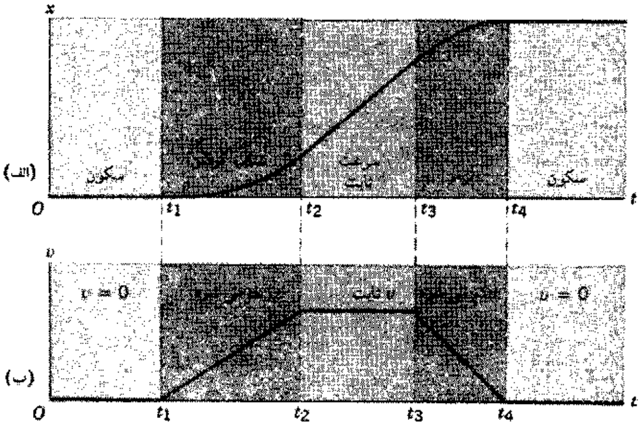


شکل۱۲. (الف) مکان و (ب) سرعت مهرهٔ شتابدار، که در یک بعد روی سیم می‌لغزد. از شیب فزایندهٔ $x(t)$، و همچنین از افزایش خطی $v(t)$ معلوم است که سرعت با گذشت زمان زیاد می‌شود.

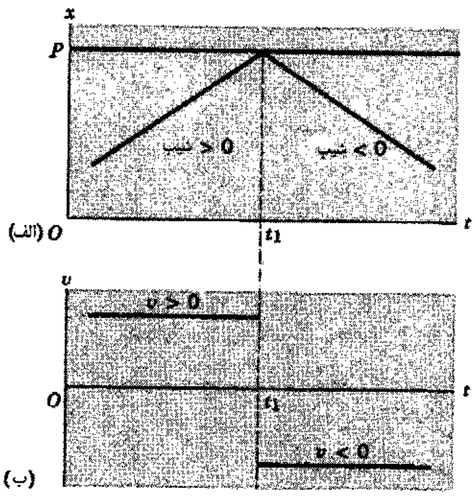
۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. منحنی $v(t)$ را می‌شود از روش شکل ۴، وبدون نوشتن $x(t)$، به‌دست آورد. در بازهٔ اول، اتومبیل در حال سکون و $v = 0$ است. در بازهٔ بعدی، اتومبیل شتاب می‌گیرد و $v(t)$ به شکل معادلهٔ ۱۲ است. در بازه‌ای که سرعت اتومبیل تغییر نمی‌کند، v مقدار ثابتی است (برابر با سرعت در پایان بازه‌ای که اتومبیل شتاب دارد) و بنابراین، در این بازه C صفر است. سرانجام، در مرحلهٔ ترمزگرفتن، $v(t)$ باز هم به شکل معادلهٔ ۱۲ است، اما در این مورد با $C < 0$ (شیب منفی). شکل ۱۳ نمودار این حرکت را نشان می‌دهد.

در عمل، نمی‌شود آناً از حالت سکون به حالت حرکت شتابدار، یا از حالت حرکت شتابدار به حالت حرکت یکنواخت (با سرعت ثابت) رسید. یعنی در شکل ۱۳، نقاط تیز منحنی $v(t)$ را باید برای اتومبیلهای واقعی کمی گرد کرد، و معادلهٔ حرکت هم پیچیده‌تر از معادلهٔ ۱۲ می‌شود. اینجا هم برای سادگی فرض کرده‌ایم که رفتار اتومبیل، همان رفتار ایده‌آلی است که در شکل ۱۳ می‌بینیم.

۵. گوی هاکی که به مانع برمی‌خورد و برمی‌گردد. گوی پیش از برخورد سرعت ثابتی دارد و پس از برخورد همان سرعت ثابت را دارد



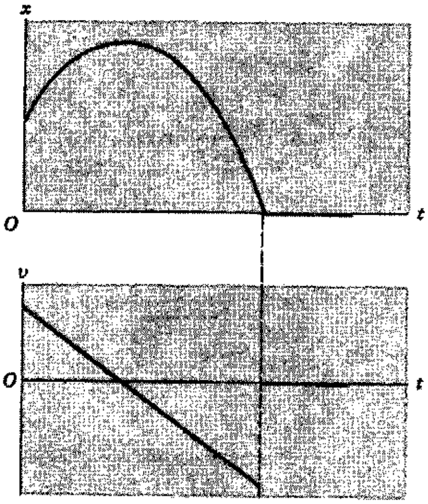
شکل۱۳. (الف) مکان و (ب) سرعت اتومبیلی که از حالت سکون شروع می‌کند، برای مدتی سرعتش زیاد می‌شود، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و آن وقت سرعتش کم می‌شود تا دوباره به حالت سکون برسد. نمودار پایین $v(t)$ را نشان می‌دهدکه دقیقاً متناظر با نمودار $x(t)$ در بالا (و نمودار شکل ۴) است. برای اتومبیلهای واقعی، تغییر سرعت باید هموار باشد نه ناگهانی، بنابراین نقاط تیز نمودار $v(t)$ گرد می‌شود.



شکل۱۴. (الف) مکان و (ب) سرعت یک "گوی" هاکی که به سطحی سخت برمی‌خورد و از آن وامی‌جهد. در این نمودار ایده‌آل، در $t = t_1$ علامت سرعت ناگهانی عوض می‌شود، اما برای گوی واقعی، تغییر سرعت در بازه‌ای کوچک (ولی غیر صفر) انجام می‌شود و نقطهٔ تیز نمودار $x(t)$ هم گرد می‌شود.

ولی درجهت مخالف (سرعت منفی) بازمی‌گردد. شکل ۱۴، $v(t)$ را نشان می‌دهد. دقت کنید که "نقطهٔ تیز" نمودار $x(t)$، موجب ناپیوستگی در نمودار $v(t)$ می‌شود. هیچ‌یک از این دو در واقعیت اتفاق نمی‌افتد.

۶. گلولهٔ خمیری چسبنده. در این مورد، شکل ۱۵، v اولیهٔ توپ مثبت است (جهت رو به‌بالا را مثبت اختیار کرده‌ایم)، اما به‌تدریج کم می‌شود. حرکت با معادله‌ای شبیه به معادلهٔ ۱۲، اما با $C < 0$، توصیف می‌شود. در نقطهٔ اوج، $v = 0$ است، پس در این نقطه،



شکل۱۵. (الف) مکان و (ب) سرعت یک گلوله خمیر که به روش شکل ۶، به بالا پرتاب می‌شود. در دنیای واقعی، سرعت نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک مقدار غیر صفر به صفر برسد، "پرش" قائم در نمودار $v(t)$ (در زمانی که گلوله به زمین می‌خورد) هم باید تدریجی‌تر باشد.

خط $v(t)$ محور را قطع می‌کند. هنگامی که خمیر به زمین می‌چسبد، v آناً صفر می‌شود. (باز هم "نقطه‌ای تیز" در نمودار $x(t)$ که در $v(t)$ ناپیوستگی ایجاد می‌کند؛ در واقع امر، این نقطه گرد می‌شود و ناپیوستگی‌ای هم در کار نیست.)

۲ـ۵ حرکت شتابدار

دیدیم (شکلهای ۱۲، ۱۳، و ۱۵) که در طی حرکت، سرعت ذره می‌تواند با زمان تغییر کند، تغییر سرعت در زمان را شتاب می‌نامند. مشابه با معادلهٔ ۵ می‌توان شتاب متوسط را از روی تغییر سرعت، $\Delta v = v_۲ - v_۱$، در بازهٔ زمانی Δt حساب کرد:

$$\overline{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۱۳)$$

یکای شتاب، سرعت بر زمان است، مثلاً متر بر ثانیه بر ثانیه، m/s^2.

از شتاب متوسط $\overline{a}$ هم، درست مثل سرعت متوسط $\overline{v}$، نمی‌توان تغییر $v(t)$ را در زمانهای مختلف بازهٔ Δt به‌دست آورد؛ $\overline{a}$ تنها به تفاضل سرعت در انتها و ابتدای بازه بستگی دارد. اگر $\overline{a}$ برای همهٔ چنین بازه‌هایی ثابت (منجمله صفر) باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که شتاب ثابت است. در این صورت، تغییر سرعت در همهٔ بازه‌هایی که مدتِ برابر دارند یکی است.مثلاً، چنانکه بعداً در همین فصل خواهیم دید، شتاب ناشی از ثقل زمین، در نزدیکی سطح آن تقریباً ثابت و برابر با $۹٫۸ m/s^2$ است. سرعت اجسام افتان، هر ثانیه $۹٫۸ m/s$ تغییر می‌کند؛ در ثانیه اول $۹٫۸ m/s$ زیاد می‌شود، در ثانیه بعد $۹٫۸ m/s$ دیگر، و به همین ترتیب.

اگر تغییر سرعت در بازه‌های یکسان متوالی یکی نباشد، شتاب متغیر است. در این مورد بهتر است که شتاب لحظه‌ای تعریف کنیم:

$$a = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

یا

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (۱۴)$$

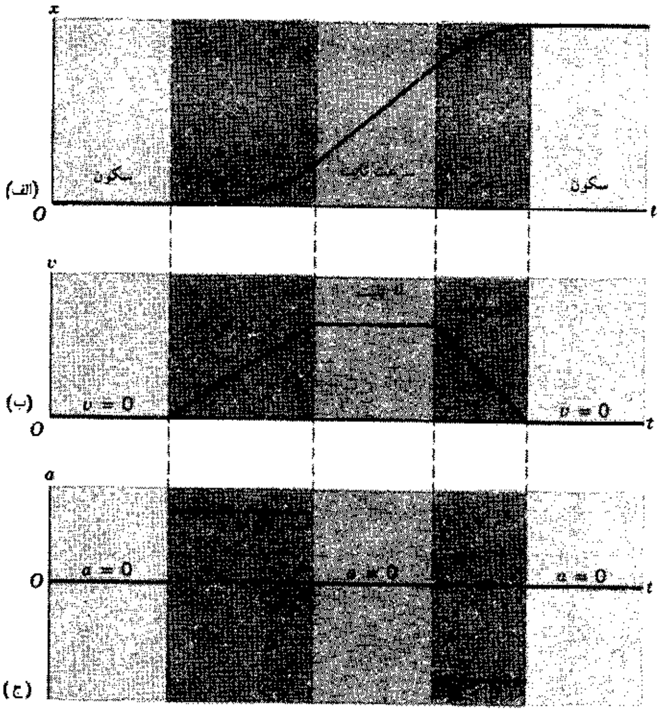
این تعریف، مشابه معادلهٔ ۹ برای سرعت لحظه‌ای است.

دقت کنید که مثبت و منفی بودن شتاب به مثبت و منفی بودن v ربطی ندارد. مثلاً ممکن است که a مثبت و v منفی باشد: شتاب، a، تغییر سرعت را می‌دهد؛ این تغییر، چه سرعت مثبت باشد چه منفی، می‌تواند افزایش یا کاهش باشد. مثلاً آسانسوری را در نظر بگیرید که به طرف بالا (که آن‌را جهت مثبت سرعت می‌گیریم). حرکت می‌کند. این آسانسور می‌تواند به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > ۰$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < ۰$) و حرکتش کند شود (اما همچنان به طرف بالا باشد). آسانسوری که به طرف پایین حرکت می‌کند هم می‌تواند به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < ۰$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > ۰$) و حرکتش کند شود. وقتی شتاب و سرعت در جهتهای مخالف باشند، یعنی مقدار سرعت در حال کاهش باشد، می‌گوییم که ذره شتابِ‌کاهنده دارد.

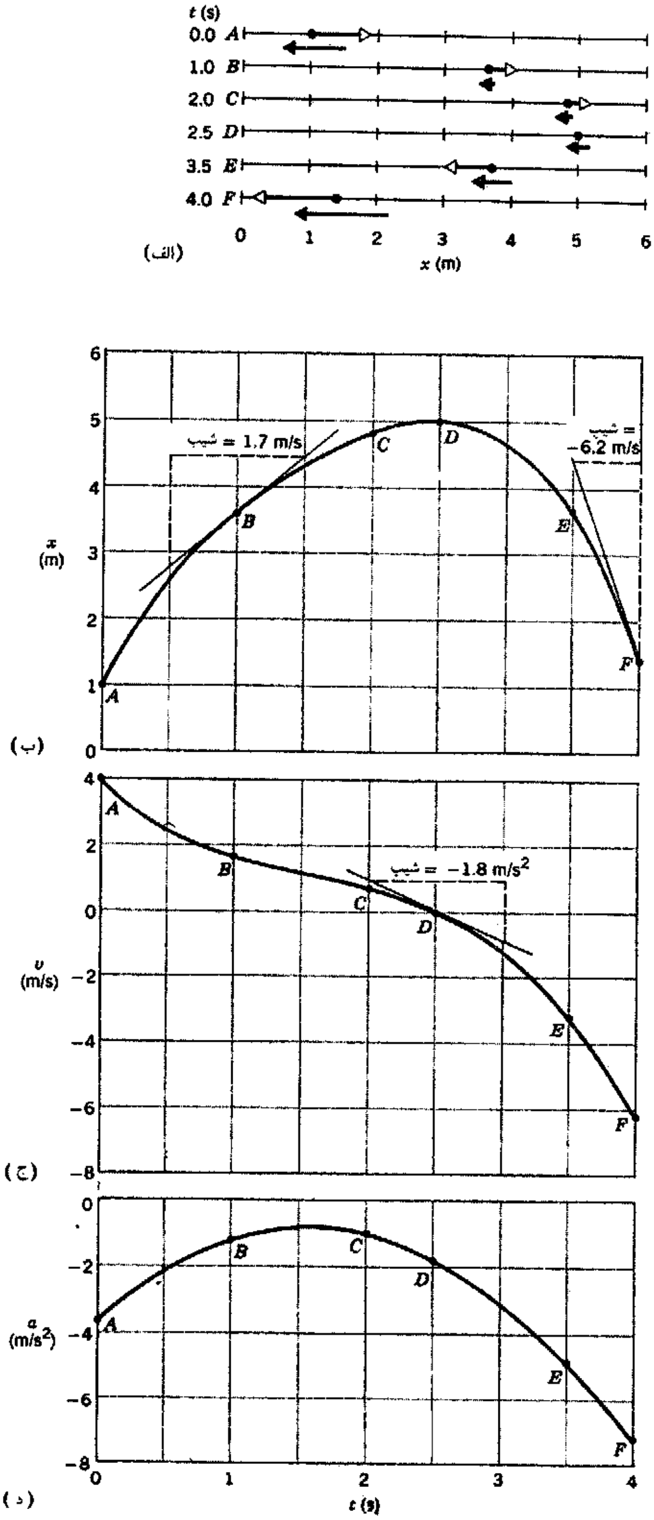
شتاب (معادلهٔ ۱۴) همان شیب نمودار $v(t)$ است. اگر $v(t)$ ثابت باشد، $a = ۰$ است؛ اگر $v(t)$ خطِ راست باشد، a ثابت و برابر با شیب خط است. اگر $v(t)$ منحنی باشد، a هم تابعی از t خواهد بود که با مشتق‌گیری از $v(t)$ به‌دست می‌آید.

اکنون می‌توانیم شتاب را هم در نمودارهای شکل ۱۰ تا شکل ۱۵ وارد کنیم. برای مثال، نمودارهای مربوط به اتومبیلی را که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند در شکل ۱۶ آورده‌ایم. بقیهٔ موارد را، به عنوان تمرین، به خواننده وامی‌گذاریم.

مثال ۲. شکل ۱۷الف، شش "عکس لحظه‌ای" از ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. در $t = ۰$، ذره در نقطهٔ $x = +۱٫۰۰ m$ در طرف راست مبدأ است؛ در $t = ۲٫۵ s$، ذره در $x = +۵٫۰۰ m$ در حال سکون است؛ در $t = ۴٫۰ s$، به $x = ۱٫۴ m$ برگشته است. شکل ۱۷ب نمودار مکان x برحسب زمان t است. شکلهای ۱۷ج و ۱۷د هم به ترتیب سرعت و شتاب ذره را نشان می‌دهند. (الف) سرعت متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. (ب) شیب $x(t)$ را در نقاط B و F تخمین بزنید و با نقاط متناظر روی منحنی $v(t)$ مقایسه کنید. (ج) شتاب متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. (د) شیب $v(t)$ را در نقطهٔ D تخمین بزنید و با مقدار $a(t)$ متناظر آن مقایسه کنید.



شکل۱۶. (الف) مکان و (ب) سرعت، و (ج) شتاب اتومبیلی که از حالت سکون به راه می‌افتد، برای مدتی شتاب می‌گیرد، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سپس ترمز می‌کند و شتاب منفی می‌گیرد تا دوباره به حالت سکون برسد. در واقع نمی‌توان شتاب اتومبیل را به‌طور ناگهانی از مقداری به مقداری دیگر تغییرداد؛ هم $a(t)$ و $v(t)$ برای اتومبیلهای واقعی همواره پیوسته‌اند؛ منحنیهای هموارِی بخشهای تختِ $a(t)$ را به هم وصل می‌کنند و نقاط تیز $v(t)$ گرد می‌شوند.



شکل۱۷. (الف) شش "عکس لحظه‌ای" متوالی از ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند. پیکان روی ذره سرعت لحظه‌ای، و پیکان زیر ذره شتاب لحظه‌ای آن‌را نشان می‌دهد. (ب) نمودار $x(t)$ برای حرکت ذره. شش نقطهٔ A تا F متناظر با شش تصویر لحظه‌ای‌اند. (ج) نمودار $v(t)$. (د) نمودار $a(t)$.

حل: (الف) از معادلهٔ ۵

$$\bar{v}_{AD} = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{۵٫۰\,\text{m} - ۱٫۰\,\text{m}}{۲٫۵\text{s} - ۰٫۰\text{s}}$$

$$= \frac{۴٫۰\,\text{m}}{۲٫۵\text{s}} = +۱٫۶\text{m/s}$$

$$\bar{v}_{DF} = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{۱٫۴\text{m} - ۵٫۰\,\text{m}}{۴٫۰\text{s} - ۲٫۵\text{s}}$$

$$= \frac{-۳٫۶\text{m}}{۱٫۵\text{s}} = -۲٫۴\text{m/s}$$

علامت مثبت $\bar{v}_{AD}$ نشان می‌دهد که ذره در بازهٔ AD، به‌طور متوسط، در جهت افزایش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف راست در شکل ۱۷الف). علامت منفی $\bar{v}_{DF}$ نشان می‌دهد که ذره در بازهٔ DF، به‌طور متوسط، در جهت کاهش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف چپ در شکل ۱۷الف).

(ب) از مماسهای منحنی $x(t)$ در نقاط B و E در شکل ۱۷ب

می‌شود این کمیتها را براورد کرد:

$$\text{نقطهٔ } B\text{:}\quad \text{شیب} = \frac{۴٫۵\text{m} - ۲٫۸\text{m}}{۱٫۵\text{s} - ۰٫۵\text{s}} = \frac{۱٫۷\text{m}}{۱٫۰\text{s}} = +۱٫۷\text{m/s}$$

$$\text{نقطهٔ } F\text{:}\quad \text{شیب} = \frac{۱٫۴\text{m} - ۴٫۵\text{m}}{۴٫۰\text{s} - ۳٫۵\text{s}} = \frac{-۳٫۱\text{m}}{۰٫۵\text{s}} = -۶٫۲\text{m/s}$$

از منحنی $v(t)$ در نقاط B و F در شکل ۱۷ج هم $v_B = +۱٫۷\text{m/s}$ و $v_F = -۶٫۲\text{m/s}$ براورد می‌شود، که با شیب $x(t)$ سازگار است. همان‌طور که انتظار می‌رود، $v(t) = dx/dt$ است.

(ج) از معادلهٔ ۱۳،

$$\bar{a}_{AD} = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{۰٫۰\text{m/s} - ۴٫۰\text{m/s}}{۲٫۵\text{s} - ۰٫۰\text{s}}$$

$$= \frac{-۴٫۰\text{m/s}}{۲٫۵\text{s}} = +۱٫۶\text{m/s}^۲$$

$$\bar{a}_{AF} = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-۶٫۲\text{m/s} - ۴٫۰\text{m/s}}{۴٫۰\text{s} - ۰٫۰\text{s}}$$

$$= \frac{-۱۰٫۲\text{m/s}}{۴٫۰\text{s}} = -۲٫۶\text{m/s}^۲$$

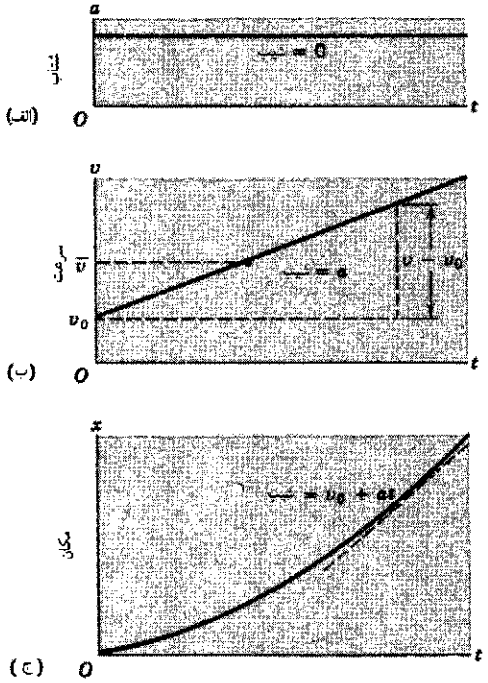
(د) از خط مماس بر $v(t)$ در نقطهٔ D این کمیت را تخمین می‌زنیم.

$$\text{شیب} = \frac{-۰٫۹\text{m/s} - ۰٫۹\text{m/s}}{۳٫۰\text{s} - ۲٫۰\text{s}} = \frac{-۱٫۸\text{m/s}}{۱٫۰\text{s}}$$
$$= -۱٫۸\text{m/s}^۲$$

در نقطهٔ D نمودار $a(t)$، دیده می‌شود که $a_D = -۱٫۸\text{m/s}^۲$. بنابراین، $a = dv/dt$. از نمودار $v(t)$ شکل ۱۷ج، معلوم می‌شود که شیب $v(t)$ همواره منفی است. پس $a(t)$ هم باید منفی باشد. شکل ۱۷د، هم همین را نشان می‌دهد.

۲ـ۶ حرکت با شتاب ثابت

موارد حرکت با شتاب ثابت (یا تقریباً ثابت) کم نیست: دو نمونه‌ای که تا به حال دیده‌ایم، یکی سقوط اجسام در نزدیکی سطح زمین و دیگری حرکت اتومبیلی است که ترمز کرده است. در این بخش، چند نتیجهٔ مفید برای این حالت خاص به‌دست می‌آوریم. اما به‌خاطر داشته باشید که این حالت، خاص است. نتایج این بخش را نمی‌شود در مواردی که a ثابت نیست به‌کار برد. از نمونه‌های حرکت با شتاب متغیر، می‌توان از حرکت وزنهٔ آونگ، حرکت موشکی که به طرف مدارش به دور زمین پرتاب می‌شود، و حرکت قطرهٔ بارانی که در هوا (در معرضِ مقاومت هوا) سقوط می‌کند نام برد.



شکل ۱۸. (الف) شتاب ثابت ذره، برابر با شیب (ثابت) $v(t)$. (ب) سرعت ذره $v(t)$، که در هر نقطه برابر با شیب منحنی $x(t)$ است. سرعت متوسط $\bar{v}$ هم، که در حالت شتاب ثابت برابر با میانگین v و $v_۰$ است، در شکل مشخص شده است. (ج) مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مکان اولیهٔ ذره $x_۰ = ۰$ فرض شده است.

فرض کنید که شتاب ثابت حرکت، a باشد (شکل ۱۸الف). (وقتی a ثابت است، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای با هم برابرند، و فرمولهایی را که برای این دو به‌دست آوردیم می‌شود در هر دو مورد به‌کار برد.) جسمی درزمان $t = ۰$، با سرعت $v_۰$ حرکت می‌کند و درزمان بعدی t سرعت آن به v می‌رسد. معادلهٔ ۱۳، برای این بازه، به شکل زیر در می‌آید:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_۰}{t - ۰}$$

یا

$$v = v_۰ + at \tag{۱۵}$$

به کمک این نتیجهٔ مهم، می‌توان سرعت را در همهٔ زمانهای بعدی به‌دست آورد. معادلهٔ ۱۵، سرعت را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد. این تابع را می‌شود با $v(t)$ نشان داد، اما ما معمولاً آن‌را با همان v نشان می‌دهیم. دقت کنید که معادلهٔ ۱۵ به شکل $y = mx + b$ است، که یک خط راست را توصیف می‌کند. a، چنانکه قبلاً هم توضیح داده‌ایم، شیب است و $v_۰$ محل تقاطع خط با محور سرعت (مقدار v در $t = ۰$) است. شکل ۱۸ب این خط راست را نشان می‌دهد.

برای کامل کردن تحلیل سینماتیک شتاب ثابت، باید بستگی مکان به زمان را به دست بیاوریم. برای این منظور، به رابطه‌ای برای سرعت

جدول ۲. معادلات حرکت با شتاب ثابت[۱].

شمارهٔ معادله	معادله	شامل x	v_0	v	a	t
۱۵	$v = v_0 + at$	×	√	√	√	√
۱۹	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	√	√	×	√	√
۲۰	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	√	√	√	√	×
۲۱	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	√	√	√	×	√
۲۲	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	√	×	√	√	√

۱. پیش از استفاده از معادلات این جدول باید مطمئن شوید که شتاب واقعاً ثابت است.

متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا t نیاز داریم. اگر نمودار v برحسب زمان خط راست باشد (شکل ۱۸ب)، مقدار متوسط v بهازای زمانِ وسط این بازه به‌دست می‌آید و برابر با میانگین سرعت در زمان ۰ و زمان t است:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) \qquad (16)$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۵ می‌شود v را حذف کرد:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at \qquad (17)$$

با استفاده از معادلهٔ ۵ (تعریف سرعت متوسط)، و با فرض اینکه ذره در زمان ۰ در نقطهٔ x_0 و درزمان t در نقطهٔ x است، سرعت متوسط را می‌توان چنین نوشت

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} \qquad (18)$$

از ترکیب معادلات ۱۷ و ۱۸، این نتیجه برای $x(t)$ به‌دست می‌آید:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (19)$$

پس اگر a، و شرایط اولیه x_0 و v_0 (مکان و سرعت در $t = 0$) معلوم باشد، با استفاده از معادلهٔ ۱۹ می‌توانیم مکان x را در هر زمان بعدی به‌دست بیاوریم. هدف تحلیل سینماتیکی ما هم همین است. مسافت خالص پیموده شده از نقطهٔ شروع، $x - x_0$، را جابه‌جایی می‌نامند. اغلب، برای سادگی، مبدأ مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_0 = 0$ باشد. شکل ۱۸ج نمودار x برحسب t را برای شتاب ثابت نشان می‌دهد.

دقت کنید که چهار متغیر (x, v, a, t) و دو شرط اولیه (x_0, v_0) داریم. معادلات ۱۵ و ۱۹ به‌همین شکل برای تحلیل سینماتیک مسئله، به عنوان مسئلهٔ مقدار اولیه، به‌کار می‌روند: با داشتن شرایط فیزیکی (یعنی شتاب a) و شرایط اولیه (x_0 و v_0)، می‌توان v و x را در هر زمانی به‌دست آورد. اما در خیلی از موارد، مسئله به صورت متفاوتی مطرح می‌شود: مثلاً با معلوم بودن a ذره چه مسافتی (و نه چه مدتی) باید حرکت کند تا سرعت آن از v_0 به v برسد؟ در این موارد زمان ظاهر نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم متغیر ناخواستهٔ t را از بین معادلات ۱۵ و ۱۹ حذف کنیم:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (20)$$

از حذف کردن متغیرها یا پارامترهای دیگر، معادلات ۲۱ و ۲۲ حاصل می‌شوند. با این معادلات، که در جدول ۲ آمده‌اند، مجموعهٔ معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت کامل می‌شود.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۱۹، می‌توان دید که این معادله یک نتیجهٔ درست سینماتیکی است (مشتق این معادله، باید سرعت باشد):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at = v$$

و این همان عبارتی است که قبلاً برای سرعت به‌دست آوردیم.

در استفاده از معادلات جدول ۲ برای حل مسائل، مبدأ دستگاه مختصات را می‌توانید هر نقطه‌ای که راحت‌تر است بگیرید. چهار تا از معادلات جدول ۲ به x بستگی دارند و در هر چهارمعادله x_0 هم ظاهر شده است. در واقع، هر چهار معادله به تفاضل $x - x_0$ بستگی دارند. معمولاً مبدأ را چنان می‌گیریم که $x_0 = 0$ شود. به این ترتیب، معادلات تا حدی ساده‌تر می‌شوند. هر یک از جهت‌های محور مختصات را می‌شود جهت مثبت گرفت. با انتخاب جهت مثبت، هر جابه‌جایی، سرعت، و شتابی اگر در آن جهت باشد مثبت، و اگر در خلاف آن جهت باشد منفی است. در همهٔ مراحل حل یک مسئلهٔ خاص، باید مبدأ و جهت محورهای مختصات ثابت بماند.

مثال ۳. رانندهای ترمز می‌کند و سرعت اتومبیلش را، در طی مسافت ۱۰۵m، از ۸۵km/h به ۴۵km/h می‌رساند. (الف) شتاب اتومبیل، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (ب) این حرکت شتابدار چقدر طول کشیده است؟ (ج) اگر راننده بخواهد اتومبیل را با همین شتاب متوقف کند، چه مدت زمان بیشتری برای این کار لازم است و در این مدت، اتومبیل چه مسافت اضافی‌ای را می‌پیماید؟

حل: (الف) جهت مثبت را همان جهت سرعت می‌گیریم. مبدأ را نیز چنان می‌گیریم که نقطهٔ آغاز ترمز کردن، $x_۰ = ۰$ باشد. سرعت اولیهٔ، $v_۰ = +۸۵\text{km/h}$ در $t = ۰$، و سرعت نهایی، $v = +۴۵\text{km/h}$ در زمان (مجهول) t، یعنی وقتی که اتومبیل $+۰٫۱۰۵\text{km}$ جابه‌جا شده، معلوم است. به معادله‌ای نیاز داریم که شامل شتاب (مجهول) باشد، اما شامل زمان نباشد. معادلهٔ ۲۰ چنین معادله‌ای است، که a را از آن به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲(x - x_۰)} = \frac{(۴۵\text{km/h})^۲ - (۸۵\text{km/h})^۲}{۲(۰٫۱۰۵\text{km})}$$
$$= -۲٫۴۸ \times ۱۰^۴\text{km/h}^۲ = -۱٫۹۱\text{m/s}^۲$$

این شتاب کاهنده است و علامتش منفی است، یعنی در خلاف جهتی است که آن‌را مثبت اختیار کرده‌ایم.

(ب) معادله‌ای می‌خواهیم که شتاب در آن نباشد تا بتوانیم زمان را از داده‌های اولیه به‌دست بیاوریم. از جدول ۲ مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ ۲۱ این ویژگی را دارد. از این معادله t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{۲(x - x_۰)}{v_۰ + v} = \frac{۲(۰٫۱۰۵\text{km})}{۸۵\text{km/h} + ۴۵\text{km/h}}$$
$$= ۱٫۶۲ \times ۱۰^{-۳}\text{h} = ۵٫۸\text{s}$$

در حل این قسمت، می‌توانستیم معادله‌ای به‌کار ببریم که شامل شتاب هم باشد اما در آن صورت خطایی که ممکن است در حل قسمت (الف) به‌وجود آمده باشد، در قسمت (ب) هم وارد می‌شد. توجه کنید که درحل قسمتهای مستقل یک مسئله، در صورت امکان، همیشه بهتر است که به داده‌های اولیه برگردیم و مسئله را مستقیماً با آنها حل کنیم.

(ج) حالا که شتاب معلوم است، زمانی را حساب می‌کنیم که در آن سرعت اتومبیل از $v_۰ = ۸۵\text{km/h}$ به $v = ۰$ می‌رسد. برای این کار معادلهٔ ۱۵ مناسب است، که از آن t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v - v_۰}{a} = \frac{۰ - ۸۵\text{km/h}}{-۲٫۴۸ \times ۱۰^۴\text{km/h}^۲}$$
$$= ۳٫۴۳ \times ۱۰^{-۳}\text{h} = ۱۲٫۳\text{s}$$

اتومبیل ۱۲٫۳s پس از ترمز، یا ۶٫۵s (یعنی ۵٫۸s − ۱۲٫۳s) پس از رسیدن به سرعت ۴۵km/h، متوقف می‌شود.

برای پیدا کردن مسافت، معادلهٔ ۲۰ را به‌کار می‌بریم:

$$x - x_۰ = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲a} = \frac{۰ - (۸۵\text{km/h})^۲}{۲(-۲٫۴۸ \times ۱۰^۴\text{km/h}^۲)}$$
$$= ۰٫۱۴۶\text{km} = ۱۴۶\text{m}$$

مسافت اضافی‌ای که اتومبیل می‌پیماید تا سرعتش از $v = ۴۵\text{km/h}$ به $v = ۰$ برسد برابر با $۱۴۶\text{m} - ۱۰۵\text{m}$ یعنی ۴۱m است.

مثال ۴. یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیم) در لوله‌ای راست و توخالی به طول ۲٫۰m حرکت می‌کند. این لوله بخشی از یک شتابدهندهٔ ذرات است. (الف) اگر ذره با سرعت $۱٫۰ \times ۱۰^۴\text{m/s}$ به لوله وارد و با سرعت $۵٫۰ \times ۱۰^۶\text{m/s}$ از آن خارج شود، شتاب ذره (که ثابت فرض می‌شود) چقدر است؟ (ب) ذره چه مدت در لوله است؟

حل: (الف) محور x را موازی با لوله، جهت مثبت را جهت حرکت ذره، و مبدأ را ورودی لوله می‌گیریم. $v_۰$، v، و x معلوم‌اند و a مجهول است. معادلهٔ ۲۰ را، با $x_۰ = ۰$، به‌کار می‌بریم:

$$a = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲x}$$
$$= \frac{(۵٫۰ \times ۱۰^۶\text{m/s})^۲ - (۱٫۰ \times ۱۰^۴\text{m/s})^۲}{۲(۲٫۰\text{m})}$$
$$= +۶٫۳ \times ۱۰^{۱۲}\text{m/s}^۲$$

(ب) از معادلهٔ ۲۱، با $x_۰ = ۰$، t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{۲x}{v_۰ + v} = \frac{۲(۲٫۰\text{m})}{۱٫۰ \times ۱۰^۴\text{m/s} + ۵٫۰ \times ۱۰^۶\text{m/s}}$$
$$= ۸٫۰ \times ۱۰^{-۷}\text{s} = ۰٫۸۰\mu\text{s}$$

۲ـ۷ سقوط آزاد اجسام

یکی از آشناترین نمونه‌های حرکت با شتاب (تقریباً) ثابت، حرکت جسمی است که به طرف زمین سقوط می‌کند. اجسامی را در نظر بگیرید که در خلأ سقوط می‌کنند، یعنی مقاومت هوا بر حرکت آنها مؤثر نیست. از بررسی حرکت این اجسام، به واقعیت جالبی می‌رسیم:

★ همهٔ اجسام، مستقل از اندازه، شکل، یا ترکیب‌شان، در نزدیکی سطح زمین با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، که آن‌را با g نشان می‌دهیم، شتاب سقوط آزاد (یا گاهی شتاب ناشی از گرانی) نامیده می‌شود. البته این شتاب به فاصلهٔ جسم افتان از مرکز زمین بستگی دارد (فصل ۱۶)، اما اگر مسافتِ سقوط در مقایسه با شعاع زمین (۶۴۰۰km) کوچک باشد، شتاب را می‌توان در مدت سقوط ثابت گرفت.

در نزدیکی سطح زمین، اندازهٔ g تقریباً $۹٫۸\text{m/s}^۲$ است. ما هم همه جای این کتاب همین مقدار را به‌کار می‌بریم، مگر آنکه صریحاً مقدار دقیق‌تری را ذکر کنیم. جهت شتاب سقوط آزاد در هرنقطه، جهت "پایین" را در آن نقطه مشخص می‌کند.

معمولاً از اجسام افتان صحبت می‌کنیم، اما به اجسامی که به طرف بالا حرکت می‌کنند هم همان شتاب سقوط آزاد (با همان اندازه و جهت) وارد می‌شود. یعنی سرعت ذره چه به طرف بالا باشد چه به طرف پایین، جهت شتاب آن، تحت تأثیر گرانش زمین، همیشه به طرف پایین است.

مقدار دقیق شتاب سقوط آزاد درهر نقطه تابع عرض جغرافیایی و ارتفاع آن نقطه از سطح زمین است. همچنین، یکسان نبودن چگالی نقاط مختلف پوستهٔ زمین هم باعث تفاوتهایی در شتاب سقوط آزاد در نقاط مختلف می‌شود که به هر حال قابل ملاحظه است. این اثرها را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.

معادلات جدول ۲ (برای شتاب ثابت) را می‌شود در مورد سقوط آزاد هم به‌کار برد. تنها چند تغییر کوچک اعمال می‌کنیم: (۱) راستای سقوط آزاد را با y مشخص می‌کنیم و جهت مثبت آن‌را رو به بالا می‌گیریم. بعداً، در فصل ۴، که حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم، مختصهٔ x را برای حرکت افقی به‌کار خواهیم برد. (۲) به‌جای شتاب ثابت a در جدول ۲، $-g$ می‌گذاریم، چون جهت مثبت y را رو به بالا گرفته‌ایم و شتاب در خلاف این جهت (منفی) است. توجه کنید که شتاب (رو به پایین) را $-g$ گرفته‌ایم، پس g عددی مثبت است.

با این تغییرات کوچک، معادلات جدول ۲ به‌این شکل در می‌آیند:

$$v = v_۰ - gt \qquad (۲۱)$$

$$y = y_۰ + v_۰ t - \frac{۱}{۲} g t^۲ \qquad (۲۲)$$

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲g(y - y_۰) \qquad (۲۳)$$

$$y = y_۰ + \frac{۱}{۲}(v_۰ + v)t \qquad (۲۴)$$

و

$$y = y_۰ + vt + \frac{۱}{۲} g t^۲ \qquad (۲۵)$$

مثال ۵. جسمی از حالت سکون شروع به سقوط آزاد می‌کند. مکان و سرعت جسم را پس از گذشت ۱٫۰s، ۲٫۰s، ۳٫۰s، و ۴٫۰s پیدا کنید.

حل: نقطهٔ شروع را مبدأ می‌گیریم. سرعت اولیه (صفر) و شتاب را می‌دانیم، و زمان هم معلوم است. برای یافتن مکان، معادلهٔ ۲۴ را با $y_۰ = ۰$ و $v_۰ = ۰$ به‌کار می‌بریم:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^۲$$

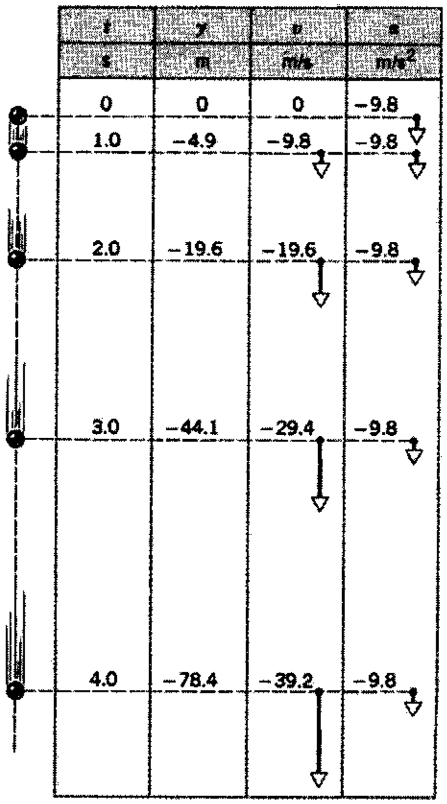
$t = ۱٫۰\text{s}$ را در معادله بالا قرار می‌دهیم

$$y = -\frac{۱}{۲}(۹٫۸\text{m/s}^۲)(۱٫۰\text{s})^۲ = -۴٫۹\text{m}$$

برای یافتن سرعت، معادلهٔ ۲۳ را، باز هم با $v_۰ = ۰$، به‌کار می‌بریم:

$$v = -gt = -(۹٫۸\text{m/s}^۲)(۱٫۰\text{s}) = -۹٫۸\text{m/s}$$

۱٫۰s پس از شروع سقوط، جسم ۴٫۹m زیر (y منفی است) نقطهٔ شروع است و با سرعت ۹٫۸m/s به طرف پایین (v منفی است) حرکت



شکل۱۹. مثال ۵. ارتفاع، سرعت، و شتاب جسمی که در حال سقوط آزاد است.

می‌کند. به همین ترتیب می‌توانیم مکان و سرعت را در $t = ۲٫۰\text{s}$، $t = ۳٫۰\text{s}$، و $t = ۴٫۰\text{s}$ به‌دست بیاوریم (شکل ۱۹).

مثال ۶. توپی را از زمین با سرعت ۲۵٫۲m/s در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به نقطهٔ اوج مسیر خود برسد؟ (ب) توپ تا کجا بالا می‌رود؟ (ج) در چه زمانهایی توپ در ارتفاع ۲۷٫۰m از سطح زمین واقع می‌شود؟

حل: (الف) سرعت توپ، در نقطهٔ اوج، صفر می‌شود. با داشتن $v_۰$ و $v(=۰)$، می‌خواهیم t را حساب کنیم. t از معادلهٔ ۲۳ به‌دست می‌آید:

$$t = \frac{v_۰ - v}{g} = \frac{۲۵٫۲\text{m/s} - ۰}{۹٫۸\text{m/s}^۲} = ۲٫۵۷\text{s}$$

(ب) از داده‌های اولیه استفاده می‌کنیم تا خطای احتمالی قسمت (الف) وارد این قسمت نشود. از معادلهٔ ۲۵، با $y_۰ = ۰$، می‌شود y را به‌دست آورد:

$$y = \frac{v_۰^۲ - v^۲}{۲g} = \frac{(۲۵٫۲\text{m/s})^۲ - ۰}{۲(۹٫۸\text{m/s}^۲)} = ۳۲٫۴\text{m}$$

(ج) در این حالت معادلهٔ ۲۴ به‌کار می‌آید، زیرا t تنها مجهول آن است. چون می‌خواهیم t را به‌دست بیاوریم. معادلهٔ ۲۴ را، با

$y_\circ = \circ$، به شکل معمول معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲}gt^۲ - v_\circ t + y = \circ$$

$$\frac{۱}{۲}(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})t^۲ - (۲۵٫۲\,\mathrm{m/s})t + ۲۷٫\circ\,\mathrm{m} = \circ$$

از حل این معادله جوابهای $t = ۱٫۵۲\mathrm{s}$ و $t = ۳٫۶۲\mathrm{s}$ به‌دست می‌آید. در $t = ۱٫۵۲\mathrm{s}$، سرعت توپ برابر است با

$$v = v_\circ - gt = ۲۵٫۲\,\mathrm{m/s} - (۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱٫۵۲\mathrm{s}) = ۱\circ٫۳\,\mathrm{m/s}$$

و در $t = ۳٫۶۲\mathrm{s}$،

$$v = v_\circ - gt = ۲۵٫۲\,\mathrm{m/s} - (۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})(۳٫۶۲\mathrm{s}) = -۱\circ٫۳\,\mathrm{m/s}$$

این دو سرعت مقادیر مساوی ولی جهتهای مخالف دارند. باید بتوانید نشان بدهید که اگر مقاومت هوا نباشد، زمانی که طول می‌کشد تا توپ تا نقطهٔ اوج صعود کند، برابر با زمانی است که طول می‌کشد تا توپ همین مسافت را سقوط کند، و اندازهٔ سرعت توپ در هر نقطه، هنگام بالا رفتن و هنگام پایین آمدن، یکی است. دقت کنید که جواب قسمت (الف) برای لحظهٔ رسیدن توپ به نقطهٔ اوج (۲٫۵۷s) درست در وسط دو زمانی است که در قسمت (ج) به‌دست آمد، آیا می‌توانید بگویید چرا؟ آیا می‌توانید به‌طور کیفی اثر مقاومت هوا را بر زمانهای صعود و سقوط پیش‌بینی کنید؟

مثال ۷. موشکی از عمق ۱۲۵m در آب، از حالت سکون در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. مقدار شتاب این موشک، که آن‌را ثابت فرض می‌کنیم، مجهول است (این شتاب از برایند اثر موتورهای موشک، گرانش زمین، نیروی ارشمیدس، و مقاومت آب حاصل می‌شود). موشک در مدت ۲٫۱۵s به سطح آب می‌رسد، و در لحظهٔ خروج از آب، موتورهای آن به طور خودکار خاموش می‌شوند (تا ردیابی آن آسان نباشد) و به صعود خود ادامه می‌دهد. این موشک تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (اثرهای مربوط به سطح آب را نادیده بگیرید).

حل: در اینجا هم، مثل مسئلهٔ سقوط آزاد، برای بررسی حرکت موشک در هوا باید سرعت اولیهٔ آن‌را در این بخش از حرکتش بدانیم. بنابراین، طرحِ مسئله به این شکل است که بخش زیرِ آب را بررسی کنیم، سرعتِ موشک را در سطح آب به‌دست بیاوریم، و این سرعت را به عنوان سرعت اولیهٔ بخش سقوط آزاد به‌کار ببریم. این دو بخش را باید جداگانه حل کرد، زیرا شتاب موشک در سطح آب تغییر می‌کند.

در زیر آب، تغییر مکان، زمان، و سرعت اولیه (صفر) معلوم‌اند. به شتاب نیاز نداریم، می‌خواهیم سرعت نهایی را به‌دست بیاوریم؛ معادلهٔ ۲۱ جدول ۲، همان رابطهٔ مناسب است:

$$v = \frac{۲(y - y_\circ)}{t} = \frac{۲(۱۲۵\mathrm{m})}{۲٫۱۵\mathrm{s}} = ۱۱۶\,\mathrm{m/s}$$

سرعت در سطح آب، ۱۱۶m/s به‌طرف بالاست. حالا بخش سقوط آزاد حرکت رو به بالا را بررسی می‌کنیم. در اینجا سرعتی که در بالا به‌دست آمد، سرعت اولیه است. معادلهٔ ۲۵ برای سقوط آزاد را به‌کار می‌بریم. طبق معمول، نقطهٔ اوج نقطه‌ای است که سرعت ذره در آن صفر می‌شود:

$$y - y_\circ = \frac{v_\circ^۲ - v^۲}{۲g} = \frac{(۱۱۶\,\mathrm{m/s})^۲ - \circ}{۲(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})} = ۶۸۷\mathrm{m}$$

برای اینکه مطمئن شوید که مسئله را فهمیده‌اید، نمودارهای $y(t)$، $v(t)$، و $a(t)$ را (مثل شکل ۱۶) رسم کنید. در این مسئلهٔ مهم توجه کنید که کدام متغیرها پیوسته‌اند و کدام ناپیوسته. رفتار یک موشک واقعی چه تفاوتی با این مسئلهٔ ایده‌آل دارد؟

۲ـ۸ گالیله و سقوط آزاد (اختیاری)

ماهیت حرکت اجسام افتان از مدتها پیش جزء مسائل مورد علاقه در فلسفهٔ طبیعی بوده است. ارسطو مدعی بود که "حرکت رو به پایین ... هر جسمی که وزنی دارد، متناسب با اندازه‌اش، تندتر است." یعنی اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند. قرنها طول کشید تا گالیلئو گالیلئی [گالیله] (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲) حکم درست را صادر کرد: "اگر اثر مقاومت هوا حذف شود، همهٔ اجسام با سرعت یکسان سقوط می‌کنند." گالیله، در سالهای بعدی زندگی‌اش، رساله‌ای به نام گفتگوهایی دربارهٔ دو علم جدید نوشت و در آن به تفصیل مطالعات خودش دربارهٔ حرکت را بیان کرد.

این باورِ ارسطو که اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند، دیدگاهی است که عمومِ آن‌را درست می‌پندارند. ظاهراً نمایش کلاسی مشهوری هم آن‌را تأیید می‌کند: اگر یک توپ و یک صفحهٔ کاغذ را با هم رها کنید، توپ خیلی زودتر به زمین می‌رسد. اما اگر اول کاغذ را مچاله کنید و نمایش را تکرار کنید، توپ و کاغذ تقریباً همزمان به زمین می‌رسند. در حالت اول، اثر مقاومت هواست که باعث می‌شود کاغذ کندتر از توپ حرکت کند. در حالت دوم، اثر مقاومت هوا بر کاغذ کاهش یافته و تقریباً با اثر مقاومت هوا بر توپ برابر شده است. بنابراین، دو جسم تقریباً با یک سرعت سقوط می‌کنند. البته می‌توان این را مستقیماً با بررسی سقوط اجسام در خلأ آزمایش کرد. حتی در خلأهای جزئی هم، که به سادگی قابل دسترسی‌اند، دیده می‌شود که یک پَر و یک توپ سربی که هزاران بار از پر سنگین‌تر است، با سرعتهایی سقوط می‌کنند که عملاً نمی‌توان اختلافی بین آنها مشاهده کرد. در سال ۱۹۷۱، یک فضانورد امریکایی (دیوید اسکات)، یک پر و یک چکش را در ارتفاعی در کرهٔ ماه (که هوا ندارد) رها کرد و دید که هر دو ــ در حد خطای مشاهدهٔ اوــ همزمان به سطح ماه رسیدند. اما در زمان گالیله روش مؤثری برای تولید خلأ جزئی در کار نبود

و همچنین، وسیله‌ای با دقت کافی برای تعیین زمان سقوط اجسام وجود نداشت تا بتوان اطلاعات عددی قابل اطمینانی به‌دست آورد. (داستان مشهوری که می‌گوید گالیله دو جسم را از بالای برج پیزا، رها کرد و مشاهده کرد که هر دو همزمان به زمین می‌رسند، به احتمال بسیار زیاد فقط افسانه است. با توجه به ارتفاع برج و اجسامی که گفته می‌شود گالیله به‌کار برده است، در صورت وقوع این آزمایش، به علت وجود مقاومت هوا، جسم سنگین‌تر و بزرگ‌تر می‌بایست چند متر جلوتر از جسم سبکتر به زمین رسیده باشد. در این صورت، گالیله ظاهراً ادعای ارسطو را تأیید کرده بوده است!) با این همه گالیله ادعای خود را با غلتاندن توپی روی سطح شیبدار ثابت کرد. ابتدا نشان داد که سینماتیکِ توپی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلتد شبیه سینماتیک توپی است که آزادانه سقوط می‌کند. سطح شیبدار فقط موجب می‌شود که اثر شتاب ناشی از گرانش زمین کم شود؛ به این ترتیب، حرکت کند می‌شود و سنجش آن ساده‌تر می‌شود. بعلاوه، در سرعتهای کم، اهمیت مقاومت هوا هم کمتر می‌شود.

گالیله از آزمایشهایش دریافت که مسافتهایی که در بازه‌های زمانی یکسانِ متوالی طی می‌شوند، متناسب با اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ... و غیره‌اند. کل مسافتی که از زمان شروع حرکت تا انتهای هر یک از این بازه‌ها طی می‌شود متناسب است با ۱، (۴ =)۳ + ۱، (۹ =)۵+۳+۱، (۱۶ =)۷+۵+۳+۱، و ... یعنی برابر است با مجذور اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، و الی آخر. اما اگر مسافت طی شده متناسب با مجذور زمان باشد، تغییر سرعت مستقیماً متناسب با زمان است؛ نتیجه‌ای که خاص حرکت با شتاب ثابت است. سرانجام، گالیله دریافت که نتایج حاصل از حرکت بستگی به جرم توپ ندارند. به این ترتیب، به اصطلاح خودمان، شتاب سقوط آزاد مستقل از جرم جسم افتان است.

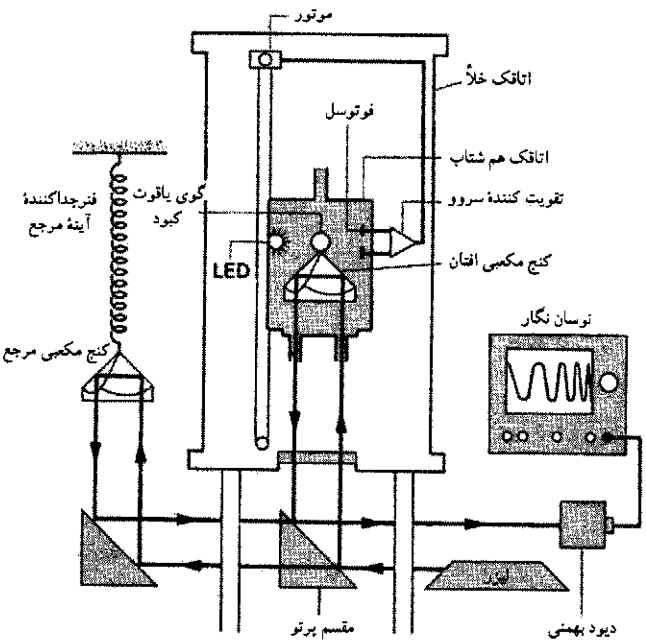
۲ـ۹ اندازه‌گیری شتابِ سقوط آزاد (اختیاری)

اندازه‌گیری g یکی از آزمایشهای استاندارد در آزمایشگاه فیزیک پایه است. به این منظور مثلاً می‌توان زمانی را که طول می‌کشد تا ذره‌ای از حالت سکون مسافت معینی را سقوط کند اندازه گرفت و سپس، با استفاده از معادلهٔ ۲۴، g را تعیین کرد. در این مورد به دستگاههای نه چندان دقیقِ آزمایشگاههای معمولی هم می‌شود به دقت حدود ۱٪ رسید. روشی بهتر وجود دارد و آن استفاده از آونگ است. نیروی محرک آونگ از جاذبهٔ زمین بر وزنهٔ آن تأمین می‌شود. در فصل ۱۵ خواهیم دید که مقدار g را می‌توان با اندازه‌گیری دورهٔ تناوب نوسان آونگی به‌طول معین، به‌دست آورد. با اندازه‌گیری زمانِ لازم چندین نوسان، مقدار دقیقی برای دورهٔ تناوب به‌دست می‌آید. در این مورد با استفاده از دستگاههای معمولی آزمایشگاهها می‌توان به سادگی به دقتی در حدود ۰٫۱٪ رسید. چنین دقتی برای مشاهدهٔ اختلاف مقادیر g درسطح دریا و در قلهٔ یک کوه (مثلاً به ارتفاع 3km یا 10000ft)، یا برای مشاهدهٔ اختلاف مقادیر g در استوا و در قطب، کافی است.

به مدت چند قرن، دقیقترین روش سنجش g همان روش آونگ بود. دقت این روش نهایتاً به حدود ۱ در 10^6 رسید. این دقت برای تشخیص اختلاف مقادیر g در دو طبقهٔ یک ساختمان کافی است. دقت روش آونگ به همین حد محدود می‌شود زیرا خطا در تعیین رفتار واقعی نقطهٔ لولایی آونگ نمی‌گذارد که دقت سنجش طول آونگ را از حد معینی بیشترکنیم. اخیراً برای دقیقترکردن اندازه‌گیری g، آزمایشگران دوباره به روش سقوط آزاد روی آورده‌اند. دقت این روش، با استفاده از تداخل‌سنجی لیزری، تقریباً به ۱ در10^9 رسیده است. با این دقت می‌شود تغییرات میدان گرانشی زمین را در مسافت قائمی به طول 1cm سنجید؛ چنین گرانی‌سنجی می‌تواند تغییر میدان گرانشی ناشی از خود آزمایشگری را که 1m آن طرفتر از دستگاه ایستاده است حس کند!

رسیدن به چنین دقتی، موفقیت بزرگی برای روشهای دقیق آزمایشگاهی است. مثلاً، شاید تصور کنید که برای حذف اثر مقاومت هوا بر سقوط آزاد، جسم را باید در خلأ رها کرد. این البته حرف درستی است، اما بهترین خلأهای آزمایشگاهی فعلی هم نمی‌توانند شرایطی را که برای دقت 10^{-9} در سنجش g لازم است فراهم کنند. برای کاهش اثر مقادیرناچیز گازِ باقی‌مانده که حتی در خلأهای شدید هم حضور دارد، جسمی را که قرار است سقوط آزاد کند دریک جعبهٔ خلأ می‌گذاریم و جعبه را هم با جسم رها می‌کنند. گاز باقی‌مانده چون همراه جسم سقوط می‌کند، مقاومتی در برابر حرکت جسم نشان نمی‌دهد.

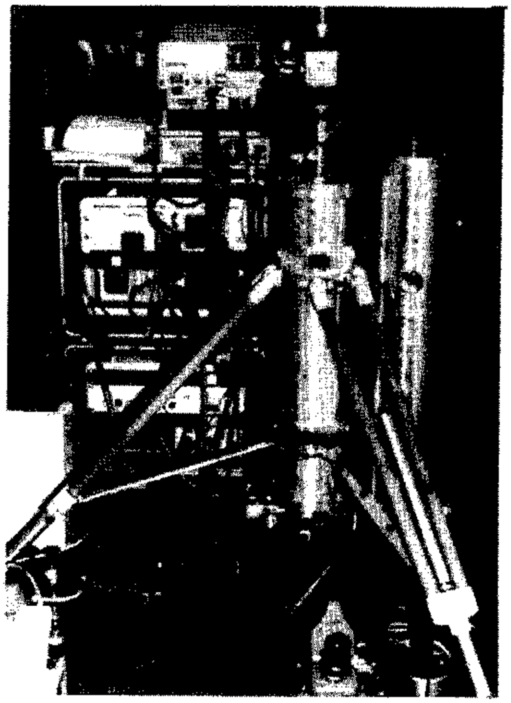
شکل ۲۰ طرحی از یک دستگاه سقوط آزاد را نشان می‌دهد که



شکل۲۰. نمودار دستگاه سنجش سقوط آزاد. نوسان‌نگار الگوی تداخلهای ویرانگر و سازنده را نشان می‌دهد. این تداخل ناشی از پرتو لیزری است که از کنج افتان بازتابیده می‌شود و با پرتو حاصل از کنج مرجع ترکیب می‌شود. اتاقکِ هم شتاب را موتوری به طرف پایین حرکت می‌دهد، چنان که همراه با کنج سقوط کند.

دکتر جیمز فالر و همکارانش آن‌را در "مؤسسهٔ مشترک اختر فیزیک آزمایشگاهی" در بولدر، کلرادو، طراحی کرده‌اند. جسم افتان، یک کنج بازتابنده است، درواقع کنجی است از یک مکعب شیشه‌ای که سه وجه آن با لایهٔ بازتابنده اندود شده است. ویژگی مفید این وسیله آن است که نور از هر جهتی که به داخل کنج بتابد، درست در جهت مخالف بازتابیده می‌شود. (فضانوردان آپولو آرایه‌ای از چنین بازتابنده‌هایی را در ماه نصب کرده‌اند؛ با تاباندن باریکهٔ لیزر از زمین به ماه و دریافت بازتاب این باریکه، می‌توان فاصلهٔ زمین تا ماه را به دقت سنجید.) یک باریکهٔ لیزر را از جسم افتان بازمی‌تابد و باریکه‌های فرودی و بازتابیده با هم تداخل می‌کنند و در حین سقوط جسم مرتباً یکدیگر را تقویت و تضعیف می‌کنند. مسافتی که جسم افتان می‌پیماید تا از یک تداخل ویرانگر به تداخل ویرانگر بعدی برسیم نصف طول‌موج نور است. بنابراین، کل مسافت سقوط آزاد را می‌توان، تنها با شمردن عدهٔ تداخلهای ویرانگر، با دقت کسری از طول‌موج نور به‌دست آورد. همزمان با فاصلهٔ زمانی بین دو تداخل ویرانگر با ساعت اتمی اندازه‌گیری می‌شود. به این ترتیب، مسافت و زمان هر دو با هم به‌دست می‌آیند، مثل همان روشهایی که خودتان ممکن است در آزمایشگاه فیزیک پایه به‌کار بگیرید. شکل ۲۱، تصویر این ابزار عالی را نشان می‌دهد.

ساختن گرانی‌سنجهای دقیقتر، نتایج عملی مهمی دارد. نگاشت میدان گرانشی زمین، به‌یافتن منابع نفت یا کانیهای دیگر کمک می‌کند (نگاه کنید به شکل ۵ در فصل ۱۶). تغییرات پوستهٔ زمین در طی زمان را می‌توان‌با اثری که این تغییرات بر g می‌گذارند مشاهده کرد. به این ترتیب، می‌توان حرکت صفحات پوستهٔ زمین و فعالیتهای لرزه‌ای زمین را دنبال کرد. تغییرات کوچک در میدان گرانشی زمین می‌تواند بر مدار ماهواره‌ها و مسیر موشکهای قاره‌پیما تأثیر بگذارد، و در علم پایه، با اندازه‌گیریهای دقیق g امکان آزمون جزئیات درکی که از نظریهٔ گرانشی داریم فراهم می‌شود؛ نظریه‌ای که بیش از سه قرن پیش، آیزاک نیوتون آن‌را پایه‌گذاری کرد.



شکل۲۱. عکسی از دستگاه سقوط آزاد (که نمودار آن در شکل ۲۰ آمده است). این تجهیزات را می‌توان به‌راحتی حمل کرد و g را در هر محلی که لازم است اندازه گرفت.

پرسشها

۱. آیا اندازهٔ سرعت یک جسم می‌تواند منفی باشد؟ اگر می‌گویید بله، مثالی بیاورید؛ اگر می‌گویید نه، توضیح بدهید که چرا.

۲. خرگوشی در هر ثانیه نصف فاصلهٔ باقی‌مانده بین بینی‌خود و سر یک کاهو را می‌پیماید. آیا این خرگوش اصولاً می‌تواند به کاهو برسد؟ مقدار حدی سرعت متوسط خرگوش چقدر است؟ نمودارهای سرعت و مکان خرگوش را برحسب زمان رسم کنید.

۳. متوسط اندازهٔ سرعت، برابر است با طول مسیر پیموده شده تقسیم بر مدت حرکت. آیا این کمیت با اندازهٔ سرعت متوسط فرق دارد؟ مثالی بیاورید که نظرتان را تأیید کند.

۴. در یک میدان بخصوص مسابقات اتومبیلرانی، اتومبیلی دور اول از یک مسیر ۲ دوری را با سرعت متوسط $90\,\mathrm{mi/h}$ می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان‌زیاد کند که‌سرعت متوسطش درکل مسابقه $180\,\mathrm{mi/h}$ باشد. نشان بدهید که این کار ممکن نیست.

۵. باب یک مسابقهٔ دو $100\,\mathrm{m}$ را با اختلاف $10\,\mathrm{m}$ از جودی می‌برد، و دفعهٔ بعد برای اینکه به جودی شانس بردن داده باشد، موقع شروع مسابقه $10\,\mathrm{m}$ از جودی عقبتر می‌ایستد. آیا این بار شانس باب و جودی برای برنده شدن واقعاً مساوی است؟

۶. اگر سرعت ثابت باشد، آیا ممکن است که سرعت متوسط در بازه‌ای با سرعت در یکی از لحظات آن بازه متفاوت باشد؟ اگر پاسختان مثبت است مثالی بزنید، اگر منفی است بگویید چرا.

۷. اگر شتاب حرکت یکنواخت نباشد، آیا هیچ وقت ممکن است که میانگین سرعت ذره‌ای که در راستای محورx حرکت می‌کند $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ باشد؟ جواب خودتان را با استفاده از نمودار ثابت کنید.

۸. آیا سرعت‌سنج ماشین همان اندازهٔ سرعتی را که تعریف کردیم می‌سنجد؟

۹. (الف) آیا ممکن است سرعت جسمی صفر باشد ولی شتاب آن غیرصفر باشد؟ (ب) آیا ممکن است سرعت جسمی ثابت باشد ولی اندازهٔ سرعت متغیر باشد؟ در هر مورد، اگر جواب مثبت است مثالی بیاورید؛ اگر منفی است بگویید چرا.

۱۰. آیا ممکن است جهت سرعت جسمی که شتاب ثابت دارد، معکوس شود؟ اگر می‌گویید بله، مثال بیاورید؛ اگر می‌گویید نه بگویید که چرا.

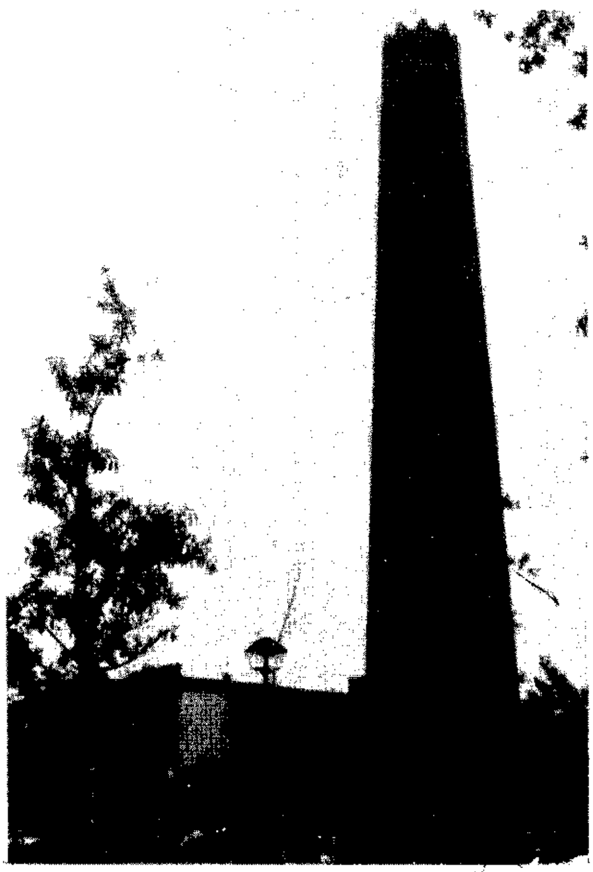
۱۱. شکل ۳۰، سرهنگ جان استپ را در سورتمهٔ موشکی خود که در حال ترمز است، نشان می‌دهد (نگاه کنید به مسئلهٔ ۳۴). (الف) بدن این فضانورد یک شتاب‌سنج است نه یک سرعت‌سنج. این موضوع را توضیح بدهید. (ب) آیا می‌توانید از روی شکل، جهت شتاب را تعیین کنید؟

۱۲. آیا ممکن است شتاب جسمی در حال کاهش و سرعت آن در حال افزایش باشد؟ اگر جوابتان بله است مثالی بیاورید؛ اگر نه، بگویید چرا؟

۱۳. کدام یک از اینها غیرممکن است؟ (الف) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن هم به طرف شرق است؛ (ب) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن به طرف غرب است؛ (ج) سرعت جسمی صفر و شتاب آن غیرصفر است؛ (د) شتاب جسمی ثابت، اما سرعت آن متغیر است؛ (ه) سرعت جسمی ثابت و شتاب آن متغیر است.

۱۴. چند مورد مثال بیاورید که در آنها نمی‌توان از مقاومت هوا در برابر سقوط اجسام چشم پوشید.

۱۵. شکل ۲۲ یک برجی را در بالتیمور، مریلند، نشان می‌دهد. این برج در سال ۱۸۲۹ بنا شد و از آن برای ساختن گلوله‌های سربی تفنگ استفاده می‌شد. برای این کار، سرب مذاب را در اندازه‌های لازم برای یک گلوله، از بالای برج به پایین می‌ریختند. گلوله‌های سربی در پایین برج به درون یک مخزن آب می‌افتادند و منجمد می‌شدند. ارتفاع برج، ۲۳۰ ft است. این روش ساختن گلوله چه مزیتهایی می‌تواند داشته باشد؟



شکل ۲۲. پرسش ۱۵

۱۶. شخصی که بر لبهٔ صخره‌ای مرتفع ایستاده است، توپی را با سرعت اولیهٔ v_0 به‌طرف بالا و توپی دیگر را با سرعت اولیهٔ v_0 رو به پایین پرتاب می‌کند. کدام توپ در پای صخره با سرعت بیشتری به زمین برخورد می‌کند؟ مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۱۷. جسمی از موشکی که با شتاب $9{,}8 \mathrm{m/s^2}$ رو به بالا حرکت می‌کند رها می‌شود. شتاب رو به پایین این جسم چقدر است؟

۱۸. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از حالت سکون ($v_0 = 0$) از نقطهٔ $x_0 = 0$ و در زمان $t = 0$ با شتاب a شروع به حرکت کند. از معادلهٔ ۱۹ برای حرکت با شتاب ثابت نتیجه‌می‌شود که ذره در دو زمان متفاوت $+\sqrt{2x/a}$ و $-\sqrt{2x/a}$، در نقطهٔ x است. معنی ریشهٔ منفی این معادلهٔ درجه دو چیست؟

۱۹. مقدار g در سیاره‌ای نصف مقدار آن در زمین است. زمان لازم برای سقوط اجسام از حالت سکون در این سیاره، چه ربطی با زمان مشابه در زمین دارد؟ مسافتهای سقوط را یکی بگیرید.

۲۰. (الف) سنگی با سرعت معینی در سیاره‌ای که شتاب سقوط آزاد در سطح آن دو برابر همین شتاب در سطح زمین است، به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع اوج این سنگ را با ارتفاع مشابه در زمین مقایسه کنید. (ب) اگر سرعت اولیه را دو برابر کنیم، ارتفاع اوج چه تغییری می‌کند؟

۲۱. توپی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فکر می‌کنید زمان صعود توپ بیشتر باشد یا زمان سقوط آن؟ چرا؟

۲۲. نمودار کیفی سرعت برحسب زمان را برای جسم افتانی که (الف) مقاومت هوا در برابر حرکت آن ناچیز است و (ب) مقاومت هوا در برابر حرکت آن قابل‌ملاحظه است، رسم کنید.

۲۳. دو توپ را به فاصلهٔ ۱s از هم رها می‌کنیم. (الف) فاصلهٔ بین دو توپ با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ (ب) نسبت سرعت توپ اول به سرعت توپ دوم، v_1/v_2، با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید، و پاسخهای کیفی بدهید.

۲۴. پرسش ۲۳ را، با در نظرگرفتن مقاومت هوا، دوباره پاسخ بدهید؛ باز هم پاسخهای کیفی.

۲۵. اگر m یک سنگ سبک و M یک سنگ سنگین باشد، بنا به ادعای ارسطو، M باید سریعتر از m سقوط کند. گالیله سعی کرد نشان بدهد که این ادعای ارسطو با منطق سازگار نیست. استدلال گالیله چنین بود: m و M را به هم ببندید و سنگ بزرگتری بسازید. در این حالت، m باید مزاحم سقوط M شود زیرا کندتر از M حرکت می‌کند. پس سنگ مرکب باید تندتر از m و کندتر از M سقوط کند؛ اما طبق ادعای ارسطو، سنگ جدید $(M + m)$ سنگینتر از M است و باید تندتر از M حرکت کند. آیا اگر استدلال گالیله را بپذیریم، می‌توان گفت که M و m باید با یک سرعت سقوط کنند؟ دراین صورت چه نیازی به آزمایش است؟ اگر فکر می‌کنید که استدلال گالیله نادرست است، بگویید چرا؟

۲۶. معادلات سینماتیکی حرکت (جدول ۲) تحت اثر وارونگی زمان، یعنی گذاشتن $-t$ به جای t، چه می‌شوند؟ توضیح بدهید.

۲۷. انتظار داریم روابطی که واقعاً کلی هستند، مثل روابط جدول ۲، مستقل از دستگاه مختصات، معتبر باشند. اگر معادلات کلی از نظر ابعادی هم سازگار باشند، آن‌وقت، مستقل از یکاهایی که به‌کار می‌بریم، معتبر خواهند بود. در این صورت، آیا اصولاً نیازی به یکاها و دستگاههای مختصات داریم؟

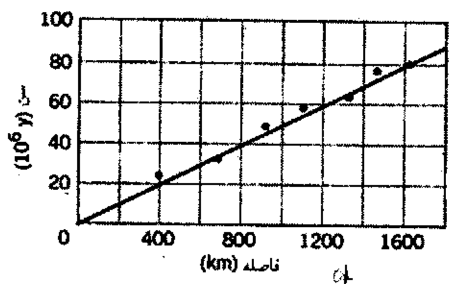
مسئله‌ها

بخش ۲ـ۳ سرعت متوسط

۱. اتومبیل شما با سرعت ۸۸km/h (یعنی ۵۵mi/h) در حرکت است. شما به مدت ۱s به تصادفی که کنار جاده اتفاق افتاده است نگاه می‌کنید. در این مدت، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟

۲. یک بازیکن بیسبال، توپی را با سرعت افقی ۱۶۰km/h پرتاب می‌کند. بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، ۱۸٫۴m از محل پرتاب توپ فاصله دارد. چقدر طول می‌کشد تا توپ به چوب بیسبال برسد؟

۳. شکل ۲۳، رابطهٔ بین سن قدیمی‌ترین رسوبها در اقیانوس، و فاصلهٔ این رسوبها از یک پشتهٔ خاص را نشان می‌دهد. سن رسوبها برحسب میلیون سال و فاصله برحسب کیلومتر است. ماده، تقریباً با سرعت یکنواخت، از این پشته بیرون می‌زند و به اطراف حرکت می‌کند. سرعت حرکت رسوبها از این پشته را برحسب سانتی‌متر بر سال، پیدا کنید.



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۳

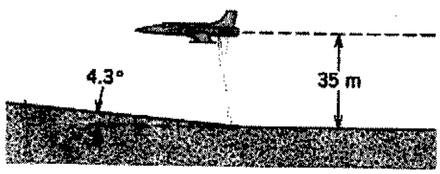
۴. کارل لویس، دو ۱۰۰m را در زمانی در حدود ۱۰s می‌دود؛ بیل راجرز، ماراتون (۲۶mi، ۳۸۵yd) را در زمانی در حدود ۲h و ۱۰min می‌دود. (الف) سرعت متوسط هر یک چقدر است؟ (ب) اگر کارل لویس می‌توانست سرعت دو ۱۰۰m خود را در ماراتون حفظ کند، چه مدتی طول می‌کشید تا مسیر ماراتون را طی کند؟

۵. فیزیکدان مشهوری به مدت چند ماه، هر هفته یک بار از بوستون در ماساچوست به ژنو در سویس می‌رفت و برمی‌گشت؛ فاصلهٔ بین این دو شهر ۴۰۰۰mi است. متوسط اندازهٔ سرعت فیزیکدان در این مدت چقدر بوده است؟ آیا عجیب است که برای حل مسئله به سرعت هواپیما نیاز نداریم؟

۶. سرعت مجاز اتومبیلها در بزرگراهی از ۵۵mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) به ۶۵mi/h (یعنی ۱۰۴٫۶km/h) افزایش داده شده است. فاصلهٔ بین بوفالو و نیویورک ۴۳۵mi (یعنی ۷۰۰km) است. اگر این مسافت را با بیشترین سرعت مجاز بپیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتمان صرفه‌جویی می‌شود؟

۷. شخصی از سن‌آنتونیو به هوستون می‌رود؛ نصف مدت سفر را با سرعت ۳۵mi/h (یعنی ۵۶٫۳km/h) و نصف دیگر را با سرعت ۵۵mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) می‌پیماید. در بازگشت، نصف مسافت را با سرعت ۳۵mi/h و نصف دیگر را با سرعت ۵۵mi/h طی می‌کند. سرعت متوسط در (الف) مسیر سن‌آنتونیو به هوستون، (ب) مسیر هوستون به سن‌آنتونیو، و (ج) در کل مسیر چقدر است؟

۸. یک هواپیمای جت پیشرفته در یک مانور مخفی شدن از دید رادار، در ارتفاع ۳۵m از سطح زمین پرواز می‌کند. ناگهان هواپیما به یک شیب رو به بالای ۴٫۳° می‌رسد (که البته تشخیص این شیب کوچک چندان ساده نیست)؛ نگاه کنید به شکل ۲۴. خلبان چه مدت فرصت دارد که، قبل از برخورد با زمین، خط پرواز را تصحیح کند؟ سرعت پرواز ۱۳۰۰km/h است.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۸

۹. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = 3t - 4t^2 + t^3$ به‌دست می‌آید؛ x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) مکان ذره در $t = 0$، $t = 1\text{s}$، $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، و $t = 4\text{s}$ کجاست؟ (ب) جابه‌جایی ذره بین لحظات $t = 0$ تا $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ از $t = 0$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر؟ (ج) سرعت متوسط ذره در بازهٔ $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ در بازهٔ $t = 0$ تا $t = 3\text{s}$ چقدر؟

۱۰. اتومبیلی با سرعت ثابت ۴۰km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با سرعت ثابت ۶۰km/h از همان تپه پایین می‌آید. متوسط اندازهٔ سرعت اتومبیل در کل مسیر چقدر است؟

۱۱. سرعت متوسط خودتان را در هر یک از این دو حالت حساب کنید. (الف) مسافت ۲۴۰ft را با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس ۲۴۰ft دیگر را با سرعت ۱۰ft/s می‌دوید. (ب) به مدت ۱٫۰min با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس به مدت ۱٫۰min دیگر با سرعت ۱۰ft/s می‌دوید.

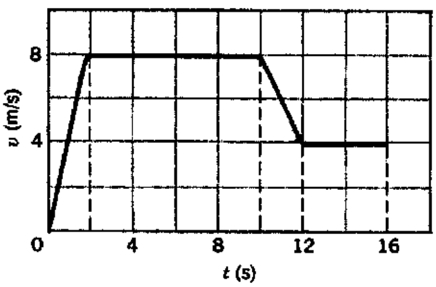
۱۲. دو قطار با سرعت ۳۴km/h، روی یک ریل به طرف هم حرکت می‌کنند. هنگامی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۱۰۲km است، پرنده‌ای از سر یک قطار پرواز می‌کند تا به قطار دیگر برسد، و سپس دوباره به

طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را تا زمان برخورد دو قطار تکرار می‌کند. سرعت پرواز پرنده، ۵۸km/h است. (الف) پیش از برخورد، پرنده چند بار بین دو قطار رفت‌و آمد می‌کند؟ (ب) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

بخش ۲ـ۴ سرعت لحظه‌ای

۱۳. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = ۹٫۷۵ + ۱٫۵۰t^{۳}$ به‌دست می‌آید که در آن x برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. بازهٔ زمانی بین $t = ۲s$ و $t = ۳s$ را در نظربگیرید: (الف) سرعت متوسط در این بازه چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲s$ چقدر است؟ (ج) سرعت لحظه‌ای در $t = ۳s$ چقدر است؟ (د) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲٫۵s$ چقدر است؟ (هـ) سرعت لحظه‌ای در زمانی که ذره در وسط فاصلهٔ مکانهای متناظر با $t = ۲s$ و $t = ۳s$ است چقدر است؟

۱۴. شکل ۲۵ نمودار سرعت زمان دونده‌ای را نشان می‌دهد. این دونده در مدت ۱۶s چه مسافتی را می‌پیماید؟



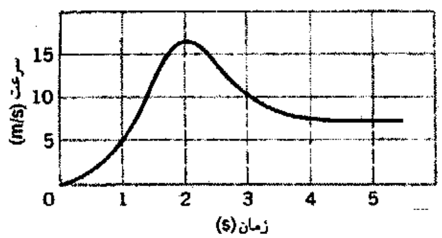
شکل ۲۵. مسئله‌های ۱۴ و ۱۵

بخش ۲ـ۵ حرکت شتابدار

۱۵. شتاب دوندهٔ مسئلهٔ ۱۴ در $t = ۱۱s$ چقدر است؟

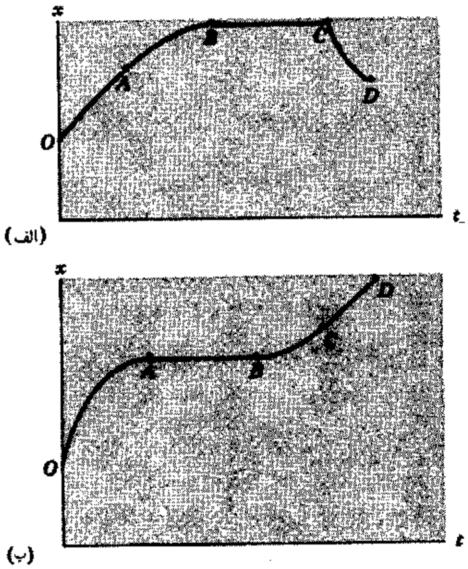
۱۶. سرعت ذره‌ای ۱۸m/s در جهت $+x$ است. ۲٫۴s بعد، سرعت آن ۳۰m/s در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازهٔ ۲٫۴ ثانیه‌ای چقدر است؟

۱۷. شکل ۲۶ نمودار سرعت‌ـزمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. نمودار شتاب‌ـزمان این جسم را رسم کنید.



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۷

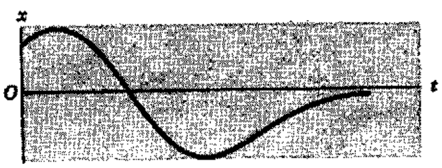
۱۸. شکل ۲۷الف نمودار x برحسب t ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. (الف) در هر یک از بازه‌های OA، AB، BC و CD، سرعت آیا مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ همچنین تعیین کنید که در هر بازه شتاب +، − یا ۰ است. (ب) در این نمودار آیا بازه‌ای وجود دارد که شتاب در آن به وضوح متغیر باشد؟ (از رفتار منحنی در نقاط مرزی بازه‌ها چشم بپوشید.)



شکل ۲۷. (الف) مسئلهٔ ۱۸ و (ب) مسئلهٔ ۱۹

۱۹. پرسشهای مسئلهٔ قبل را در مورد حرکت طبق نمودار شکل ۲۷ب، پاسخ بدهید.

۲۰. شکل ۲۸ نمودار مکان‌ـزمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. به‌طور کیفی، منحنیهای سرعت‌ـزمان و شتاب‌ـزمان حرکت این ذره را رسم کنید.



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۰

۲۱. در هر یک از حالتهای زیر، نموداری رسم کنید که نمایش ممکنی از مکان‌ـزمان ذره‌ای باشد که در راستای محور x حرکت می‌کند: در $t = ۱s$، (الف) سرعت ذره صفر و شتاب آن مثبت است؛ (ب) سرعت ذره صفر و شتاب آن منفی است. (ج) سرعت ذره منفی و شتاب آن مثبت است؛ (د) سرعت ذرهٔ منفی و شتاب آن منفی است. (هـ) درکدام یک از موارد بالا، اندازهٔ سرعت ذره، در $t = ۱s$ در حال افزایش است؟

۲۲. مکان ذره‌ای با رابطهٔ $x = ۲t^{۳}$ بیان می‌شود، که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط و شتاب متوسط ذره

بین $t = ۱\text{s}$ و $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای ذره در $t = ۱\text{s}$ و $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟ (ج) مقادیر لحظه‌ای و متوسط را با هم مقایسه کنید. در هر حالت کمیت بزرگتر را تعیین کنید و بگویید که چرا بزرگتر است؟

۲۳. ذره‌ای طبق رابطهٔ $x = ۵۰t + ۱۰t^۲$ در راستای محور x حرکت می‌کند؛ x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط ذره را در ۳s اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در $t = ۳\text{s}$، و (ج) شتاب لحظه‌ای ذره را در $t = ۳\text{s}$ پیدا کنید.

۲۴. شخصی از $t = ۰$ تا $t = ۵\text{min}$ ایستاده است، از $t = ۵\text{min}$ تا $t = ۱۰\text{min}$، به عجله با سرعت $۲٫۲\text{m/s}$ راه می‌رود. سرعت متوسط و شتاب متوسط او در بازه‌های زمانی (الف) از ۲min تا ۸min و (ب) از ۳min تا ۹min چقدر است؟

۲۵. در جدول زیر مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، در زمانهای مختلف فهرست شده است:

$x(\text{m})$	۰٫۰۸۰	۰٫۰۵۰	۰٫۰۴۰	۰٫۰۵۰	۰٫۰۸۰	۰٫۱۳	۰٫۲۰
$t(\text{s})$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(الف) نمودار جابه‌جایی (نه مکان) برحسب زمان را رسم کنید. (ب) سرعت متوسط ذره را در بازه‌های ۰ تا ۱s، ۰ تا ۲s، ۰ تا ۳s، و ۰ تا ۴s به‌دست بیاورید. (ج) شیب منحنی‌ای را که در قسمت (الف) رسم کردید، در $t = ۰$، $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، $t = ۴\text{s}$، و $t = ۵\text{s}$ به‌دست بیاورید. (د) نمودار شیب برحسب زمان را رسم کنید. (یکای شیب چیست؟) (هـ) از روی منحنی قسمت (د) شتاب ذره را در زمانهای $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ به‌دست بیاورید.

۲۶. مکان ذره‌ای بر محور x، برحسب زمان، از رابطهٔ

$$x = At^۲ - Bt^۳$$

به‌دست می‌آید، که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) یکاهای SI برای A و B چه هستند؟ در بقیهٔ مسئله، فرض کنید مقادیر عددی A و B، به‌ترتیب برابر با ۳ و ۱ یکای SI باشند. (ب) در چه زمانی ذره به بیشترین مقدار مثبت x می‌رسد؟ (ج) کل طول مسیری که ذره در ۴s اول حرکت می‌پیماید چقدر است؟ (د) جابه‌جایی ذره در ۴s اول چقدر است؟ (هـ) سرعت ذره در $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟ (و) شتاب ذره در $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟ (ز) سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $t = ۲\text{s}$ تا $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟

۲۷. الکترونی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. شتاب این الکترون، به طور خطی با زمان زیاد می‌شود: $a = kt$، که در آن $k = (۱٫۵\text{m/s}^۲)/\text{s}$ یا $k = ۱٫۵\text{m/s}^۳$ است. (الف) نمودار a برحسب t را برای ۱۰s اول حرکت رسم کنید. (ب) با استفاده از نمودار قسمت (الف)، نمودار v برحسب t را رسم کنید و سرعت الکترون را در ۵s بعد از شروع حرکت تخمین بزنید. (ج) از روی منحنی v برحسب t قسمت (ب)، منحنی x برحسب t را رسم کنید و تخمین بزنید که الکترون در ۵s اول حرکت چه مسافتی را می‌پیماید.

۲۸. در یک بازی کامپیوتری، لکه‌ای طبق رابطهٔ $x = ۹٫۰۰t - ۰٫۷۵۰t^۳$ روی صفحهٔ نمایش [مانیتور] حرکت می‌کند. در این رابطه، x فاصلهٔ لکه از لبهٔ چپ صفحه، برحسب سانتی‌متر، و t زمان برحسب ثانیه است. اگر لکه به یکی از دو لبهٔ صفحه، $x = ۰$ یا $x = ۱۵\text{cm}$، برسد، دوباره از لبهٔ چپ شروع به حرکت می‌کند. (الف) چه مدت پس از شروع حرکت، لکه به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد؟ (ب) در این لحظه لکه کجاست؟ (ج) در این لحظه شتاب لکه چقدر است؟ (د) پس از سکون لحظه‌ای، لکه در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (هـ) لکه در چه زمانی از صفحه خارج می‌شود؟

بخش ۲ـ۶ حرکت با شتاب ثابت

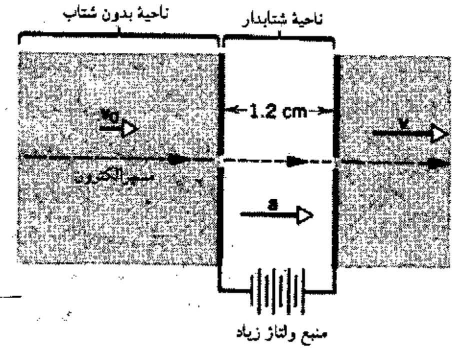
۲۹. جامبوجتی باید روی باند به سرعت ۳۶۰km/h (یعنی ۲۲۴mi/h) برسد تا بتواند از زمین کنده شود. اگر طول باند $۱٫۸\text{km}$ (یعنی $۱٫۱\text{mi}$) باشد، حداقل شتاب (ثابت) لازم برای اینکه هواپیما در این باند از سکون به سرعت لازم برسد چقدر است؟

۳۰. فضاپیمایی در فضای تهی با شتاب ثابت $۹٫۸\text{m/s}^۲$ حرکت می‌کند. (الف) اگر فضاپیما از حالت سکون شروع به حرکت کند، چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن به یک دهم سرعت نور برسد؟ (ب) در این مدت، فضاپیما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (سرعت نور $۳٫۰ \times ۱۰^۸\text{m/s}$ است.)

۳۱. مار زنگی می‌تواند سرش را با شتاب $۵۰\text{m/s}^۲$ به طرف قربانی‌اش حرکت بدهد. اگر اتومبیلی می‌توانست با این شتاب حرکت کند، چقدر طول می‌کشید تا سرعت آن از صفر به ۱۰۰km/h برسد؟

۳۲. یک میون (که نوعی ذرهٔ بنیادی است) با سرعت $۵٫۲۰ \times ۱۰^۶\text{m/s}$ به یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی به این ذره شتاب $۱٫۳۰ \times ۱۰^{۱۴}\text{m/s}^۲$ در خلاف جهت سرعت اولیه‌اش می‌دهد. میون چه مسافتی را قبل از متوقف شدن می‌پیماید؟

۳۳. الکترونی با سرعت اولیهٔ $v_۰ = ۱٫۵ \times ۱۰^۵\text{m/s}$ وارد ناحیه‌ای به طول $۱٫۲\text{cm}$ می‌شود. در این ناحیه، الکترون در اثر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲۹) و با سرعت $۵٫۸ \times ۱۰^۶\text{m/s}$ از آن خارج می‌شود. شتاب الکترون، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (این همان چیزی است که در بخش تفنگ الکترونی لامپ پرتو کاتد اتفاق



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

می‌افتد. لامپ پرتو کاتدی در گیرندهٔ تلویزیون هم به کار می‌رود.)

۳۴. در ۱۹ مارس ۱۹۵۴ سرهنگ جان پی استاپ یک رکورد جهانی برای حرکت روی سطح زمین به جا گذاشت. او یک سورتمهٔ موشکی را با سرعت ۱۰۲۰km/h در مسیری رانده و سورتمه را طی زمان ۱٫۴s از این سرعت به حالت سکون رسانده (شکل ۳۰. شتاب سرعت‌گیری در این "ترمز" چقدر بوده است؟ پاسخ خود را برحسب g (شتاب گرانشی) بیان کنید. (دقت کنید که بدن این شخص مثل شتاب‌سنج عمل می‌کند نه سرعت‌سنج.)

شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۴

۳۵. ترمزهای اتومبیل شما می‌توانند شتاب کندکنندهٔ ۱۷ft/s² تولید کنند. اگر در بزرگراهی با سرعت ۸۵mi/h در حرکت باشید و ناگهان با علامت بیشترین سرعت مجاز برابر با ۵۵mi/h مواجه شوید، حداقل چقدر طول می‌کشد که اتومبیل را به سرعت مجاز برسانید؟

۳۶. یک اتومبیل با لاستیکهای خوب، در یک جادهٔ خشک می‌تواند با شتاب کند کنندهٔ ۱۱٫۰mi/h.s (یعنی ۴٫۹۲m/s²) ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت ۵۵mi/h (یعنی ۲۴٫۶m/s) در حرکت است متوقف شود؟ (ب) در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳۷. تیری را از کمان مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تیر در بازگشت با سرعت ۲۶۰ft/s به زمین برخورد و به اندازهٔ ۹٫۰in در آن فرو می‌رود. (الف) شتاب (ثابت) توقف این تیر، و (ب) زمان لازم برای متوقف شدن آن در زمین چقدر است؟

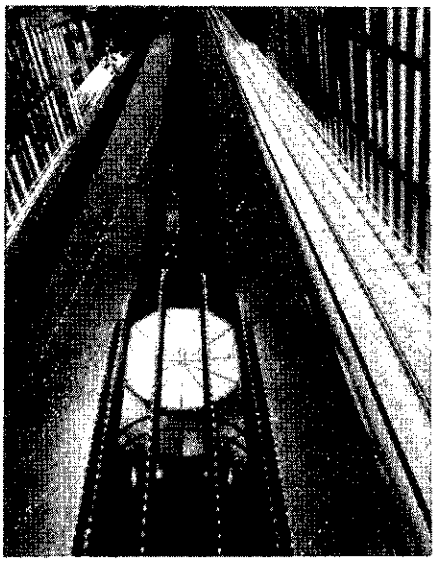
۳۸. وکیلی در مورد مسائل فیزیکی یکی از پرونده‌هایش با شما مشورت می‌کند: اتومبیلی در حال حرکت بوده است و راننده مجبور به توقف اضطراری می‌شود. ترمزها قفل می‌شوند، چرخهای اتومبیل روی جاده می‌لغزند و ردی به طول ۱۹٫۲ft روی جاده می‌ماند. مسئله این است که آیا سرعت اتومبیل، پیش از توقف، از حد مجاز ۳۰mi/h بیشتر بوده است یا نه. افسر پلیس، با فرض اینکه شتاب کند کنندهٔ ترمز از شتاب سقوط آزاد (یعنی ۳۲ft/s²) بیشتر نبوده است، راننده را جریمه نمی‌کند. به نظر شما آیا سرعت راننده کمتر از حد مجاز بوده است؟ توضیح بدهید.

۳۹. قطاری از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. سرعت قطار که در یک لحظه ۳۳٫۰m/s است، ۱۶۰m بعد به ۵۴٫۰m/s می‌رسد. (الف) شتاب قطار، (ب) زمان لازم برای طی این مسافت ۱۶۰m، (ج) زمان لازم برای اینکه قطار از سکون به سرعت ۳۳٫۰m/s برسد. و (د) مسافتی که قطار تا رسیدن به سرعت ۳۳٫۰m/s می‌پیماید چقدر است؟

۴۰. اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت ۵۸٫۰m بین دو نقطه را در ۶٫۲۰s می‌پیماید. سرعت اتومبیل در لحظهٔ عبور از نقطهٔ دوم ۱۵٫۰m/s است. (الف) سرعت اتومبیل در نقطهٔ اول چقدر است؟ (ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟ (ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطهٔ اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

۴۱. یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمهٔ اول مسافت بین دو ایستگاه را با شتاب ۱٫۲۰m/s²+ طی می‌کند. نیمهٔ دوم را با شتاب ۱٫۲۰m/s²− می‌پیماید تا در ایستگاه بعدی متوقف شود. فاصلهٔ دو ایستگاه از هم ۱٫۱۰km است. (الف) زمان طی فاصلهٔ دو ایستگاه، (ب) بیشترین مقدار سرعت قطار در این فاصله چقدر است؟

۴۲. طول مسیر یک آسانسور ۶۲۴ft است. بیشترین سرعت آسانسور ۱۰۰۰ft/min و شتاب (ثابت) آن ۴٫۰۰ft/s² است. (الف) آسانسور از حالت سکون تا رسیدن به بیشترین سرعتش چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا آسانسور تمام مسیر را بپیماید؟ توجه کنید که آسانسور در انتهای مسیر باید متوقف شود.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. راننده‌ای برای متوقف کردن اتومبیلش به‌شدت ترمز می‌کند. مسافت توقف را می‌توان حاصل‌جمع "مسافت واکنش" و "مسافت ترمز" در نظر گرفت. مسافت واکنش برابر است با حاصل‌ضرب سرعت اولیه در زمان واکنش، و مسافت ترمز فاصله‌ای است که اتومبیل پس از

ترمز کردن و قبل از توقف کامل می‌پیماید. جدول زیر، مقادیر نوعی این کمیتها را به‌دست می‌دهد.

سرعت اولیه (m/s)	مسافت واکنش (m)	مسافت ترمز (m)	مسافت توقف (m)
۱۰	۷٫۵	۵٫۰	۱۲٫۵
۲۰	۱۵	۲۰	۳۵
۳۰	۲۲٫۵	۴۵	۶۷٫۵

(الف) زمان واکنش این راننده چقدر است؟ (ب) مسافت توقف اتومبیل، با سرعت اولیهٔ ۲۵m/s چقدر است؟

۴۴. "تلهٔ سرعت" که دربزرگراهها نصب می‌شود، متشکل از دو نوار به فاصلهٔ ۱۱۰m از یکدیگر است که در اثر فشار فعال می‌شوند. راننده‌ای در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن ۹۰km/h است با سرعت ۱۲۰km/h می‌راند. درست زمانی که از نوار اول می‌گذرد متوجه پلیس می‌شود و سرعت خود را کم می‌کند. چه شتاب کندکننده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل، بین دو نوار، کمتر از حد مجاز سرعت شود؟

۴۵. اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب $۲٫۲\text{m/s}^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظهٔ کامیونی که با سرعت ثابت ۹٫۵m/s در حرکت است، از اتومبیل سبقت می‌گیرد. (الف) در چه فاصله‌ای پس از این نقطه، اتومبیل از کامیون جلو می‌زند؟ (ب) در این لحظه سرعت اتومبیل چقدر است؟ (خوب است که نمودار کیفی x برحسب t را برای هر یک از دو وسیله رسم کنید.)

۴۶. قطاری با سرعت $v_۱$ حرکت می‌کند. لوکوموتیوران یک قطار باری را می‌بیند که به فاصلهٔ d جلوتر از قطار خودش، با سرعت $v_۲$ در همان جهت حرکت می‌کند. $v_۲$ کوچکتر از $v_۱$ است؛ بنابراین، لوکوموتیوران ترمز می‌کند تا به قطار جلویی نخورد. سرعت قطار با شتاب ثابت a کم می‌شود. نشان بدهید که

اگر $d > (v_۱ - v_۲)^۲/۲a$ باشد، برخورد صورت نمی‌گیرد؛

اگر $d < (v_۱ - v_۲)^۲/۲a$ باشد، برخورد صورت می‌گیرد.

(خوب است که نمودارکیفی x برحسب t را برای هر قطار رسم کنید.)

۴۷. اتومبیلی با سرعت ۳۵mi/h (یعنی ۵۶km/h) حرکت می‌کند. راننده متوجه می‌شود که ۱۱۰ft (یعنی ۳۴m) جلوتر از او مانعی وجود دارد و ترمز می‌کند. چهار ثانیه بعد، اتومبیل به مانع برمی‌خورد. (الف) شتاب ثابت اتومبیل، پیش از برخورد چقدر بوده است؟ (ب) در لحظهٔ برخورد، سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

۴۸. دونده‌ای در مسابقهٔ دو ۱۰۰m، با شتاب $۲٫۸۰\text{m/s}^۲$ به سرعت بیشینهٔ خود می‌رسد و این سرعت را تا آخر مسیر حفظ می‌کند. اگر کل مسیر مسابقه در ۱۲٫۲s طی شده باشد، (الف) زمان سپری شده و (ب) مسافت طی شده در بخش شتابدار حرکت را حساب کنید.

۴۹. در یک کتابچهٔ راهنمای اتومبیل آمده است که اتومبیلی (با ترمزهای خوب) که با سرعت ۵۰mi/h در حرکت باشد می‌تواند در طی مسافت ۱۸۶ft متوقف شود، و در سرعت ۳۰mi/h در طی ۸۰ft. فرض کنید زمان واکنش راننده (که طی آن شتاب صفر است) و همچنین شتاب حاصل از ترمز، برای هر دو سرعت یکی است. (الف) زمان واکنش راننده و (ب) شتاب ترمز را حساب کنید.

بخش ۲ـ۷ سقوط آزاد اجسام

۵۰. قطره‌های باران از ابری درارتفاع ۱۷۰۰m از سطح زمین، به زمین سقوط می‌کنند. اگر مقاومت هوا سرعت را کم نمی‌کرد، این قطره‌ها با چه سرعتی به زمین می‌رسیدند؟ در این صورت، آیا قدم زدن در زیر باران بی‌خطر بود؟

۵۱. تنها کابل نگهدارندهٔ یک آسانسور (خالی) مخصوص عملیات ساختمانی، که در بالاترین نقطهٔ ساختمان نیمه‌کاره‌ای به ارتفاع ۱۲۰m توقف کرده است، ناگهان پاره می‌شود. (الف) آسانسور با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (ج) سرعت آن در نیمهٔ راه چقدر است؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نیمهٔ راه برسد؟

۵۲. آچاری از دست کارگری رها می‌شود و با سرعت ۲۴٫۰m/s به زمین می‌خورد. (الف) این آچار از چه ارتفاعی رها شده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟

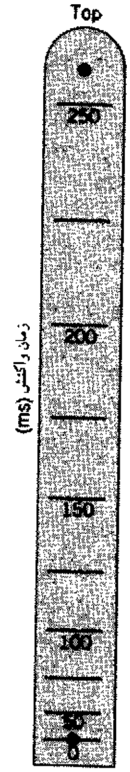
۵۳. توپی را به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت اولیهٔ آن باید چقدر باشد تا ارتفاع اوج آن ۵۳٫۷m شود؟ (ب) در این شرایط توپ چه مدت در هوا می‌ماند؟

۵۴. سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۰۰m پایین می‌افتد. چقدر طول می‌کشد تا (الف) ۵۰٫۰m اول و (ب) ۵۰٫۰m بعدی را طی کند؟

۵۵. فضانوردی که در یکی از سیاره‌های منظومهٔ شمسی فرود آمده است متوجه می‌شود که اگر سنگ کوچکی با سرعت ۱۴٫۶m/s به‌طرف بالا پرتاب شود، ۷٫۷۲s بعد به سطح سیاره بازمی‌گردد. این فضانورد روی کدام سیاره فرود آمده است؟ (راهنمایی: از اطلاعات مندرج در پیوست ج استفاده کنید.)

۵۶. توپی را با سرعت اولیهٔ ۲۰٫۵m/s، از ارتفاع ۵۸٫۸m به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت توپ در لحظهٔ برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) اگر توپ را از همان ارتفاع و با همان سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌کردیم، جواب قسمتهای (الف) و (ب) چه می‌شد؟

۵۷. شکل ۳۲ وسیلهٔ ساده‌ای برای اندازه‌گیری زمان واکنش را نشان می‌دهد. این وسیله، نواری مقوایی است که مقیاس‌بندی شده و ده نقطهٔ‌بزرگ هم روی آن مشخص شده است. دوست شما نوار را، با شست و انگشت اشاره‌اش، از نقطهٔ بالایی می‌گیرد. شست و انگشت اشارهٔ شما روی نقطهٔ پایینی است، اما مواظبید که نوار را لمس نکنید. دوستتان نوار را رها می‌کند و شما سعی می‌کنید که، پس از دیدن این رویداد، هر چه سریعتر نوار را بگیرید. عدد مربوط به‌نقطه‌ای که شما نوار را در آن می‌گیرید، زمان واکنش شماست. فاصلهٔ نقطهٔ زیرین از شاخصهای ۵۰ms، ۱۰۰ms، ۲۰۰ms، و ۲۵۰ms باید چقدر باشد؟



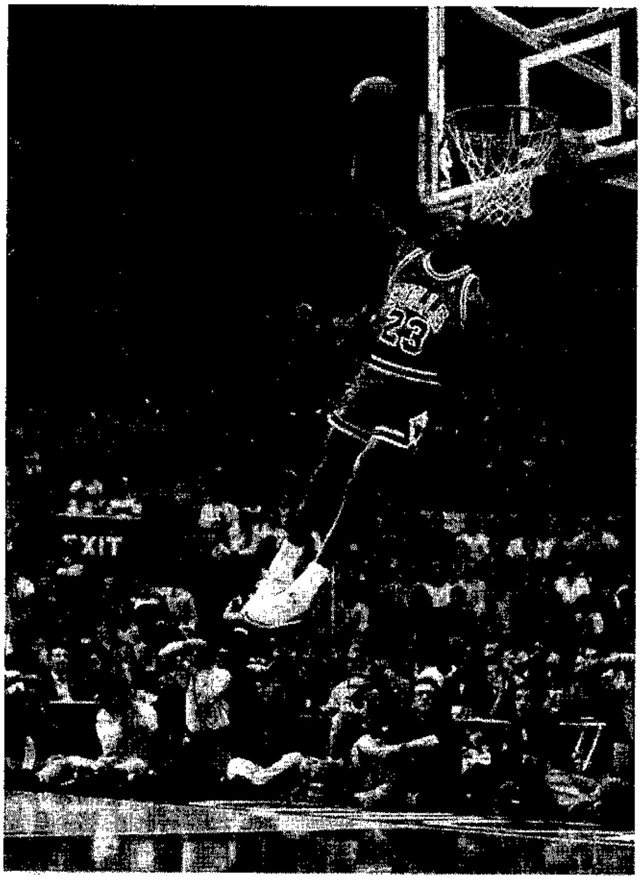
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۷

۵۸. توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم. ۲٫۲۵s طول می‌کشد تا توپ به ارتفاع ۳۶٫۸m برسد. (الف) سرعت اولیهٔ آن چقدر بوده است؟ (ب) سرعت آن در این ارتفاع چقدر است؟ (ج) توپ تا چه ارتفاعی بالاتر می‌رود؟

۵۹. شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و، در حالی که به آیزاک نیوتون فکر می‌کند، ناخودآگاه سیبی را از دستش رها می‌کند. سیب از لبهٔ پل می‌افتد و در همان لحظه لبهٔ جلویی کامیونی که از زیر پل می‌گذرد درست زیر لبهٔ پل است. سرعت کامیون ۵۵km/h (یعنی ۳۴mi/h) و طول آن ۱۲m (یعنی ۳۹ft) است. سیب درست مماس بر لبهٔ عقب کامیون به زمین می‌رسد. در این صورت، ارتفاع لبهٔ پل از زمین چقدر بوده است؟

۶۰. موشکی در راستای قائم از سطح زمین پرتاب می‌شود و به مدت ۱٫۰min با شتاب ثابت ۲۰m/s^2 به بالا حرکت می‌کند. در این لحظه سوخت موشک به کلی تمام می‌شود و حرکت آن به شکل سقوط آزاد ادامه می‌یابد. (الف) بیشترین ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) از زمان برخاستن موشک، چقدر طول می‌کشد تا موشک دوباره به زمین برگردد؟ (از تغییرات g در اثر تغییر ارتفاع چشم بپوشید.)

۶۱. یک بازیکن بسکتبال ۷۶cm به طرف بالا می‌پرد تا توپ را توی سبد "بکوبد". (الف) صعود ۱۵cm بالایی مسیر چقدر طول می‌کشد؟ (ب) صعود ۱۵cm پایینی مسیر چقدر؟ آیا به کمک این اعداد می‌توانید



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۶۱

توضیح بدهید که چرا تعلیق بازیکنان در اوج پرش خیلی مشهورتر است؟ (شکل ۳۳).

۶۲. سنگی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با سرعت v از نقطهٔ A، و با سرعت $v/2$ از نقطهٔ B می‌گذرد. نقطهٔ B ۳٫۰۰m بالاتر از A است. (الف) مقدار v، و (ب) ارتفاع اوج سنگ نسبت به نقطهٔ B چقدر است؟

۶۳. آب از سوراخهای دوش به پایین چکه می‌کند. کف حمام، ۲۰۰cm زیر دوش است. قطره‌ها به فاصله‌های زمانی منظم به پایین می‌چکند، چنانکه وقتی قطرهٔ اول به زمین می‌رسد، قطرهٔ چهارم از دوش جدا می‌شود. در این لحظه هر یک از قطره‌های دیگر در چه مکانی است؟

۶۴. در "آزمایشگاه تحقیقات گرانشِ صفر" در مرکز تحقیقات لوئیس ناسا، یک برج سقوط، به ارتفاع ۱۴۵m، وجود دارد. این برج قائم و خلأ شده است. از جملهٔ تجهیزات این برج، کره‌ای به قطر ۱m است که می‌توان در آن وسایل آزمایشگاهی گذاشت و مجموعه را از برج رها کرد تا به صورت آزاد سقوط کند. (الف) این وسایل به چه مدت در حال سقوط آزادند؟ (ب) سرعت آنها در پایین برج چقدر بوده است؟ (ج) در پایین برج، شتاب ۲۵g به کره تحمیل می‌شود تا سرعت آن به صفر برسد.

در مدتی که این شتاب اعمال می‌شود، کره چه مسافتی را می‌پیماید؟

۶۵. توپی از ارتفاع ۲٫۲m رها می‌شود و پس از برخورد به زمین تا ارتفاع ۱٫۹m به بالا برمی‌گردد. اگر این توپ به مدت ۹۶ms با سطح زمین در تماس بوده باشد، در این مدت چه شتاب متوسطی (اندازه و جهت) داشته است؟

۶۶. چند سال پیش، زنی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۴۴ft سقوط کرد و روی یک جعبهٔ هواکش افتاد. جعبه را ۱۸in در هم فرو برد و، بی‌هیچ جراحت شدیدی، زنده ماند. شتابی که این زن طی برخورد با جعبه متحمل شده (با فرض ثابت بودن این شتاب) چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب g بیان کنید.

۶۷. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و نیمی از کل مسیر خود را در آخرین ثانیهٔ سقوط آزادش می‌پیماید. (الف) زمان و (ب) ارتفاع این سقوط چقدر بوده است؟ دربارهٔ جواب غیرقابل قبول معادلهٔ درجهٔ دومی که به‌دست می‌آورید توضیح بدهید.

۶۸. دو جسم، از یک ارتفاع و از حالت سکون، به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی شروع می‌شود که اولی ۱٫۰۰s از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصلهٔ دو جسم از یکدیگر به ۱۰٫۰m می‌رسد؟

۶۹. کلارا، و کمی پس از او جیم، از یک پل به پایین پریده‌اند؛ شکل ۳۴. جیم چه مدت بعد از کلارا پریده است؟ فرض کنید که قد جیم ۱۷۰cm است و سطح پرش را لبهٔ بالایی شکل بگیرید. فاصله‌ها را از روی شکل بسنجید.

شکل ۳۴. مسئلهٔ ۶۹

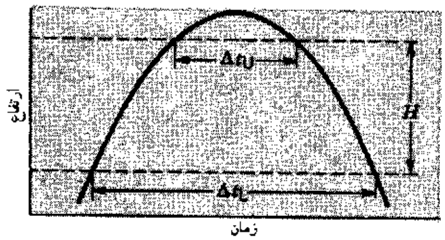
۷۰. بالونی با سرعت ۱۲٫۴m/s در ارتفاع ۸۱٫۳m از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کند. در این لحظه، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) این بسته با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ و (ب) چقدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

۷۱. چتربازی پس از پرش از هلی‌کوپتر، ۵۲٫۰m بدون اصطکاک سقوط می‌کند. سپس چترش را باز می‌کند و با شتاب کند کنندهٔ ۲٫۱۰m/s^2 به حرکتش ادامه می‌دهد، تا اینکه با سرعت ۲٫۹۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) این چترباز چه مدت در هوا بوده و (ب) سقوط او از چه ارتفاعی شروع شده است؟

۷۲. یک توپ سربی از تختهٔ پرشی که ۲٫۶m بالاتر از سطح آب استخر قرار دارد به آب می‌افتد. توپ با سرعت معینی بر سطح آب می‌خورد و تمام مسافت زیر آب را با همین سرعت می‌پیماید. وقتی توپ به کف استخر می‌رسد ۰٫۹۷s از شروع سقوط گذشته است. (الف) عمق استخر چقدر است؟ (ب) فرض کنید استخر را از آب خالی کنیم و توپ را از همان تختهٔ پرش چنان پرتاب کنیم که باز هم ۰٫۹۷s بعد به کف استخر برسد. توپ با چه سرعت اولیه‌ای پرتاب شده است؟

۷۳. اندازه‌گیری شتاب g در "آزمایشگاه ملی فیزیک" در انگلستان (که کارش تحقیق دربارهٔ استانداردهاست) به این ترتیب انجام شده است که یک گلولهٔ شیشه‌ای را در یک لولهٔ خلأ مستقیماً به بالا پرتاب می‌کنند. گلوله بالا می‌رود و برمی‌گردد؛ نگاه کنید به شکل ۳۵. فرض کنید Δt_L زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در پایین لوله، و Δt_U زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در بالای لوله باشد. فاصلهٔ بین این دو نقطه، H است. نشان بدهید که

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۷۳

۷۴. یک بولبرینگ فولادی از شیروانی ساختمانی (با سرعت اولیهٔ صفر) به پایین می‌افتد. ناظری که کنار پنجره‌ای به ارتفاع ۱۲۰cm ایستاده است، متوجه می‌شود که ۰٫۱۲۵s طول می‌کشد تا بولبرینگ از بالا تا پایین پنجره را طی کند. بولبرینگ به زمین می‌خورد، یک برخورد کاملاً کشسان با سطح پیاده‌رو انجام می‌دهد، و ۲٫۰s پس از اینکه از لبهٔ پایینی پنجره گذشته بود، دوباره به آنجا برمی‌گردد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟ (اندازهٔ سرعت توپ، پس از برخورد کاملاً کشسان، همان اندازهٔ سرعت پیش از برخورد است.)

۷۵. شخصی که در انتهای اتاقی روبروی پنجره‌ای به ارتفاع $۱٫۱m$ ایستاده است مشاهده می‌کند که لنگه کفشی در نزدیکی سطح خارجی پنجره در راستای قائم صعود می‌کند و در مرز بالای پنـجره از دید خارج می‌شود؛ سپس برمی‌گردد و در مرز پایین پنجره از دید خارج می‌شود. اگر کل زمانی که لنگه کفش در معرض دید است $۰٫۷۴s$ باشد، لنگه کفش تا چه ارتفاعی از لبهٔ بالایی پنجره بالاتر رفته است؟

۳

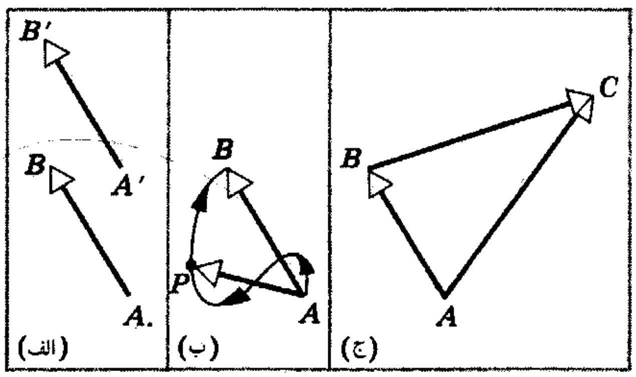
بردارها

در خیلی از قوانین فیزیک، بین کمیتها نه تنها روابط جبری بلکه روابط هندسی هم ظاهر می‌شوند. مثلاً مجسم کنید فرفره‌ای را که دارد به سرعت حول محورش می‌چرخد و در همین حال خود محور دوران هم به کندی حول راستای قائم دِر گردش است. نمایش این ارتباطِ هندسی با معادلات جبری مشکل است. اما با استفاده از نمایش برداریِ متغیرهای فیزیکی، تنها یک معادله برای توصیف رفتار فرفره کافی است، به کمک بردارها می‌شود بسیاری از قوانین فیزیک را به‌صورت موجزتری بیان کرد. گاهی در شکل برداریِ قوانین فیزیکی می‌توانیم ارتباطها یا تقارنهایی را ببینیم که دیدنشان در معادلات جبری، به‌خاطر پیچیدگی ظاهر این معادلات، دشوار است.

در این فصل، بعضی از ویژگیها و کاربردهای بردار را مطالعه می‌کنیم و با عملیات ریاضی مربوط به بردارها آشنا می‌شویم. خواهیم دید که نمادهای آشنای حساب، مثل $+$، $-$، و $\times$، در مورد بردارها معنی متفاوتی پیدا می‌کنند.

۳ـ۱ بردار و اسکالر

تغییر مکان ذره را جابه‌جایی می‌نامند. اگر ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود (شکل ۱الف)، جابه‌جایی آن‌را می‌توانیم با کشیدن خطی از A به B نشان بدهیم. برای نمایش جهت این جابه‌جایی می‌توانیم در نقطهٔ B یک علامت پیکان بگذاریم، تا معلوم شود که جابه‌جایی از A به B بوده است. لزومی ندارد که مسیر ذره از A به B خط راست بوده



شکل۱. بردارهای جابه‌جایی. (الف) بردارهای AB و $A'B'$ یکسان‌اند زیرا طول و جهت آنها یکی است. (ب) مسیر واقعی ذره از A به B می‌تواند به شکل این منحنی باشد، اما جابه‌جایی، بردار AB است. جابه‌جایی تا نقطهٔ میانی P، بردار AP است. (ج) پس از جابه‌جایی AB، ذره یک جابه‌جایی دیگر، BC، هم پیدا می‌کند. اثر کلی این دو جابه‌جایی، بردار AC است.

باشد؛ پیکان تنها اثر کلی و نهایی حرکت را نشان می‌دهد نه جزئیات حرکت واقعی را.

شکل ۱ب، مسیر واقعی یک ذره از A تا B را نشان می‌دهد. این مسیر با خط AB فرق دارد. اگر می‌توانستیم از ذره درنقطهٔ A، و مدتی بعد در یکی از نقاط میانی مسیر مثل P عکس بگیریم، بردار جابه‌جایی AP را به‌دست می‌آوردیم که حرکت کلی را در این بازهٔ زمانی نشان می‌دهد، اگرچه دربارهٔ مسیر واقعی حرکت از A تا P چیزی نمی‌گوید. به‌علاوه، جابه‌جایی‌ای مثل $A'B'$ (شکل ۱الف) که موازی، هم‌جهت، و هم‌طول با AB باشد نیز نمایندهٔ تغییر مکانی درست مثل AB است. بین این دو جابه‌جایی تمایزی قائل نمی‌شویم. بنابراین، جابه‌جایی با طول و جهت مشخص می‌شود.

به‌همین ترتیب می‌توان جابه‌جایی بعدی ذره از B به C را نشان داد (شکل ۱ج). اثر کلی دو جابه‌جایی معادل با یک جابه‌جایی از A به C است. می‌گوییم که AC جمع یا برایند دو جابه‌جایی AB و BC است. توجه کنید که این جمع، جمع جبری نیست و تنها با یک عدد مشخص نمی‌شود.

کمیتهایی راکه مثل جابه‌جایی رفتار می‌کنند بردار می‌نامیم. بنابراین، بردارها کمیتهایی هستند که جهت و اندازه دارند و طبق قواعد معینی (که شرح خواهیم داد) با هم ترکیب می‌شوند. بردار جابه‌جایی نمونهٔ خوبی برای بردارهاست. کمیتهای فیزیکی دیگری هم هستند که آنها

را با بردار نشان می‌دهند: مثلاً نیرو، سرعت، شتاب، میدان الکتریکی، و میدان مغناطیسی. بسیاری از قوانین فیزیک را می‌توان، با استفاده از بردار، به شکل جمع‌وجور نوشت. نمایش برداری، عملیات شامل این قوانین را هم اغلب بسیار ساده‌تر می‌کند.

بعضی کمیتها را می‌توان با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص کرد. چنین کمیتهایی را، که تنها مقدار دارند، اسکالر می‌نامند. از جملهٔ کمیتهای فیزیکی اسکالر، می‌توان از جرم، طول، زمان، چگالی، انرژی، و دما نام برد. با اسکالرها می‌توان طبق قوانین جبر معمولی کار کرد.

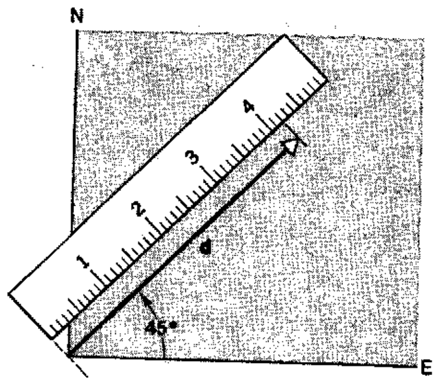
۲ـ۳ جمع بردارها: روش نموداری

برای نمایش بردار در نمودارها، یک پیکان می‌کشیم. طول پیکان باید متناسب با اندازهٔ بردار باشد (یعنی باید یک مقیاس انتخاب کنیم). راستای خط، راستای بردار است و جهت پیکان هم جهت بردار را مشخص می‌کند. مثلاً جابه‌جایی ۴۲m در جهت شمال شرقی را می‌توان در مقیاس ۱cm به‌ازای ۱۰m، با پیکانی به طول ۴٫۲cm نشان داد که با جهت شرق زاویهٔ °۴۵ به‌طرف بالا می‌سازد. نوک پیکان در انتهای بالای خط است (شکل ۲). بردارها را در متن‌های چاپی معمولاً با حروف سیاه نشان می‌دهند، مثلاً **d**. در دستنویسها برای مشخص کردن کمیتهای برداری معمولاً یک علامت پیکان بالای نماد آنها می‌گذارند. مثلاً $\vec{d}$.

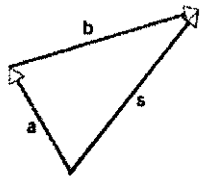
خیلی وقتها فقط اندازه (یا طول) بردار برای ما مهم است نه جهت آن. اندازهٔ **d** گاهی با $|\mathbf{d}|$ نشان داده می‌شود؛ ما در بیشتر موارد، اندازه را با شکل ایتالیک نماد، d، نشان می‌دهیم. نمادِ سیاه، هر دو ویژگی بردار، هم اندازه و هم جهت، را نشان می‌دهد. در متون دستنویس، اندازهٔ بردار را معمولاً با نماد بدون پیکان نشان می‌دهند.

اکنون شکل ۳ را در نظر بگیرید که در آن همان بردارهای شکل ۱ج را با اسامی دیگر آورده‌ایم. رابطهٔ بین این بردارها را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{s} \qquad (۱)$$



شکل۲. بردار **d** نشاندهندهٔ یک جابه‌جایی به اندازهٔ ۴۲m (در مقیاس ۱cm = ۱۰m) در جهت °۴۵ شمال‌شرقی است.



شکل۳. جمع برداری $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{s}$. این شکل را با شکل ۱ج مقایسه کنید.

قواعد جمع برداری به روش نموداری اینها هستند: (۱) بردار **a** را، در مقیاس مناسب، در جهت مورد نظر نسبت به محورهای مختصات رسم می‌کنیم. (۲) بردار **b** را با همان مقیاس و در جهت مناسب طوری رسم می‌کنیم که دُم آن در سر **a** باشد (جهت بردارها گاهی ممکن است یکی باشد). (۳) از دم **a** خطی به سر **b** می‌کشیم. به این‌ترتیب، بردار برایند **s** (یعنی جمع دو بردار) به‌دست می‌آید. اگر **a** و **b** بردارهای جابه‌جایی باشند، **s** هم یک جابه‌جایی است که معادل با دو جابه‌جایی متوالی **a** و **b** است. با تعمیم این روش می‌توان جمع چند بردار را هم به‌دست آورد.

از آنجا که بردارها با اعداد معمولی فرق می‌کنند، انتظار داریم عملیاتِ مربوط به آنها هم قواعد متفاوتی داشته باشند. معنی علامت " + " درمعادلهٔ ۱، با معنی این علامت در حساب یا جبر اسکالرها متفاوت است؛ این علامت، در مورد بردارها، به معنی انجام عملیاتی است که با عملیات مربوط به اسکالرها تفاوت دارد.

از بررسی دقیق شکل ۴، دو ویژگی مهم جمع برداری معلوم می‌شود:

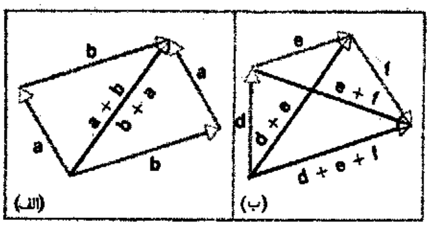
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad \text{(قانون جابه‌جایی)} \qquad (۲)$$

و

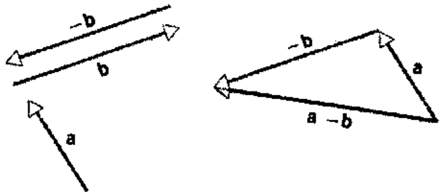
$$\mathbf{d}+(\mathbf{e}+\mathbf{f})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})+\mathbf{f} \quad \text{(قانون شرکت‌پذیری)} \qquad (۳)$$

معنی این قوانین آن است که ترتیب یا نوع گروه‌بندی بردارها، اثری در نتیجهٔ جمع برداری ندارد. از این نظر، جمع برداری و جمع اسکالر شبیه به‌هم‌اند.

از شکل ۴ب، طرز استفاده از روش نموداری برای جمع بیش از دو بردار ــ در این مورد $\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}$، معلوم می‌شود: دم هر بردار را



شکل۴. (الف) قانون جابه‌جایی جمع برداری: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. (ب) قانون شرکت‌پذیری جمع برداری: $\mathbf{d}+(\mathbf{e}+\mathbf{f})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})+\mathbf{f}$.



شکل۵. نمایش تفاضل دو بردار: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

روی سر بردار قبلی می‌گذاریم. بردار مجموع، برداری است که از دم بردار اول به سر بردار آخر رسم می‌شود.

با تعریف قرینهٔ بردار (یا منفی بردار)، می‌توان عمل تفریق را هم وارد جبر برداری کرد. قرینهٔ هر بردار، بردار دیگری است با همان طول اما در جهت مخالف. در این صورت، تفاضل دو بردار را این‌طور تعریف می‌کنیم (شکل ۵):

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}) \qquad (۴)$$

$-\mathbf{b}$ برداری به اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$ و در خلاف جهت آن است. از معادلهٔ ۴ معلوم می‌شود که $\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$.

ما برای نشان دادن این عملیات از جابه‌جایی استفاده کردیم، اما به‌یاد داشته باشید که، این قواعد برای همهٔ کمیتهای برداری ــ مثلاً سرعت، یا نیرو ــ به‌کارمی‌روند.

۳ـ۳ مؤلفه‌های بردار

جمع برداری را با روش نموداری معرفی کردیم، اما این روش برای بردارهای سه‌بعدی چندان مفید نیست و خیلی وقتها حتی در حالت دوبعدی هم مشکلاتی دارد. روش دیگر جمع برداری، روش تحلیلی است. در این روش باید بردار را به مؤلفه‌هایش، نسبت به یک دستگاه مختصات خاص، تجزیه کرد.

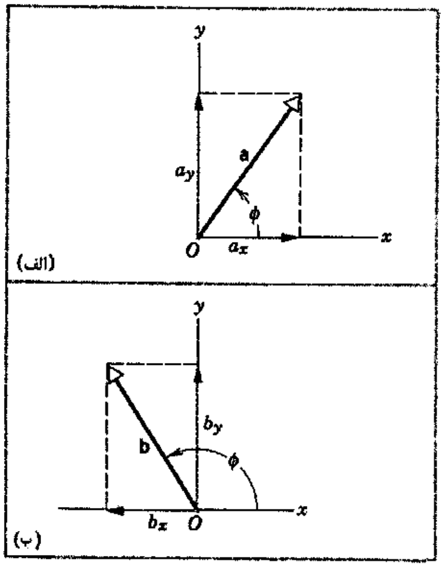
شکل ۶الف بردار $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد که دم آن روی مبدأ دستگاه مختصات دکارتی است. از سر $\mathbf{a}$ دو خط‌عمود بر محورهای مختصات می‌کشیم. کمیتهای a_x و a_y را، که به این ترتیب به‌دست می‌آیند، مؤلفه‌های (دکارتی) بردار $\mathbf{a}$ می‌نامند. هم این کار تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش است. این مؤلفه‌ها، بردار $\mathbf{a}$ را به‌طور کامل و یکتا مشخص می‌کنند: با داشتن a_x و a_y، به‌راحتی می‌شود بردار $\mathbf{a}$ را بازسازی کرد.

مؤلفه‌های بردار می‌توانند مثبت، منفی، یا صفر باشند. شکل ۶ب بردار $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد که برای آن $b_x<0$ و $b_y>0$ است.

روشن است که a_x و a_y از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_y=a\sin\phi \quad \text{و} \quad a_x=a\cos\phi \qquad (۵)$$

در این روابط، ϕ زاویه‌ای است که بردار $\mathbf{a}$ با جهت مثبت محور x می‌سازد؛ این زاویه در جهت پاد ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. چنانکه از شکل ۶ دیده می‌شود، علامت جبری مؤلفه‌های بردار بستگی به این دارد که زاویهٔ ϕ درکدام ربع صفحهٔ مختصات باشد. مثلاً اگر ϕ



شکل۶. (الف) مؤلفهٔ بردار $\mathbf{a}$ در جهت محور x، a_x و مؤلفهٔ آن در جهت محور y، a_y است. (ب) مؤلفهٔ x بردار $\mathbf{b}$ منفی است.

بین 90° و 180° باشد (شکل ۶ب)، مؤلفهٔ x بردار منفی و مؤلفهٔ y آن مثبت خواهد بود. مؤلفه‌های بردار شبیه کمیتهای اسکالرند: در هر دستگاهِ مختصات، هرمؤلفه تنها با یک عدد و یک علامت جبری مشخص می‌شود.

برداری را که به مؤلفه‌هایش تجزیه شده باشد می‌توانیم با استفاده از خود این مؤلفه‌ها هم مشخص کنیم. دراین صورت به جای دو عدد a (اندازهٔ بردار) و ϕ (جهت بردار نسبت به محور x) دو عدد دیگر a_x و a_y را در‌اختیار داریم. می‌شود از توصیف بردار برحسب مؤلفه‌هایش (a_x و a_y) به توصیف آن برحسب اندازه و جهت (a و ϕ) رسید و بالعکس. این دو توصیف با هم معادل‌اند. با توجه به شکل ۶الف، می‌توانیم a و ϕ را برحسب a_x و a_y به‌دست بیاوریم:

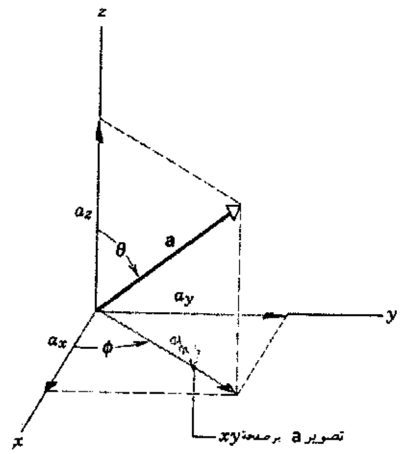
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad (۶الف)$$

و

$$\tan\phi=a_y/a_x \qquad (۶ب)$$

ربعی که ϕ در آن است از روی علامت a_x و a_y معین می‌شود.

در سه‌بعد هم، برای به‌دست آوردن مؤلفه‌ها همین کار را می‌کنیم: کافی است از سر بردار به هر یک از محورهای مختصات x، y، و z خطی عمود کنیم. شکل ۷ نموداری است که به کمک آن تشخیص مؤلفه‌ها آسانتر می‌شود. ابتدا مؤلفه (یا تصویر) $\mathbf{a}$ را بر صفحهٔ xy به‌دست می‌آوریم، و بعد مؤلفه‌های a_x و a_y را از تجزیهٔ این بردار تعیین می‌کنیم. البته می‌توانستیم به‌جای اینکه



شکل۷. بردار سه‌بعدی a، با مؤلفه‌های a_x، a_y، و a_z. مؤلفه‌های x و y را معمولاً از روی تصویر a بر صفحهٔ xy به‌دست می‌آورند. زاویهٔ θ بین a و محور z را زاویهٔ قطبی می‌نامند. زاویهٔ ϕ در صفحهٔ xy، بین تصویر a و محور x، زاویهٔ سمتی نامیده می‌شود. (زاویهٔ سمتی ϕ در اینجا هم همان مشخصاتی را دارد که در شکل ۶ داشت.)

با تصویر a در صفحهٔ xy کار کنیم، مستقیماً خود a را روی سه محورتصویر کنیم، و دقیقاً همان مؤلفه‌ها را به‌دست بیاوریم، اما نمایش این کار درصفحه، به خوبی حالت قبل ممکن نیست. از روابط هندسی شکل ۷، مؤلفه‌های بردار a به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$a_x = a \sin\theta \cos\phi, \quad a_y = a \sin\theta \sin\phi, \quad a_z = a \cos\theta \qquad (۷)$$

در تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش، گاهی مفید است که برداری به طول یک در جهتی معین تعریف کنیم. اغلب راحت‌تر است که بردارهای یکه را در جهت محورهای دستگاه خاصی که به کار می‌بریم بگیریم. در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه در جهت مثبت x، y، و z را معمولاً، به‌ترتیب، با i، j، و k نمایش می‌دهند (شکل ۸). در نمادگذاری دستی، بردارهای یکه را معمولاً با " کلاه" مثل $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$، و $\hat{\mathrm{k}}$ مشخص می‌کنند.

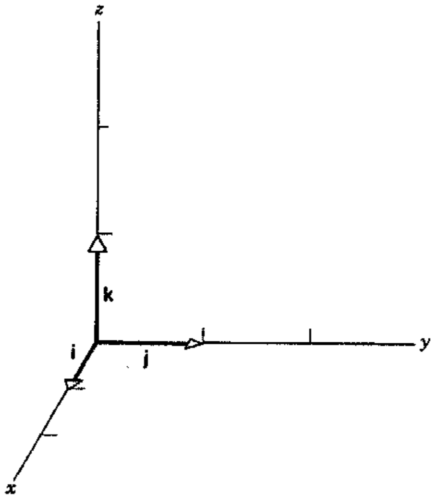
دقت کنید که لازم نیست i، j، و k در مبدأ باشند. اینها را هم، مثل بردارهای دیگر، می‌توانیم به هر کجای فضای مختصات که بخواهیم منتقل کنیم؛ تنها کافی است که جهتشان نسبت به محورهای مختصات تغییر نکند.

در حالت کلی، هر بردار a را در دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌توان برحسب مؤلفه‌هایش و بردارهای یکه نوشت:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (\text{۸الف})$$

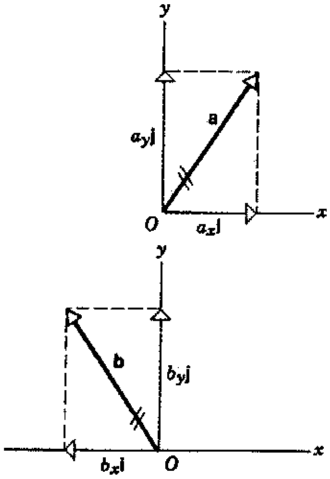
در دو بعد

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \qquad (\text{۸ب})$$



شکل۸. بردارهای یکهٔ i، j، و k، که به ترتیب برای مشخص کردن جهت مثبت محورهای x، y، و z به‌کارمی‌روند. این بردارها بدون بعدند و طولشان یک است.

معادلهٔ برداری ۸ب با روابط اسکالر معادلهٔ ۶ هم‌ارز است. هر دو معادله، بردار (a، یا a و ϕ) را به مؤلفه‌هایش (a_x و a_y) مربوط می‌کنند. گاهی کمیتهای $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ در معادلهٔ ۸ب را مؤلفه‌های برداری a می‌نامیم. شکل ۹ بردارهای a و b شکل ۶ را برحسب مؤلفه‌های برداریشان نشان می‌دهد. با استفاده از مؤلفه‌های بردار به‌جای خود بردار، خیلی از مسائل فیزیک ساده می‌شوند. به این معنی که اثر یک کمیت برداری را می‌توان با اثر مؤلفه‌های برداری آن معادل گرفت. در آینده، هر جا لازم باشد، صریحاً به مؤلفه‌های برداری اشاره می‌کنیم؛ هر جا که واژهٔ مؤلفه را به



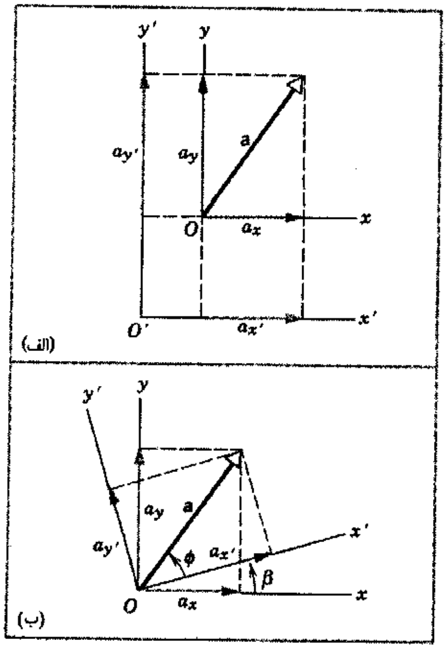
شکل۹. مؤلفه‌های‌برداری a و b. در همهٔ مسائل فیزیکی مربوط به بردارها، می‌توان خودِ بردار، مثلاً a، یا دو مؤلفهٔ برداری آن، $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ را به‌کار برد؛ نتیجه یکی است. اثر بردار a با اثر خالص دو بردار $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ معادل است. وقتی‌به‌جای یک بردار از مؤلفه‌هایش استفاده می‌کنیم، خوب است یک خط دوتایی روی خود بردار بزنیم تا یادمان باشد که دوباره آن‌را به‌حساب نیاوریم.

تنهایی به‌کار ببریم، منظورمان کمیتهای اسکالری از نوع a_x و a_y است.

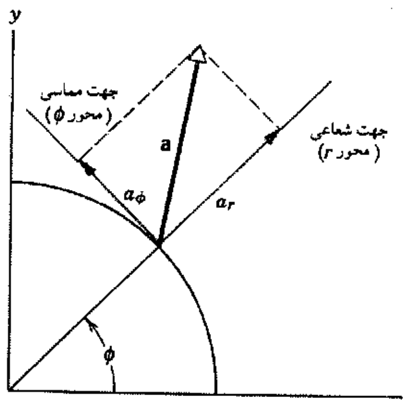
دستگاههای مختصات دیگر (اختیاری)

دستگاههای مختصات دیگری هم هستند که ممکن است برای تحلیل شرایط فیزیکی معینی مفید باشند. مثلاً، دستگاه مختصات دوبعدی xy را می‌توان به دو طریق تغییرداد: (۱) می‌توان مبدأ دستگاه مختصات را به محل دیگری در صفحهٔ xy منتقل کرد که به این کار می‌گویند انتقال دستگاه مختصات، یا (۲) می‌توان محورهای xy را حول مبدأ ثابت چرخاند، که عبارت است از دوران دستگاه مختصات. در هر مورد، بردار را ثابت نگه می‌داریم و محورهای مختصات را تغییر می‌دهیم. شکل ۱۰ اثر این دو تغییر را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ها در مورد اول (شکل ۱۰الف) تغییر نمی‌کنند، اما در مورد دوم (شکل ۱۰ب) تغییر می‌کنند.

در شرایطی که وضعیت فیزیکی مورد نظر، تقارن خاصی دارد، شاید بهتر باشد دستگاه مختصات دیگری برای تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش انتخاب کنیم. مثلاً می‌شود جهتهای شعاعی و مماسی دستگاه مختصات قطبی را انتخاب کرد؛ شکل ۱۱. در این مورد هم، مؤلفه‌های روی هر محور را درست شبیه به دستگاه xyz معمولی به‌دست می‌آوریم؛ یعنی از سر بردار به هر محور خطی عمود می‌کنیم.



شکل۱۰. (الف) مبدأ O دستگاه مختصات شکل ۶الف به نقطهٔ O' رفته یا منتقل شده است. مؤلفه‌های x و y بردار **a** با مؤلفه‌های x' و y' آن برابرند. (ب) محورهای x و y به‌اندازهٔ زاویهٔ β چرخیده‌اند. مؤلفه‌های x' و y' با مؤلفه‌های x و y متفاوت‌اند (دقت کنید که مؤلفهٔ y' در این مورد از مؤلفهٔ x' کوچکتر است، در حالی‌که در شکل ۶الف مؤلفهٔ y از مؤلفهٔ x بزرگتر بود)، اما بردار **a** عوض نشده است. محورهای مختصات را به اندازهٔ چه زاویه‌ای باید چرخاند تا مؤلفهٔ y' صفر شود؟



شکل۱۱. تجزیهٔ بردار **a** به مؤلفه‌های شعاعی و مماسی. این مؤلفه‌ها کاربرد زیادی در بررسی حرکت دایره‌ای (فصلهای ۴ و ۱۱) دارند.

تعمیمهای سه‌بعدی شکل ۱۱ (مختصات استوانه‌ای یا کروی)، در تحلیل بسیاری از موارد مهم فیزیکی، برتری چشمگیری بر دستگاه مختصات دکارتی دارند. مثلاً نیروی گرانشی زمین که بر اجسام دوروارد می‌شود تقارن کروی دارد. بنابراین، توصیف خواص آن در مختصات کروی بسیار ساده‌تراست. نیروی مغناطیسی حاصل از سیمهای بلند و راست حامل جریان تقارن استوانه‌ای دارد. پس، توصیف آن در مختصات استوانه‌ای ساده‌تر می‌شود.

۳ـ۴ جمع بردارها: روش مؤلفه‌ای

دیدیم که چگونه بردارها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. اکنون جمع برداری را با یک روش تحلیلی بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که **s** جمع بردارهای **a** و **b** باشد:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{۹}$$

اگر دو بردار، مثل **s** و $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، با هم برابر باشند، باید اندازه‌شان یکی باشد و در یک جهت باشند. چنین چیزی تنها وقتی ممکن است که مؤلفه‌های متناظر آنها یکسان باشد. بر این نتیجه‌گیری مهم تأکید می‌کنیم:

- دو بردار فقط به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های نظیرشان با هم برابر باشند.

درمورد بردارهای معادلهٔ ۹، می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

از برابر گرفتن مؤلفه‌های x در دو طرف معادلهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x \tag{۱۱الف}$$

و برای مؤلفه‌های y نتیجه می‌شود که

$$s_y = a_y + b_y \tag{۱۱ب}$$

مجموعهٔ این دو معادلهٔ جبری با تک رابطهٔ برداری معادلهٔ ۹ هم‌ارز است.

به‌جای مشخص کردن مؤلفه‌های s، می‌توان طول وجهت آن‌را مشخص کرد:

$$s = \sqrt{s_x^۲ + s_y^۲} = \sqrt{(a_x + b_x)^۲ + (a_y + b_y)^۲} \qquad (\text{۱۲الف})$$

و

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \qquad (\text{۱۲ب})$$

قاعدهٔ جمع برداری با این روش از این قرار است. (١) هر بردار را به مؤلفه‌هایش تجزیه می‌کنیم و علامت جبری هر مؤلفه را هم در نظر می‌گیریم. (۲) مؤلفه‌های مربوط به هر محور را، با در نظرگرفتن علامت جبری‌شان، با هم جمع می‌کنیم. (۳) مجموعهایی که به این ترتیب حاصل می‌شوند، مؤلفه‌های بردار مجموع‌اند. با داشتن مؤلفه‌های بردارِ مجموع، به‌راحتی می‌شود آن‌را در فضا بازسازی کرد.

جمع کردن بردارها با روش تجزیه به مؤلفه‌ها (به‌جای جمع مستقیم خود بردار با استفاده از روابط مثلثاتی) این مزیت را دارد که در آن همیشه با مثلثهای قائم‌الزاویه سروکار داریم، و این محاسبات را ساده می‌کند.

در جمع برداری به روش مؤلفه‌ای، با انتخابِ به‌جای محورهای مختصات می‌توان کار را ساده‌تر کرد. بعضی وقتها، مؤلفه‌های بردار را نسبت به یک دسته محورهای خاص از همان ابتدا می‌دانیم؛ در این صورت، محورهایی که باید انتخاب کرد واضح است. در موارد دیگر با انتخاب معقول محورها می‌توانیم کار تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌ها را بسیار راحت‌تر کنیم. مثلاً محورها را می‌توان چنان انتخاب کرد که لااقل یکی از بردارها با یک محور موازی باشد؛ در این صورت، مؤلفه‌های آن بردار در راستای محورهای دیگر صفر می‌شوند.

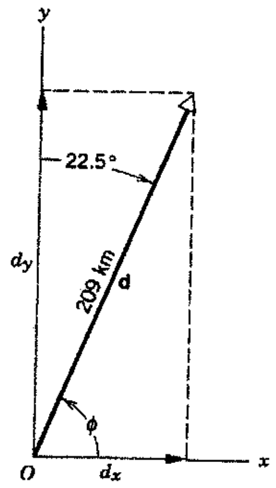
مثال ۱. هواپیمایی ۲۰۹km روی خط راستی در جهت °۲۲٫۵ شرقی نسبت به شمال می‌پیماید. این هواپیما از مبدأ خود چقدر به شمال و چقدر به شرق رفته است؟

حل: جهت مثبت محور x را جهت شرق و جهت مثبت محور y را جهت شمال اختیار می‌کنیم. بردار جابه‌جایی (شکل ۱۲) یا از مبدأ (نقطهٔ شروع)، با زاویهٔ °۲۲٫۵ نسبت به محور y (شمال) متمایل به جهت مثبت محور x (شرق) می‌کشیم. طول بردار، اندازهٔ ۲۰۹km را نشان می‌دهد. این بردار را $\mathbf{d}$ می‌نامیم؛ d_x مسافت پیموده شده به طرف شرق و d_y مسافت پیموده شده به طرف شمال است. داریم

$$\phi = ۹۰٫۰° - ۲۲٫۵° = ۶۷٫۵°$$

بنابراین (از معادلهٔ ۵)

$$d_x = d \cos \phi = (۲۰۹\text{km})(\cos ۶۷٫۵°) = ۸۰٫۰\text{km}$$



شکل۱۲. مثال ۱.

و

$$d_y = d \sin \phi = (۲۰۹\text{km})(\sin ۶۷٫۵°) = ۱۹۳\text{km}$$

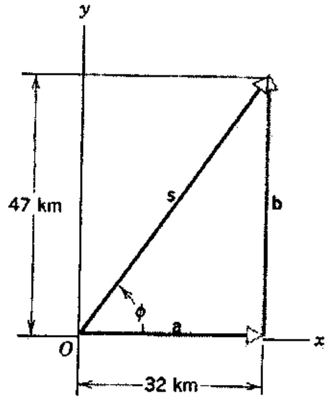
در این مثال مؤلفه‌های دکارتی را به‌کار بردیم، گرچه سطح زمین خمیده است و نمی‌تواند دکارتی باشد. مثلاً، هواپیمایی که از استوا در جهت شمال شرقی شروع به پرواز کند، سرانجام به نقطه‌ای می‌رسد که در شمال نقطهٔ شروع حرکت است؛ چنین چیزی هرگز نمی‌تواند در دستگاههای مختصات تخت رخ بدهد. به همین ترتیب، دو هواپیما که از دو نقطهٔ متفاوت روی استوا، همزمان با سرعت یکسان، به طرف شمال (در مسیرهایی موازی با هم) پرواز کنند. سرانجام در قطب شمال به هم برمی‌خورند. این هم در دستگاههای مختصات تخت غیرممکن است. اما اگر محاسبات ما محدود به فواصلی باشد که در مقایسه با شعاع زمین (۶۴۰۰km) کوچک‌اند، با خیال آسوده می‌توانیم مختصات دکارتی را برای تحلیل جابه‌جاییهای روی سطح زمین به‌کار ببریم.

مثال ۲. اتومبیلی در یک جادهٔ تخت ۳۲km به طرف شرق می‌رود. سپس در یک تقاطع به سوی شمال می‌پیچد و ۴۷km در آن جهت طی می‌کند. جابه‌جایی کل این اتومبیل را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمین اختیار می‌کنیم. جهت مثبت x آن‌را به طرف شرق، و جهت مثبت y آن‌را به طرف شمال می‌گیریم. شکل ۱۳، دو جابه‌جایی متوالی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. جابه‌جایی کل $\mathbf{s}$، از $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ به‌دست می‌آید. چون $\mathbf{b}$ در راستای x و $\mathbf{a}$ در راستای y مؤلفه‌ای ندارند، از معادلات ۱۱ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x = ۳۲\text{km} + ۰ = ۳۲\text{km}$$

$$s_y = a_y + b_y = ۰ + ۴۷\text{km} = ۴۷\text{km}$$



شکل۱۳. مثال ۲.

به‌این ترتیب، اندازه و جهت s (از معادلهٔ ۱۲) عبارت است از

$$s = \sqrt{s_x^{۲} + s_y^{۲}} = \sqrt{(۳۲\text{km})^{۲} + (۴۷\text{km})^{۲}} = ۵۷\text{km}$$

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{۴۷\text{km}}{۳۲\text{km}} = ۱٫۴۷,\quad \phi = \tan^{-۱}(۱٫۴۷) = ۵۶°$$

پس، اندازهٔ بردار جابه‌جایی کل برابر با ۵۷km، و جهت آن °۵۶ به‌طرف شمالِ شرق است.

مثال ۳. سه بردار که در یک صفحه واقع شده‌اند، در یک دستگاه مختصات دکارتی عبارت‌اند از

$$\mathbf{a} = ۴٫۳\mathbf{i} - ۱٫۷\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = -۲٫۹\mathbf{i} + ۲٫۲\mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{c} = -۳٫۶\mathbf{j}$$

یکای مؤلفه‌ها یکسان است. بردار برایند s، یعنی جمع این سه بردار را پیدا کنید.

حل: معادلات ۱۱ را به مورد سه بردار تعمیم می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x + c_x = ۴٫۳ - ۲٫۹ + ۰ = ۱٫۴$$

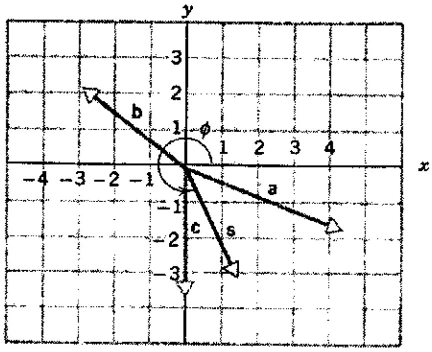
و

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -۱٫۷ + ۲٫۲ - ۳٫۶ = -۳٫۱$$

بنابراین

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} = ۱٫۴\mathbf{i} - ۳٫۱\mathbf{j}$$

شکل ۱۴ همهٔ این بردارها را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات ۶



شکل۱۴. مثال ۳.

معلوم می‌شود که اندازهٔ s برابر با ۳٫۴ است و زاویهٔ ϕ که s با جهت مثبت x می‌سازد عبارت است از

$$\phi = \tan^{-۱}(-۳٫۱/۱٫۴) = ۲۹۴°$$

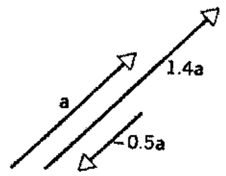
که پادساعتگرد از جهت x+ اندازه‌گیری می‌شود. خیلی از ماشین حسابهای جیبی، جواب arctan را بین °۹۰+ و °۹۰− می‌دهند. مثلاً در مورد این مثال °۶۶− (از ماشین حساب) به‌دست می‌آید که می‌دانیم با °۲۹۴ همارز است. اما توجه کنید که اگر می‌خواستیم $\tan^{-۱}(۳٫۱/-۱٫۴)$ را حساب کنیم باز هم همین جواب را می‌گرفتیم، در حالی که باید زاویه‌ای در ربع دوم به‌دست بیاوریم. در این نوع مسائل اگر شکلی نظیر شکل ۱۴ بکشیم جلوی اشتباه گرفته می‌شود، و در صورت لزوم می‌توانیم مقدار حاصل از ماشین حساب را، با استفاده از اتحاد $\tan(-\phi) = \tan(۱۸۰° - \phi)$، به زاویه‌ای تبدیل کنیم که در ربع درست واقع شده است.

۳ـ۵ ضرب بردارها

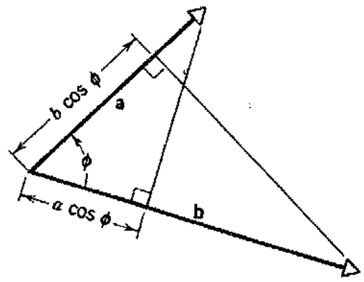
وقتی کمیتهای اسکالر را با هم جمع می‌کنیم، همهٔ آنها باید ابعاد یکسانی داشته باشند، و بعد حاصل‌جمع آنها هم همان خواهد بود. این قاعده در جمع برداری هم هست. اما می‌شود کمیتهای اسکالر با ابعاد متفاوت را در هم ضرب کرد، و حاصلی به‌دست آورد که ابعاد آن (یعنی حاصل‌ضربِ ابعاد عوامل ضرب) با ابعاد هر یک از عوامل اولیه تفاوت دارد؛ مثلاً فاصله = سرعت × زمان.

مثل اسکالرها، بردارهایی از انواع متفاوت را هم می‌توان در هم ضرب کرد وکمیتی با بعد جدید به‌دست آورد. چون بردار علاوه بر اندازهٔ جهت هم دارد، ضرب بردارها نمی‌تواند دقیقاً مثل ضرب اسکالرها باشد. برای ضرب بردارها باید قواعد دیگری داشته باشیم.

سه نوع عمل ضرب برای بردارها تعریف می‌کنیم: (۱) ضرب اسکالر در بردار، (۲) ضرب دو بردار در هم، چنانکه حاصل ضرب اسکالر باشد. و (۳) ضرب دو بردار درهم، چنانکه حاصل‌ضرب هم بردار باشد. امکانات دیگری هم وجود دارد که در اینجا بررسی نمی‌کنیم.



شکل۱۵. ضرب اسکالر c در بردار **a**، بردار $c\mathbf{a}$ را می‌دهد که اندازهٔ آن $|c|$ برابر اندازهٔ **a** است. جهت $c\mathbf{a}$ همان جهت **a** است اگر c مثبت باشد، و خلاف جهت **a** است اگر c منفی باشد. در این شکل $c = +۱٫۴$ و $c = -۰٫۵$ مثال زده شده است.



شکل۱۶. حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (یعنی $ab\ \cos\ \phi$) درواقع حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار (مثلاً a) و مؤلفهٔ بردار دیگر در جهت بردار اولی ($b\ \cos\ \phi$) است.

۱. ضرب اسکالر در بردار. معنی ضرب اسکالر در بردار ساده است: حاصل‌ضرب اسکالر c در بردار **a**، که با $c\mathbf{a}$ نشانش می‌دهیم، طبق تعریف، برداری است که اندازهٔ آن $|c|$ برابر اندازهٔ بردار **a** است. جهت $c\mathbf{a}$ همان جهت **a** است اگر c مثبت باشد، و در خلاف جهت **a** است اگر c منفی باشد(شکل ۱۵). برای تقسیم بردار بر اسکالر، در واقع بردار را در معکوس آن اسکالر ضرب می‌کنیم. اغلب، اسکالر مورد نظر یک عدد خالص نیست، بلکه کمیتی فیزیکی است که بعد و یکا دارد.

۲. ضرب دو بردار با حاصلِ اسکالر. حاصل‌ضرب اسکالر[1] دو بردار **a** و **b**، که با $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ نشانش می‌دهیم، طبق تعریف برابر است با

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\ \cos\ \phi \qquad (۱۳)$$

که در آن، a اندازهٔ بردار **a**، b اندازهٔ بردار **b**، و $\cos\ \phi$ کسینوس زاویهٔ بین دو بردار است (شکل ۱۶). به‌خاطر نقطهٔ بین **a** و **b**، این ضرب را ضرب نقطه‌ای **a** و **b** نیز می‌نامند و آن‌را " **a** نقطه **b** " می‌خوانند. حاصل‌ضرب نقطه‌ای مستقل از دستگاه مختصاتی است که انتخاب می‌شوند.

چون a و b اسکالرند و $\cos\ \phi$ عددی خالص است، حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار هم اسکالر است. حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار را می‌توان حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار در مؤلفهٔ بردار دوم در جهت اولی در نظر گرفت، شکل ۱۶؛ پس این حاصل‌ضرب را می‌توان به‌صورت $a(b\ \cos\ \phi)$ یا به‌صورت $b(a\ \cos\ \phi)$ بیان کرد.

می‌توانستیم $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ را هر چیزی تعریف کنیم، مثلاً $a^{۱/۳}b^{۱/۴}\tan(\phi/۲)$، اما چنین چیزی در فیزیک به درد نمی‌خورد. با تعریف معمول ضرب اسکالر، خیلی از کمیتهای مهم فیزیکی را می‌توانیم برحسب حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار بیان کنیم، از جمله کار مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی، پتانسیل الکتریکی، توان الکتریکی، و چگالی انرژی الکترومغناطیسی را در فصلهای بعدی همین کتاب، این کمیتها را برحسب همین حاصل‌ضرب تعریف خواهیم کرد.

اگر دو بردار برهم عمود باشند، حاصل‌ضرب نقطه‌ای آنها صفر می‌شود. با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای، می‌توان روابط زیر را برای بردارهای یکهٔ دکارتی **i**، **j**، و **k** به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = ۱ \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = ۰ \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با استفاده از این روابط، حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار **a** و **b** را در دستگاه مختصات سه‌بعدی xyz می‌توانیم برحسب مؤلفه‌های این دو بردار بنویسیم (مسئلهٔ ۳۵):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (۱۵)$$

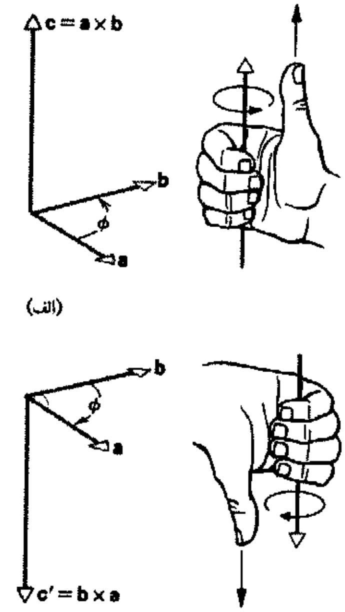
۳. ضرب دو بردار با حاصلِ بردار. حاصل‌ضرب برداری.[2] دو بردار **a** و **b**، که به‌صورت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نشان داده می‌شود، بردار **c** است، $(\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ چنانکه اندازهٔ آن، طبق تعریف، برابر است با

$$c = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\ \sin\ \phi \qquad (۱۶)$$

که ϕ زاویهٔ (کوچک) بین **a** و **b** است. البته **a** و **b** با هم دو زاویهٔ متفاوت می‌سازند: یکی ϕ (شکل ۱۶) و دیگری $۲\pi - \phi$، در عملیات برداری همیشه زاویهٔ کوچکتر را انتخاب می‌کنیم. برای حاصل‌ضرب اسکالر (معادلهٔ ۱۳) فرقی نمی‌کند که کدام بردار را انتخاب کنیم، چون $\cos(۲\pi - \phi) = \cos\ \phi$ است. اما در معادلهٔ ۱۶ فرق می‌کند، چون $\sin(۲\pi - \phi) = -\sin\ \phi$ است.

راستای **c**، حاصل‌ضرب برداری **a** و **b**، طبق تعریف بر صفحهٔ متشکل از **a** و **b** عمود است. برای تعیین جهت بردار **c** از "قاعدهٔ دست راست" (شکل ۱۷) استفاده می‌کنیم. دو بردار **a** و **b** بکشید که دم آنها روی هم باشد و محوری در نظر بگیرید که از مبدأ **a** و **b** بگذرد و بر صفحهٔ آنها عمود باشد. انگشتان دست راست را دور این محور بپیچید و بردار **a** را، از طریق زاویهٔ کوچکتر بین **a** و **b**، با نوک انگشتان به طرف بردار **b** بچرخانید؛ در این عمل شست را کشیده نگه دارید. جهت شست، جهت حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. این دستورالعمل، یک قرارداد است. دو بردار **a** و **b** یک صفحه تشکیل می‌دهند؛ دو جهت (مخالف) برای بردار **c** عمود بر این صفحه وجود دارد. انتخاب ما بر اساس قراردادِ دست راست

۱. به این ضرب "ضرب داخلی" هم می‌گویند. (و)
۲. به این ضرب "ضرب خارجی" هم می‌گویند. (و)



شکل ۱۷. قاعدهٔ دست راست برای حاصل‌ضرب برداری. (الف) بردار **a** را با انگشتهای دست راست بچرخانید تا روی **b** بیفتد. شست شما جهت **c** را نشان می‌دهد. (ب) با عکس این عمل (چرخاندن **b** به سمت **a**) معلوم می‌شود که $(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

است. (قرارداد دست چپ، برای حاصل‌ضرب برداری جهتی مخالف جهت بالا می‌دهد.)

اگر ϕ برابر با ۹۰° باشد، **a**، **b**، و **c**(یعنی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$)، بر هم عمودند و جهتهای یک دستگاه مختصات قائم سه‌بعدی را مشخص می‌کنند.

دقت کنید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ با $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ فرق دارد، یعنی ترتیب عوامل در حاصل‌ضرب برداری مهم است. در حاصل‌ضرب اسکالر چنین نیست، زیرا ترتیب عوامل در جبر یا حساب اثری بر حاصل‌ضرب ندارد. در واقع، $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ است (شکل ۱۷). این را از اینجا می‌توان فهمید که $ab\ \sin\ \phi$ با $ba\ \sin\ \phi$ برابر است، اما جهت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر خلاف جهت $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ است. حاصل‌ضرب برداری هم، با توجه به تعریف بالا، مستقل از محورهای مختصاتی است که انتخاب می‌کنیم.

سه بردار یکهٔ **i**، **j**، و **k** در یک دستگاه مختصات راستگرد با رابطهٔ $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$ به‌هم مربوط می‌شوند. (در واقع، به همین ترتیب است که مقصود از دستگاه راستگرد تعریف می‌شود. ما همواره از دستگاه مختصات راستگرد استفاده می‌کنیم، مگر آنکه خلاف آن را ذکر کنیم.) با حفظ ترتیب دوری **i**، **j**، و **k**، می‌توانیم روابط $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$ و $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ را هم بنویسیم. اگر ترتیب دوری را عوض کنیم، یک علامت منفی وارد می‌شود، مثلاً $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. حاصل‌ضرب برداری دو بردار یکهٔ یکسال صفر است ($\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = ۰$)؛ در واقع، حاصل‌ضرب هر بردار درخودش صفر است ($\mathbf{a}\times\mathbf{a} = ۰$). با استفاده از این روابط برای حاصل‌ضرب برداری بردارهای یکهٔ یکسان و متفاوت، می‌شود نشان داد (مسئلهٔ ۳۶) که

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \qquad (۱۷)$$

علت اینکه حاصل‌ضرب برداری را این‌طور تعریف می‌کنیم آن است که چنین تعریفی در فیزیک مفید است. در فیزیک اغلب به کمیتهایی برمی‌خوریم که بردارند و حاصل‌ضرب برداری آنها، با تعریف بالا، معنی فیزیکی مهمی دارد. از جملهٔ کمیتهایی که حاصل‌ضرب برداری‌اند می‌توانیم از گشتاور، تکانهٔ زاویه‌ای، نیروی وارد بر بارهای متحرک در میدان مغناطیسی، و شار انرژی الکترومغناطیسی را نام ببریم. بعداً که این کمیتها را بررسی می‌کنیم، ارتباطشان با حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را هم مشخص خواهیم کرد.

حاصل‌ضربهای تعمیم‌یافتهٔ بردارها (اختیاری)

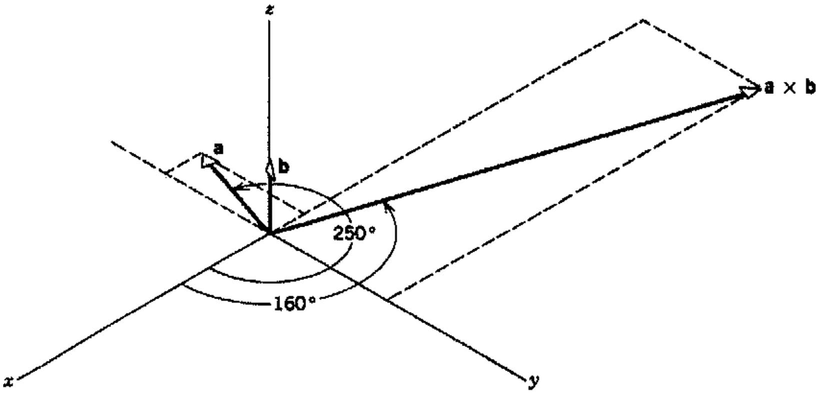
حاصل‌ضرب اسکالر، ساده‌ترین حاصل‌ضرب دو بردار است. ترتیب عوامل بر این حاصل‌ضرب اثری ندارد. حاصل‌ضرب برداری در ردیف بعدی است. در این مورد ترتیب عوامل بر حاصل‌ضرب مؤثر است، اما این تأثیر تنها به‌صورت یک منهای یک است؛ اگر ترتیب عوامل را عوض کنیم، جهت حاصل‌ضرب هم عوض می‌شود. حاصل‌ضربهای مفید دیگری هم برای بردارها داریم که البته پیچیده‌ترند. مثلاً، با ضرب هر یک از سه مؤلفهٔ یک بردار در سه مؤلفهٔ برداری دیگر، می‌شود یک تانسور ساخت. به این ترتیب تانسور (از رتبهٔ دو) با ۹ عنصر، بردار با سه عنصر، و اسکالر با یک عنصر مشخص می‌شوند. تنش مکانیکی، لختی دورانی، و کرنش از جمله کمیتهای فیزیکی‌اند که می‌توانیم آنها را با تانسور نمایش بدهیم. البته کمیتهای پیچیده‌تر از این هم می‌توانند در کار باشند، اما در این کتاب فقط با اسکالر و بردار سروکار خواهیم داشت.

مثال ۴. بردار **a** درصفحهٔ xy در جهت ۲۵۰° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x قرار دارد و اندازه آن ۷٫۴ واحد است. اندازهٔ بردار **b** برابر با ۵٫۰ واحد، و جهت آن جهت مثبت محور z است. (الف) حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ و (ب) حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را به‌دست بیاورید.

حل: (الف) چون **a** و **b** برهم عمودند، زاویهٔ ϕ بین آنها ۹۰°، و $\cos\ \phi = \cos ۹۰° = ۰$ است. بنابراین، از معادلهٔ ۱۳، حاصل‌ضرب اسکالر برابر است با

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\ \cos\ \phi = ab\ \cos\ ۹۰° = (۷٫۴)(۵٫۰)(۰) = ۰$$

که با این امر که هیچ‌یک از این دو بردار، مؤلفه‌ای در راستای بردار دیگر ندارد.



شکل۱۸. مثال ۴.

(ب) اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری از معادلهٔ ۱۶ به‌دست می‌آید:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\ \sin\ \phi = (۷٫۴)(۵٫۰)\sin ۹۰^{\circ} = ۳۷$$

جهت حاصل‌ضرب برداری بر صفحهٔ متشکل از **a** و **b** عمود است. بنابراین، چنانکه در شکل ۱۸ نشان داده شده است، بردار حاصل‌ضرب در صفحهٔ xy (عمود بر **b**)، و با زاویهٔ $۲۵۰^{\circ} - ۹۰^{\circ} = ۱۶۰^{\circ}$ نسبت به جهت مثبت محور x واقع است (عمود بر **a** و طبق قاعدهٔ دست راست).

با استفاده از معادلهٔ ۱۷ می‌شود مؤلفه‌های $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را به‌دست آورد. ابتدا باید مؤلفه‌های **a** و **b** را پیدا کنیم:

$$a_x = ۷٫۴\cos ۲۵۰^{\circ} = -۲٫۵ \qquad b_x = ۰$$
$$a_y = ۷٫۴\sin ۲۵۰^{\circ} = -۷٫۰ \qquad b_y = ۰$$
$$a_z = ۰ \qquad b_z = ۵٫۰$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} =& [(-۷٫۰)(۵٫۰) - (۰)(۰)]\mathbf{i}\\ &+ [(۰)(۰) - (-۲٫۵)(۵٫۰)]\mathbf{j}\\ &+ [(-۲٫۵)(۰) - (-۷٫۰)(۰)]\mathbf{k}\\ =& -۳۵\mathbf{i} + ۱۳\mathbf{j}\end{aligned}$$

که با اندازه و جهت بردار حاصل‌ضرب در شکل ۱۸ سازگار است.

۳ـ۶ قوانین برداری در فیزیک[۱] (اختیاری)

شکل ۱۰ب را در نظر بگیرید؛ می‌شود نشان داد (موضوع مسئلهٔ ۵۱) که رابطهٔ مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی **a** در دستگاه دوران‌یافته $(x'y')$ با مؤلفه‌های همین بردار در دستگاه اصلی (xy) به‌صورت زیر است:

$$a_{x'} = a_x\cos\ \beta + a_y\sin\ \beta \qquad (۱۸\text{الف})$$

$$a_{y'} = -a_x\sin\ \beta + a_y\cos\ \beta \qquad (۱۸\text{ب})$$

در روابط بالا، β زاویهٔ چرخش دستگاه جدید نسبت به دستگاه قدیم است.

معادلات ۱۸ مثالی از معادلات تبدیل‌اند، که مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در یک دستگاه مختصات را به مؤلفه‌های آن در هر دستگاه دوران‌یافته تبدیل می‌کنند. با استفاده از این معادلات می‌شود تعریفی عامتر و دقیقتر برای بردار ارائه کرد. تا اینجا بردار را کمیتی فیزیکی تعریف کردیم که هم‌اندازه دارد و هم جهت، و عملیات با آن تابع قواعد خاصی است. اکنون، به‌جای این تعریف، تعریف مشخص‌تری ارائه می‌کنیم:

> هر کمیت فیزیکی (مثلاً سرعت یا نیرو) را می‌توان با بردار نشان داد اگر مؤلفه‌های آن، تحت دوران، طبق قواعد معادلات ۱۸ تبدیل شوند.

معادلات ۱۸ برای بردارهای فضای دوبعدی‌اند، اما می‌شود آنها را به سه‌بعد هم تعمیم داد. در هر حال همین مورد دوبعدی برای نشان دادن همهٔ مفاهیم اساسی کافی است.

چنانکه از شکل ۱۰ معلوم است، بردارها در اثر انتقال یا دوران محورهای مختصات تغییر نمی‌کنند یا ناوردا می‌مانند. کمیتهای فیزیکی معینی هستند که این خاصیت را دارند؛ مثلاً در مورد سرعت، شما و دوستتان، که در خانه‌ای در آن طرف خیابان است، هر دو یک سرعت برای اتومبیلی که از خیابان می‌گذرد به‌دست می‌آورید. (البته تا وقتی که خانه‌های شما نسبت به هم ساکن باشند!) کمیتهایی که چنین خواصی دارند، و از قواعد حساب برداری این فصل پیروی می‌کنند، با بردار نشان داده می‌شوند. از جملهٔ این کمیتها می‌توان از سرعت، شتاب، نیرو، تکانهٔ خطی، تکانهٔ زاویه‌ای، و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نام برد. معادلاتی که این کمیتها را به هم مربوط می‌کنند معادلات برداری‌اند؛ مثلاً $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = s$ (s اسکالر است)، $\mathbf{a} + ۲\mathbf{b} = ۶\mathbf{c}$، $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$، و غیره. خیلی از کمیتهای فیزیکی هم با اسکالر و معادلات اسکالر توصیف می‌شوند، مثلاً دما، فشار، جرم، انرژی، و زمان. یکی از ویژگیهای معادلات برداری آن است که بین کمیتهای فیزیکی، نه تنها روابط ریاضی بلکه روابط هندسی هم برقرار می‌کنند.

۱. حذف این بخش لطمه‌ای به پیوستگی مطالب این فصل نمی‌زند.

حالا چند مثال می‌آوریم از معادلاتی که بعداً در همین کتاب به تفصیل بررسی‌شان خواهیم کرد؛ فعلاً این معادلات را تنها به عنوان مثالهایی از شکلهای اساسی مطرح می‌کنیم.

با قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، شروع می‌کنیم (فصل ۵). این قانون، نیروی $\mathbf{F}$ لازم را، برای اینکه ذره‌ای به جرم m شتاب $\mathbf{a}$ پیدا کند، به‌دست می‌دهد. طرف راست معادله عبارت است از اسکالر جرم ضرب در بردار شتاب؛ طرف چپ بردار نیرو است. این معادله ساده می‌نماید، اما بسیار غنی است. ضرب را انجام می‌دهیم و مؤلفه‌های دو طرف را مساوی می‌گیریم. پس در واقع سه معادلهٔ مستقل به‌دست می‌آید: $F_x = ma_x$، $F_y = ma_y$، و $F_z = ma_z$. در بررسی چگونگی پاسخ ذره به نیرو، هر یک از این سه معادله را می‌شود جداگانه حل کرد. به این ترتیب، مثلاً مؤلفهٔ y نیرو هیچ اثری بر مؤلفهٔ x یا z شتاب ندارد؛ یا می‌توانیم بگوییم که جهت نیروی وارد بر سیستم، جهت شتاب آن‌را تعیین می‌کند (چون اگر برداری را در یک اسکالر مثبت ضرب کنیم، بردار دیگری در همان جهت به‌دست می‌آید). در فصل بعدی، که حرکت دوبعدی پرتابه تحت اثر گرانش را بررسی می‌کنیم، از این واقعیت استفاده خواهیم کرد.

قوانین شامل حاصل‌ضرب اسکالر در زمینه‌های متفاوتی پیش می‌آیند. نخستین مثالی که به آن برمی‌خوریم، تعریف کار مکانیکی W است؛ کاری که نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر سیستم انجام می‌دهد تا آن‌را به اندازهٔ $\mathbf{d}$ جابه‌جا کند. این کمیتِ اسکالر، حاصل‌ضرب اسکالر نیرو و جابه‌جایی است: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi$ (فصل ۷). لزومی ندارد که نیرو با جابه‌جایی موازی باشد؛ مثلاً تصور کنید سورتمه‌ای را با طنابی که از روی شانه‌تان رد کرده‌اید روی زمین می‌کشید. جابه‌جایی افقی است، اما نیرو (که در راستای طناب اعمال می‌شود) هم مؤلفهٔ افقی دارد و هم مؤلفهٔ عمودی. دقت کنید که، طبق رابطهٔ هندسی شکل ۱۷، فقط مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ در راستای $\mathbf{d}$ (یعنی $F \cos \phi$) در انجام کار شرکت می‌کند. اینجا هم، معادلهٔ برداری اطلاعاتی دربارهٔ روابط هندسی دربر دارد.

مثالی از قوانین فیزیکی شامل حاصل‌ضرب برداری، معادلهٔ $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است (فصل ۳۴). این معادلهٔ نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر بار الکتریکی q را که با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند به‌دست می‌دهد. شکل هندسی این نیرو (که از معادلهٔ برداری بالا به‌دست می‌آید) موجب می‌شود که مسیر ذرات باردار به‌صورت مدارهای دایره‌ای در بیاید؛ این همان چیزی است که در شتابدهنده‌های عظیم ذرات، مثل سیکلوترون، اتفاق می‌افتد. دقت کنید که نیرو همیشه هم بر سرعت و هم بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. اگر این معادلهٔ برداری نبود، درک اینکه چرا نیرو چنین رفتاری دارد دشوار می‌شد.

قوانین فیزیکی‌ای که با معادلات برداری بیان می‌شوند جهانی‌اند و به دستگاه مختصات به‌کار رفته بستگی ندارند. مثلاً، اگر حرکت ذرات باردار در میدان مغناطیسی را در دو دستگاه مختصات بررسی کنیم، که یکی نسبت به دیگری چرخیده باشد، البته معلوم می‌شود که مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{F}$ (نیرو)، $\mathbf{v}$ (سرعت)، و $\mathbf{B}$ (میدان مغناطیسی) در دو دستگاه متفاوت‌اند (شکل ۱۰ب). اما ناظرهای هر دو دستگاه این قانون فیزیکی را به شکل واحدی می‌بینند. یعنی در دستگاه چرخیده هم، بردارهای تبدیل‌یافته در رابطهٔ $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ صدق می‌کنند.

این خواص تبدیل، برای طبیعت چنان بدیهی به‌نظر می‌رسند که اغلب پیش خودمان فرض می‌کنیم که طبیعت باید این‌طور رفتار کند. مثلاً، صرف‌نظر از آثار صرفاً موضعی، نیروی الکتریکی بین دو الکترون که به فاصلهٔ معینی از یکدیگرند، نباید به این بستگی داشته باشد که مکان نسبی این دو الکترون را در راستای شمال به جنوب می‌سنجیم یا در راستای شرق به غرب. تصور جهانی که چنین خوشرفتار نباشد چندان دشوار نیست؛ مثلاً، ممکن است که طول بردار، در اثر انتقال یا دوران عوض شود. فیزیکدانها و ریاضیدانها در این باره تأمل کرده‌اند که چرا جهان ما چنین تقارنهایی (مثلاً انتقال یا دوران) دارد، و دریافته‌اند که بین تقارنهای طبیعت و کمیتهای معینی که طی فرایندهای فیزیکی پایسته می‌مانند (یعنی مقدار کل آنها تغییر نمی‌کند)، روابط جالبی وجود دارد. مثلاً، ناوردایی قوانین فیزیک تحت تقارن انتقال زمان (یعنی اینکه قانونی که مثلاً دوشنبه برقرار باشد، سه‌شنبه هم برقرار است) مستقیماً به قانون پایستگی انرژی می‌انجامد.

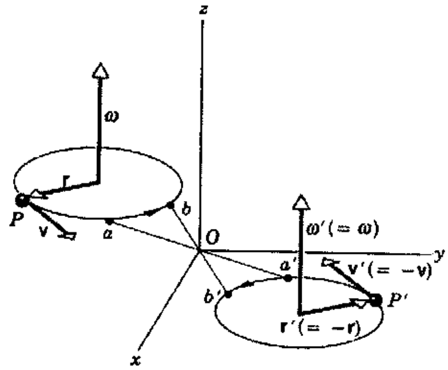
تقارن انعکاسی، بردارهای قطبی، و بردارهای محوری

نوع دیگری از تبدیل وجود دارد که کاملاً با انتقال و دوران متفاوت است. این تبدیل، وارون کردن دستگاه مختصات است، یعنی $x \to -x$، $y \to -y$، و $z \to -z$. به‌این ترتیب کل سیستم، نسبت به مبدأ مختصات، وارون می‌شود.

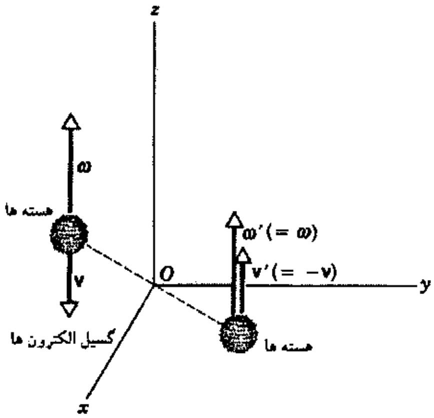
ممکن است تصور کنید که برای اعمال این تبدیل بر معادلات، کافی است که مؤلفه‌های هر بردار را منفی کنیم. (اسکالرها در اثر این تبدیل عوض نمی‌شوند). اگر جهت محور x را معکوس کنیم و بردار$\mathbf{a}$ را عوض نکنیم، روشن است که $a_x \to -a_x$. بنابراین، به‌جای اینکه دستگاه مختصات وارون رسم کنیم می‌توانیم بردار $-\mathbf{a}$ را در همان دستگاه مختصات قدیم بکشیم. این تصور برای دستهٔ بزرگی از کمیتهای فیزیکی‌ای که با بردار نمایش داده می‌شوند درست است؛ سرعت، شتاب، نیرو، تکانهٔ خطی، و میدان الکتریکی از آن جمله‌اند. این بردارهای خوش‌رفتار را به‌طور کلی بردار قطبی می‌نامند.

گروه دیگری از بردارها هستند که تحت وارونی چنین رفتار نمی‌کنند. مثلاً، غالباً مفید است که ذره‌ای را که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص کنیم (شکل ۱۹). اندازهٔ ω، عملاً می‌گوید که سرعت دوران ذره چقدر است؛ جهت ω بر صفحهٔ دایره عمود است و با قاعدهٔ دست راست به‌دست می‌آید. (اگر انگشتان دست راست خود را در جهت حرکت ذره خم کنید، شست کشیدهٔ شما در جهت ω است)

حالا فرض کنید مدار ذره را نسبت به مبدأ وارون کنیم، شکل ۱۹.



شکل۱۹. ذرهٔ P که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شود. اگر همهٔ مختصات را نسبت به مبدأ O وارون کنیم، ذرهٔ "وارونه" P' هم روی دایره می‌گردد و با بردار سرعت زاویه‌ای ω' مشخص می‌شود.



شکل۲۰. مجموعه‌ای از هسته‌های چرخان، که با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شوند، عمدتاً در جهت مخالف ω الکترون گسیل می‌کنند. در آزمایش وارونه، الکترونها در جهت ω' گسیل می‌شوند. آزمایش اصلی و آزمایش وارونه کاملاً با هم متفاوت‌اند. این نشان می‌دهد که تقارن وارونی در این واپاشیها نقض می‌شود.

بردار $\mathbf{r}$، محل ذرهٔ P نسبت به مرکز دایره، به $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ تبدیل می‌شود. سرعت هم به $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ذرهٔ اولیه از a به b می‌رود، ذرهٔ وارون شده از a' به b' می‌رود و جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) عوض نمی‌شود، پس $\omega' = \omega$ است. بنابراین سرعت زاویه‌ای، بر خلاف بردارهای قطبی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، تحت وارونی مختصات تغییر جهت نمی‌دهد. چنین برداری را بردار محوری یا شبه بردار می‌نامند: گشتاور و میدان مغناطیسی هم از این نوع بردارها هستند.

در فصل ۱۱، مبحث حرکت دورانی، خواهیم دید که بین بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، و ω یک رابطهٔ حاصل‌ضرب برداری وجود دارد، $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. اگر قرار بود که هر سه بردار تحت وارونی تغییر جهت بدهند، رابطهٔ بین سه بردار وارونه به شکل $-\mathbf{v} = (-\omega) \times (-\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$ در می‌آمد. اما این تناقض است: $\omega \times \mathbf{r}$ نمی‌تواند هم با $-\mathbf{v}$ و هم با $\mathbf{v}$ برابر باشد (مگر اینکه $\mathbf{v}$ صفر باشد که اینجا چنین نیست). بنابراین، لازم‌است که رابطهٔ‌تبدیل ω، حتماً به شکل $\omega' = \omega$ باشد تا رابطهٔ فیزیکی $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ در دستگاه وارونه هم شکل خود را حفظ کند، یعنی $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$. این همان چیزی است که از ناوردایی قوانین فیزیک تحت یک تبدیل خاص مختصات می‌فهمیم. یعنی، اگر یک قانون فیزیکی را به شکل معادله در یک دستگاه مختصات بنویسیم، بردارها را مطابق با تبدیل مختصات مورد نظر تبدیل کنیم، و بردارهای تبدیل‌یافته را در معادلهٔ مورد نظر بگذاریم، باید معادله‌ای به‌دست بیاید که با معادلهٔ اول هم‌ارز است.

تا حدود سال ۱۹۵۶ تصور بر این بود که قوانین فیزیک تحت وارونی از نوع شکل ۱۹، (و البته تحت انتقال و تحت دوران) تغییر نمی‌کنند. اما در سال ۱۹۵۶ کشف شد که تقارن وارونی، درنوع خاصی از واپاشیهای پرتوزا، واپاشی بتا، نقض می‌شود. در این واپاشیها، هستهٔ اتم الکترون گسیل می‌کند. هستهٔ اتم، مثل یک فرفرهٔ کوچک، حول محور خود می‌چرخد، و می‌شود به هرهسته برداری مانند ω نسبت داد که دوران آن‌را مشخص می‌کند. در آزمایش واپاشی بتا، جهت گسیل الکترون نسبت به جهت ω را بررسی می‌کردند (شکل ۲۰). اگر تعداد الکترونهایی که در جهت ω گسیل می‌شدند برابر با آنهایی بود که در خلاف جهت گسیل می‌شدند، آزمایش وارونه هم درست مثل آزمایش اصلی می‌بود و تقارن وارونی صدق می‌کرد. اما معلوم شد که بیشتر الکترونها در خلاف جهت ω گسیل می‌شوند. بنابراین، در آزمایش وارونه بیشتر الکترونها در جهت ω گسیل می‌شوند (زیرا در اثر وارونی علامت $\mathbf{v}$ عوض می‌شود اما علامت ω عوض نمی‌شود). آزمایش اصلی با تصویر آینه‌ای‌اش متفاوت است؛ بنابراین، تقارن وارونی و قانون پایستگی مربوط به آن، پایستگی پاریته، در این مورد معتبر نیست.[۱]

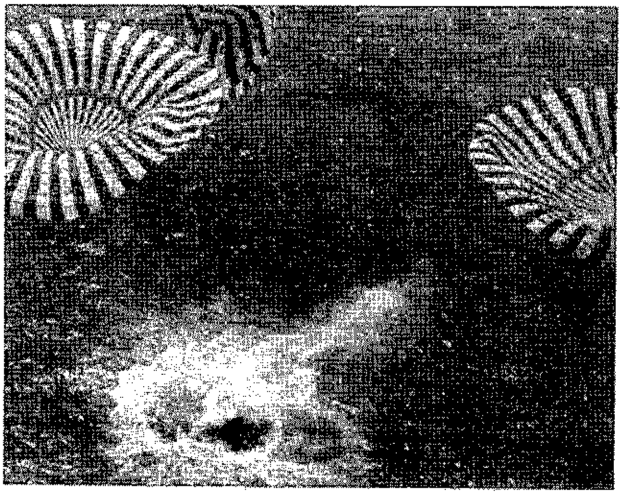
این آزمایش نحوهٔ تفکر فیزیکدانها را در بارهٔ فرایندهای بنیادی دگرگون کرد، و یک سر نخ اساسی درمورد ماهیت قانون فیزیکی‌ای که در پس واپاشی بتا وجود دارد، به‌دست داد. این قانون، یکی از چهار نیروی بنیادیی است که می‌شناسیم. این آزمایش پیشگام سلسله آزمایشهایی بود که روابط دیگری میان خواص تبدیل، اصول ناوردایی، و تقارن آشکار کرد.

پرسشها

۱. در سال ۱۹۶۹، سه فضانورد آپولو از پایگاه کیپ کاناورال پرواز کردند، به ماه رفتند، برگشتند، و در نقطهٔ معینی در اقیانوس آرام فرود آمدند

۱. نگاه کنید به
The New Ambidextrous Universe, Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداحافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیمابر به اقیانوس آرام رفت تا فضانوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضانوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



شکل ۲۱. پرسش ۱

۲. سگی ۱۰۰m به‌طرف جنوب، سپس ۱۰۰m به طرف شرق، بعد ۱۰۰m به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطهٔ شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطهٔ شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برایندشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازهٔ برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازهٔ مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازهٔ تفاضل دو بردار بزرگتر از اندازهٔ هر یک از دو بردار باشد؟ آیا اندازهٔ تفاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازهٔ مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. آیا این به معنی آن است که باید $d \ge d_1$ یا $d \ge d_2$ باشد؟ اگر نه، توضیح بدهید که چرا؟

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدهید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالرهاست؟

۱۱. چند کمیت اسکالر نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالر به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً، ممکن است که رویداد b پیش از c و پس از a رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا a، b، c است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل‌ضرب اسکالر می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند؟ (ب) آیا از $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ است؟

۱۶. آیا اگر $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ باشد، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار $\mathbf{a}$ موازی محور دوران زمین، و در جهتِ جنوب به شمال است. بردار $\mathbf{b}$ در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماست. جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازهٔ بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالرِ دو بردار، (ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدهید که اگر همهٔ مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدهید که اگرمؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل‌ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود. (ج) پس آیا حاصل‌ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعدهٔ دست راست است، که ماهم آن‌را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانع کنید که حاصل‌ضرب برداری دو بردارِ قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل‌ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

مسئله‌ها

بخش ۳ـ۲ جمع برداری؛ روش نموداری

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های ۳m و ۴m، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازهٔ جابه‌جایی برایند (الف) ۷m، (ب) ۱m، و (ج) ۵m شود.

۲. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چه خاصیتی داشته باشند تا (الف) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ و $a + b = c$ باشد؛ (ب) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ باشد؛ (ج) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ و $a^2 + b^2 = c^2$ باشد؟

۳. شخصی ۲۵۰m در جهت °۳۵ شرقِ شمال، و سپس ۱۷۰m مستقیماً به‌طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی ۳٫۱km به‌طرف شمال، سپس ۲٫۴km به‌طرف غرب، و سرانجام ۵٫۲km به‌طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

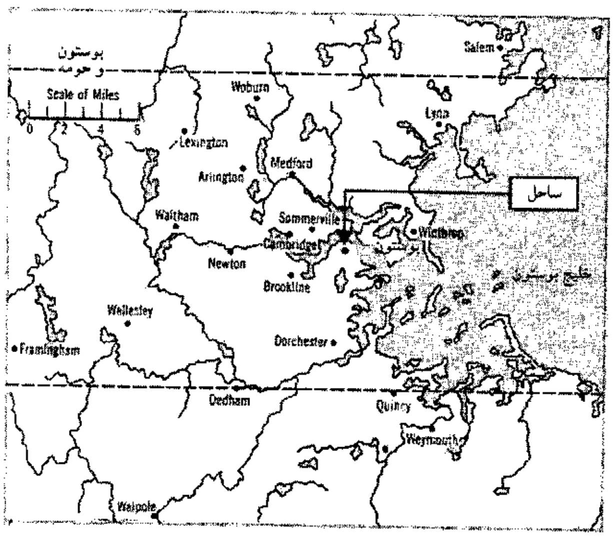
۵. دو بردار **a** و **b** را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدهید که اندازهٔ بردار برایند نمی‌تواند بزرگتر از $|a+b|$ یا کوچکتر از $|a-b|$ باشد. (خطهای قائم علامت قدرمطلق است.)

۶. اتومبیلی ۵۴km در جهت شرق، سپس ۳۲km در جهت شمال، و سرانجام ۲۷km در جهت ۲۸° شرقِ شمال حرکت می‌کند. نمودار برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار **a** به اندازهٔ ۵٫۲ واحد، و در جهت شرق است. بردار **b** به اندازهٔ ۴٫۳ واحد، و درجهت ۳۵° غربِ شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت (الف) **a + b**، و (ب) **a − b** را پیدا کنید.

۸. گلف‌بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربهٔ اول، توپ ۱۲ft به طرف شمال می‌رود، در ضربهٔ دوم ۶٫۰ft به جنوب شرقی، و در ضربهٔ سوم ۳٫۰ft به جنوب غربی، چه جابه‌جایی‌ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشهٔ محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول ۲۰mi در جهت ۴۵° جنوبِ شرق، سپس ۳۳mi در جهت ۲۶° شمالِ غرب، و سرانجام ۱۶mi در جهت ۱۸° شرقِ جنوب. اینجاست که پلیس دزدها را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید.)

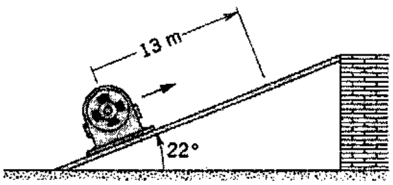


شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

بخش ۳ـ۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار **a** در صفحهٔ xy و در جهت ۲۵۲° پادساعتگرد از جهت مثبت محور x است. اندازهٔ **a**، ۷٫۳۴ واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) مؤلفهٔ x برداری ۲۵− واحد و مؤلفهٔ y آن ۴۳+ واحد است. اندازهٔ این بردار و زاویهٔ آن‌را با جهت مثبت محور x به‌دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۲۲° می‌سازد، به‌اندازهٔ ۱۳m به طرف بالای سطح هل می‌دهیم (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه‌اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟



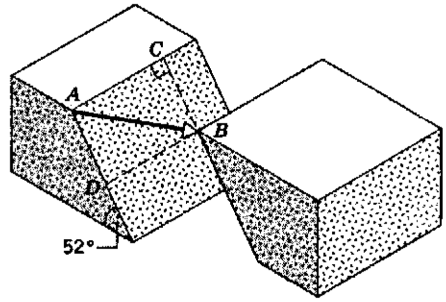
شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۱

۱۲. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک، ۱۱٫۳cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصلهٔ ۳٫۴۲km و در جهت ۳۵٫۰° شمالِ شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راهِ خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی‌ـجنوبی‌اند یا شرقی‌ـغربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

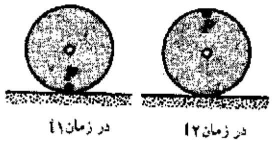
۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای درفاصلهٔ ۱۲۴km در جهت شمال است. توفانِ غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در۷۲٫۶km شمال و ۳۱٫۴km شرقِ مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

۱۵. گُسَل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط A و B پیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفهٔ جابه‌جایی کل AB در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند (AC). مؤلفهٔ جابه‌جایی کل در راستای محور با تندترین شیب گسل را لغزش عمقی می‌نامند (AD). (الف) اگر لغزش افقی ۲۲m و لغزش عمقی ۱۷m باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحهٔ گسل با افق زاویهٔ ۵۲° داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص B در اثر گسیختگی (الف) چقدر است؟



شکل ۲۴ مسئلهٔ ۱۵

۱۶. چرخی به شعاع ۴۵cm، روی سطحی افقی، بی‌لغزش، می‌غلتد(شکل ۲۵). P نقطه‌ای است که روی چرخ علامتگذاری شده است. در زمان t_1، P نقطهٔ تماس بین چرخ و سطح است. درزمان t_2، پس از t_1، چرخ نیم دور چرخیده است. جابه‌جایی P در طی این حرکت چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. ابعاد اتاقی $14\text{ft} \times 12\text{ft} \times 10\text{ft}$ است. مگسی از یک گوشهٔ اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطری که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جابه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با یالهای اتاق موازی‌اند پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاهتر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه برود، کوتاهترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

بخش ۳ـ۴ جمع برداری؛ روش مؤلفه‌ای

۱۸. (الف) جمع دو بردار $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را به‌دست بیاورید.

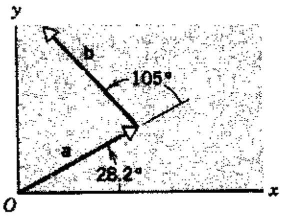
۱۹. دو بردار $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{K}$ و $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، و (ب) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را پیدا کنید. (ب) بردار $\mathbf{c}$ را چنان تعیین کنید که $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$ باشد.

۲۰. دو بردار $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور x) پیدا کنید. (الف) $\mathbf{a}$، (ب) $\mathbf{b}$، (ج) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، (د) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$، و (ه) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش ۱۴۰۰m به طرف شرق و ۲۱۰۰m به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیبش در می‌آورد و آن‌را از تخته سنگی به ارتفاع ۴۸m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای x و y، و z آن‌را به‌ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جابه‌جایی سکه را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برایند جابه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟

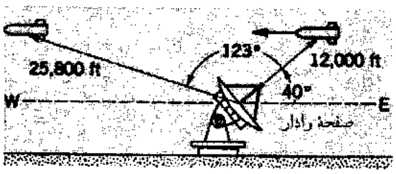
۲۲. ذره‌ای در سه مرحلهٔ متوالی در صفحه‌ای جابه‌جا می‌شود: ۴٫۱۳m به طرف جنوب غربی ۵٫۲۶m به طرف شرق، و ۵٫۹۴m در جهت ۶۴٫۰° شمالِ شرق. محور x را درجهت شرق و محور y را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جابه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برایند جابه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جابه‌جایی برایند، و (د) جابه‌جایی‌ای که ذره را به مبدأ باز می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هرکدام به اندازهٔ ۱۲٫۷ واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری‌شان $\mathbf{r}$ است. (الف) مؤلفه‌های x و y بردار $\mathbf{r}$، (ب) اندازهٔ $\mathbf{r}$، و (ج) زاویهٔ $\mathbf{r}$ نسبت به جهت مثبت محور x را پیدا کنید.



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصلهٔ ۱۲۰۰۰ft از ایستگاه و تحت زاویهٔ ۴۰٫۰° بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازهٔ ۱۲۳°in دیگر در صفحهٔ شرق‌ـغرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصلهٔ موشک از ایستگاه به ۲۵۸۰۰ft می‌رسد. جابه‌جایی موشک دراین مدت چیست؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. دو بردار به اندازه‌های a و b داریم که اگر دمشان را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویهٔ θ می‌سازند. با محاسبهٔ مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازهٔ مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه برداری که در راستای یالهای مکعبی به ضلع a بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می‌گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کنند) برحسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویهٔ قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی‌سی به مانیل پرواز می‌کند. (الف) بردار جابه‌جایی او را به‌دست بیاورید. (ب) اندازهٔ این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب °۳۹ شمال‌ـ°۷۷ غرب و °۱۵ شمال‌ـ°۱۲۱ شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور z را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، "عرض جغرافیایی $-$ °۹۰ $= \theta$" و "طول جغرافیایی $= \phi$" خواهد بود. شعاع زمین ۶۳۷۰km است.)

۲۹. فرض کنید که N عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos ۰ + \cos \frac{۲\pi}{N} + \cos \frac{۴\pi}{N} + \cdots + \cos(N-۱)\frac{۲\pi}{N} = ۰$$

یعنی

$$\sum_{n=۰}^{n=N-۱} \cos \frac{۲\pi n}{N} = ۰$$

همچنین

$$\sum_{n=۰}^{n=N-۱} \sin \frac{۲\pi n}{N} = ۰$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع N بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویهٔ $۲\pi/N$ می‌سازد.

بخش ۳ـ۵ ضرب بردارها

۳۰. بردار $\mathbf{d}$ به اندازهٔ ۲٫۶m و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف) $-\mathbf{d}$، (ب) $\mathbf{d}/۲٫۰$، (ج) $-۲٫۵\mathbf{d}$، و (د) $۵٫۰\mathbf{d}$ را به‌دست بیاورید.

۳۱. نشان بدهید که بردار $\mathbf{a}$ هر چه باشد، (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^۲$ و (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = ۰$ است.

۳۲. اندازهٔ بردار $\mathbf{a}$، ۱۲ واحد و اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$، ۵٫۸ واحد است. زاویهٔ میان این دو بردار °۵۵ است. (الف) حاصلضرب اسکالر و (ب) حاصلضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ در صفحهٔ xyاند. اندازهٔ این دو بردار، به ترتیب، ۴٫۵ و ۷٫۳ واحد است. جهت این دو بردار، به ترتیب، °۳۲۰ و °۸۵ پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x است. (الف) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ و (ب) $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ را پیدا کنید.

۳۴. حاصلضربهای (الف) "شمال" ضربدر "غرب"، (ب) "پایین" نقطه "جنوب"، (ج) "شرق" ضربدر "بالا"، (د) "غرب" "غرب"، و (ه) "جنوب" ضربدر "جنوب" را به‌دست بیاورید. همهٔ بردارها را یکه بگیرید.

۳۵. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۵ به‌دست می‌آید.

۳۶. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۷ به‌دست می‌آید.

۳۷. نشان بدهید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را می‌شود با این دترمینان ۳ × ۳ نشان داد:

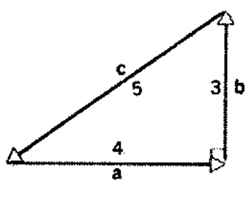
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویهٔ میان دو بردار $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$، (ب) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ و (ج) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ را حساب کنید.

۴۰. بردارهای $\mathbf{a} = ۵\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = ۴\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به‌دست بیاورید. (ب) زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و محور $+z$ و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند (شکل ۲۸) (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ را حساب کنید.



شکل ۲۸. مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. شکل ۲۸. (الف) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ را حساب کنید.

۴۳. بردار $\mathbf{a}$ در صفحهٔ yz است و با محور $+y$ زاویهٔ °۶۳٫۰ می‌سازد. مؤلفهٔ z این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۳٫۲۰ واحد است. بردار $\mathbf{b}$ در صفحهٔ xz است و با محور $+x$ زاویهٔ °۴۸٫۰ می‌سازد. مؤلفهٔ z این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۱٫۴۰ واحد است. (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه‌جایی در مورد حاصلضرب برداری ... یعنی، $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ با $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ برابر نیست. نشان بدهید که

قانون جابه‌جایی در مورد حاصل‌ضرب اسکالر درست است؛ یعنی، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. (ب) نشان بدهید که قانون پخشی، هم در مورد حاصل‌ضرب اسکالر و هم در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است یعنی

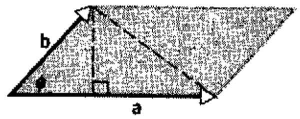
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

و

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است؟ یعنی، آیا $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ با $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ برابر است؟ (د) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب اسکالر معنی دارد؟

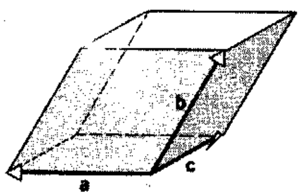
۴۵. نشان بدهید که مساحت مثلثی که با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می‌شود (شکل ۲۹) برابر با $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ است. (خطوط قائم به معنی اندازهٔ بردار است.)



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدهید که اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن به اندازهٔ عوامل ضرب باشند (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای نمایش عنصرسطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده کنیم؟

۴۷. نشان بدهید که قدر مطلق $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ ساخته می‌شود (شکل ۳۰).

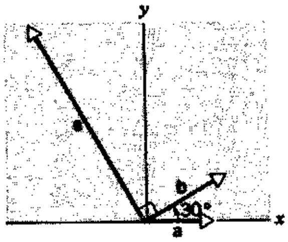


شکل ۳۰. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. مؤلفه‌های دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، برحسب یکای دلبخواه، $a_x = ۳٫۲$، $a_y = ۱٫۶$؛ $b_x = ۰٫۵۰$، $b_y = ۴٫۵$ است. (الف) زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار $\mathbf{c}$ را که عمود بر $\mathbf{a}$، در صفحهٔ xy، و به اندازهٔ ۵٫۰ واحد است، پیدا کنید.

۴۹. زاویهٔ میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئلهٔ ۲۷).

۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های $a = ۳$، $b = ۴$، و $c = ۱۰$اند. (الف) مؤلفه‌های x و y این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد p و q را چنان تعیین کنید که $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ باشد.

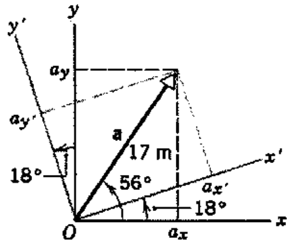


شکل ۳۱. مسئلهٔ ۵۰

بخش ۳ـ۶ قوانین برداری در فیزیک

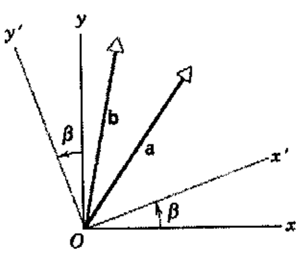
۵۱. با استفاده از شکل ۱۰ب، معادلات ۱۸ را به‌دست بیاورید.

۵۲. بردار $\mathbf{a}$ به اندازهٔ ۱۷m در جهت °۵۶ پادساعتگرد از محور $+x$ است (شکل ۳۲). (الف) مؤلفه‌های a_x و a_y این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) دستگاه مختصات دیگری را در نظر بگیرید که °۱۸ نسبت به دستگاه اول چرخیده باشد. مؤلفه‌های $a_{x'}$ و $a_{y'}$ را در این دستگاه "پریم‌دار" پیدا کنید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۲

۵۳. شکل ۳۳ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که زاویهٔ بین محورهای "نظیر" آنها β است. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ مستقل از دستگاه مختصاتی است که برای محاسبهٔ این بردار به‌کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به‌کار بگیرید.)



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۵۳

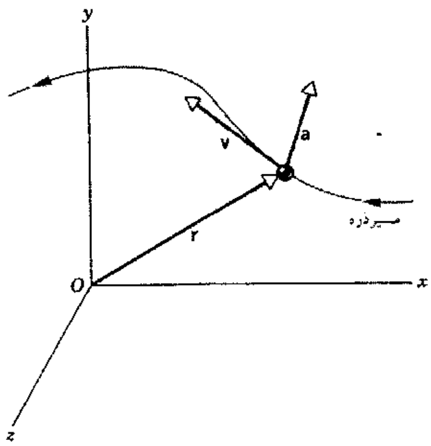
۴

حرکت دوبُعدی و سه‌بُعدی

این فصل، ترکیبی از مفاهیم فصل ۲ و ۳ است. اینجا هم حرکت ذرات را برحسب مکان، سرعت، و شتاب آنها توصیف می‌کنیم؛ همان کاری که در فصل ۲ کردیم. اما دیگر مثل فصل ۲ ذرات را مقید نمی‌کنیم که روی خط راست حرکت کنند؛ در اینجا می‌گذاریم که ذره به هر جای دستگاه مختصات سه‌بعدی برود. استفاده از نمادگذاری برداری، بررسی مؤلفه‌های x، y، و z حرکت را تا حد زیادی ساده می‌کند. خواهیم دید که معادلات سینماتیکی فصل ۲ را در حالت کلی هم می‌شود به‌کار برد؛ کافی است که به جای متغیر یک‌بعدی، بردار متناظر با آن‌را بگذاریم. به عنوان نمونه‌هایی از کاربرد روشهای برداری، دو حرکت آشنا را بررسی می‌کنیم: یکی حرکت پرتابه در میدان گرانشی زمین با سرعت اولیه‌ای که هم مؤلفهٔ افقی و هم مؤلفهٔ عمودی دارد، و دیگری حرکت ذره در مسیر دایره‌ای.

۴ـ۱ مکان، سرعت، و شتاب

شکل ۱ ذره‌ای را که روی مسیری منحنی در فضای سه‌بعدی حرکت می‌کند در زمان t نشان می‌دهد. مکان، یا جابه‌جایی از مبدأ، ذره را با بردار $\mathbf{r}$ می‌سنجیم. سرعت را با بردار $\mathbf{v}$ نشان می‌دهیم. این بردار، چنانکه بعداً خواهیم دید، باید بر مسیر ذره مماس باشد. شتاب را با بردار $\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. جهت این بردار، چنانکه بعداً روشن خواهد شد، در حالت کلی رابطه‌ای با مکان ذره یا با جهت $\mathbf{v}$ ندارد.



شکل ۱. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره‌ای که روی مسیری دلبخواه حرکت می‌کند. اندازه‌های این بردارها، و همین‌طور جهتهای آنها ارتباطی با هم ندارند.

در مختصات دکارتی، مکان ذره با x، y، و z مشخص می‌شود. اینها مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}$، یعنی بردار مکان ذره‌اند:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (۱)$$

فرض کنید که ذره از نقطهٔ $\mathbf{r}_1$ در زمان t_1، به نقطهٔ $\mathbf{r}_2$ در زمان t_2 برود؛ شکل ۲الف جابه‌جایی (تغییر مکان) ذره در بازهٔ $\Delta t = t_2 - t_1$، بردار $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. سرعت متوسط $\overline{\mathbf{v}}$ در بازهٔ Δt برابر است با

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (۲)$$

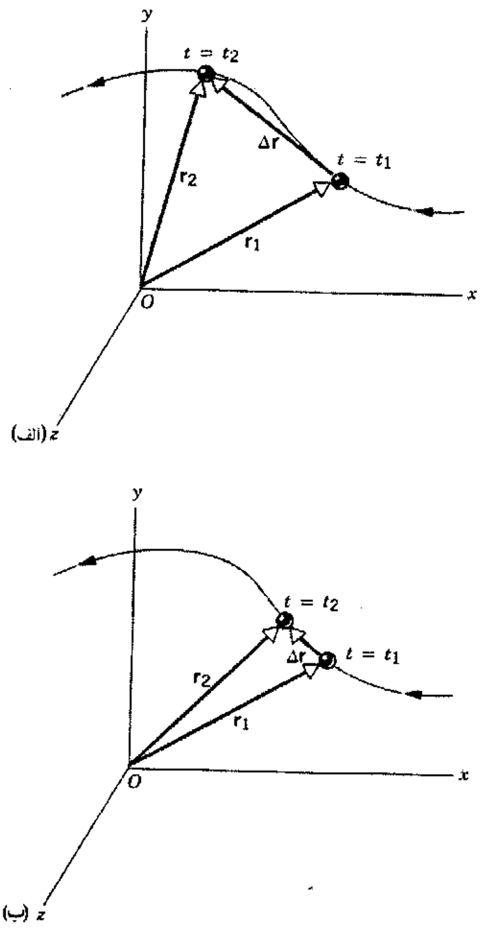
در معادلهٔ ۲، برای به‌دست آمدن $\overline{\mathbf{v}}$، بردار $\Delta\mathbf{r}$ در اسکالر $1/\Delta t$ ضرب شده است. پس جهت $\overline{\mathbf{v}}$ همان جهت $\Delta\mathbf{r}$ است.

دقت کنید که رابطهٔ سه بردار $\mathbf{r}_1$، $\Delta\mathbf{r}$، و $\mathbf{r}_2$ با هم، همان رابطهٔ سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{s}$ در شکل ۳ فصل ۳ است. یعنی، با استفاده از روش نموداریِ سر به دُم برای جمع برداری، برایند $\Delta\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_1$، بردار $\mathbf{r}_2$ است. پس $\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{r}_1$، یا $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

با کوچکتر کردن Δt، بردار $\Delta\mathbf{r}$ به مسیر واقعی نزدیک می‌شود (شکل ۲ب) و در حدِ $\Delta t \to 0$، به مماس بر مسیر میل می‌کند. در این حد، سرعت متوسط هم به سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ می‌گراید:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (۳)$$

با تعمیم معقولی از تعریف قبلی از مشتق (معادلهٔ ۸ فصل ۲)، کمیت ... معادلهٔ ۳ را به‌صورت مشتق بردار $\mathbf{r}$ نسبت به زمان نمایش



شکل۲. (الف) ذره در بازهٔ Δt، از $t_۱$ تا $t_۲$، از نقطهٔ $\mathbf{r}_۱$ به نقطهٔ $\mathbf{r}_۲$ می‌رود. جابه‌جایی ذره در این بازه، $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_۲ - \mathbf{r}_۱$ است. (ب) با کوچک شدن بازه، بردار جابه‌جایی به مسیر واقعی ذره نزدیک می‌شود.

می‌دهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (۴)$$

بردار $\Delta \mathbf{r}$، در حد $\Delta t \to ۰$، بر مسیر مماس می‌شود. به همین ترتیب، بردار $\mathbf{v}$ هم در طی حرکت همه جا بر مسیر ذره مماس است.

معادلهٔ ۴ هم، مثل همهٔ معادلات برداری دیگر، با سه معادلهٔ اسکالر هم‌ارز است. برای درک این موضوع، بردار $\mathbf{v}$ را برحسب مؤلفه‌هایش می‌نویسیم و $\mathbf{r}$ را از معادلهٔ ۱ در معادلهٔ ۴ می‌گذاریم:

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$
$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (۵)$$

برای اینکه دو بردار با هم برابر باشند باید تک تکِ مؤلفه‌های متناظرشان با هم برابر باشند. پس، از مقایسهٔ طرفهای راست و چپ معادلهٔ ۵ معلوم می‌شود که

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (۶)$$

به‌طور خلاصه، رابطهٔ برداری معادلهٔ ۴ کاملاً با سه رابطهٔ برداری معادلهٔ ۶ هم‌ارز است.

تعمیم این مفاهیم به شتاب، مشابه بخش ۲ـ۵، سرراست است. شتاب متوسط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۷)$$

و شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است وقتی که بازهٔ زمانی به سمت صفر میل می‌کند:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۸)$$

اینجا هم کمیت طرف راست عبارت از مشتق $\mathbf{v}$ نسبت به زمان است:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (۹)$$

و سرانجام با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو طرف معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که معادلات برداری، هم برای ساده کردن نمادگذاری به درد می‌خورند (مثلاً معادلهٔ ۹، به تنهایی، سه رابطهٔ معادلهٔ ۱۰ را دربر دارد) و هم برای جدا کردن مؤلفه‌ها از یکدیگر (مثلاً، a_x اثری بر v_y یا v_z ندارد).

همچنین دقت کنید که چون بردار $\mathbf{v}$ هم جهت دارد و هم اندازه، از معادلهٔ ۹ معلوم می‌شود که تغییر جهت سرعت هم می‌تواند شتاب ایجاد کند، حتی اگر اندازهٔ سرعت تغییر نکند. در واقع حرکتی که اندازهٔ سرعت در آن ثابت است هم می‌تواند شتابدار باشد. یعنی، چون $v^۲ = v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲$ است، مؤلفه‌ها می‌توانند چنان تغییر کنند که اندازهٔ $\mathbf{v}$ ثابت بماند. آشناترین مثال چنین حرکتی، حرکت دایره‌ای یکنواخت است، که آن‌را در بخش ۴ـ۴ بررسی خواهیم کرد.

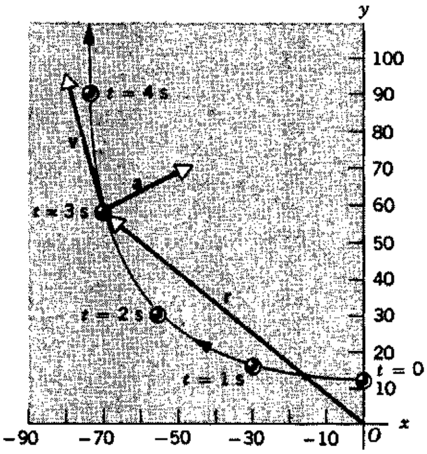
مثال ۱. ذره‌ای در صفحهٔ xy حرکت می‌کند و مختصات x و y آن به‌صورت $x(t) = t^۳ - ۳۲t$ و $y(t) = ۵t^۲ + ۱۲$ به زمان بستگی دارند. x و y برحسب متر، و t برحسب ثانیه است. مکان، سرعت، و شتاب ذره را در $t = ۳\text{s}$ تعیین کنید.

حل: مکان از معادلهٔ ۱ به‌دست می‌آید. با گذاشتن $x(t)$ و $y(t)$ از روابط بالا، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^۳ - ۳۲t)\mathbf{i} + (۵t^۲ + ۱۲)\mathbf{j}$$

و با محاسبهٔ این عبارت به‌ازای $t = ۳\text{s}$،

$$\mathbf{r} = -۶۹\mathbf{i} + ۵۷\mathbf{j}$$



شکل۳. مثال ۱. مسیر ذره، و مکان ذره در $t = 0\,\mathrm{s}$، $t = 1\,\mathrm{s}$، $t = 2\,\mathrm{s}$، $t = 3\,\mathrm{s}$، و $t = 4\,\mathrm{s}$ روی شکل مشخص شده است. همچنین، بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره در $t = 3\,\mathrm{s}$ روی شکل نشان داده شده‌اند. توجه کنید که ارتباط خاصی بین جهتهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{v}$، و $\mathbf{a}$ وجود ندارد.

در این رابطه، یکای مؤلفه‌های $\mathbf{r}$، متر است
مؤلفه‌های سرعت از معادلهٔ ۶ به‌دست می‌آیند:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t$$

از معادلهٔ ۵ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = (3t^2 - 32)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j}$$

و در $t = 3\,\mathrm{s}$

$$\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$$

که یکای آن $\mathrm{m/s}$ است.
مؤلفه‌های شتاب عبارت‌اند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

شتاب در $t = 3\,\mathrm{s}$ برابر است با

$$\mathbf{a} = 18\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

شکل ۳ مسیر حرکت را از $t = 0$ تا $t = 4\,\mathrm{s}$ نشان می‌دهد. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب در $t = 3\,\mathrm{s}$، روی شکل مشخص شده‌اند. توجه کنید که $\mathbf{v}$ بر مسیر، در مکانِ متناظر با $t = 3\,\mathrm{s}$، مماس است. همچنین دقت کنید که جهت $\mathbf{a}$ ارتباط خاصی با جهت $\mathbf{r}$ یا جهت $\mathbf{v}$ ندارد.

۲ـ۴ حرکت با شتاب ثابت

حالا حرکت با شتاب ثابت را بررسی می‌کنیم. در این مورد خاص، طی حرکت ذره، اندازه و جهت شتاب $\mathbf{a}$ هیچ‌یک تغییر نمی‌کنند. بنابراین، مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ هم تغییر نمی‌کنند. چنین وضعیتی را می‌توانیم به شکل جمع سه مؤلفهٔ حرکت با شتاب ثابت، که همزمان در سه راستای عمود بر هم انجام می‌شوند توصیف کنیم. در حالت کلی ذره روی مسیری منحنی حرکت می‌کند. حتی اگر یکی از مؤلفه‌های شتاب، مثلاً a_x، صفر باشد، مسیر حرکت می‌تواند منحنی باشد؛ زیرا در این حالت مؤلفهٔ سرعت متناظر با آن، v_x، مقداری ثابت است که می‌تواند صفر نباشد. مثالی از این مورد اخیر، حرکت پرتابه است. مسیر حرکت، یک منحنی در صفحهٔ قائم است و شتاب ذره با چشمپوشی از مقاومت هوا، شتاب ثابت $\mathbf{g}$ است، که تنها در راستای قائم مؤلفه دارد.

برای به‌دست آوردن شکل کلی معادلات حرکت با شتاب ثابت، کافی است بگذاریم

$$a_x = \text{const.} \qquad a_y = \text{const.} \qquad a_z = \text{const.}$$

پرتابه در $t = 0$ از نقطهٔ اولیهٔ $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$، با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0 = v_{x_0}\mathbf{i} + v_{y_0}\mathbf{j} + v_{z_0}\mathbf{k}$ شروع به حرکت می‌کند. از اینجا به‌بعد، مثل بخش ۲ـ۶ عمل می‌کنیم و متناظر با معادلهٔ ۱۵ فصل ۲، سه معادلهٔ اسکالر به‌دست می‌آوریم: $v_x = v_{x_0} + a_x t$، $v_y = v_{y_0} + a_y t$ و $v_z = v_{z_0} + a_z t$. این سه معادله را می‌شود به شکل یک معادلهٔ برداری نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad (11)$$

به‌یاد داشته باشید که این معادله، یا هر معادلهٔ برداری دیگری، سه معادلهٔ اسکالر مستقل از هم در بر دارد.

جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ ۱۱، حاصل‌ضرب یک بردار در یک اسکالر است. چنانکه در بخش ۳ـ۵ دیدیم، حاصل برداری به اندازهٔ at و در جهت بردار $\mathbf{a}$ است.

با ادامهٔ کار به روش بخش ۲ـ۶، پنج معادله برای توصیف حرکت سه‌بعدی با شتاب ثابت به‌دست می‌آید. جدول ۱ این پنج معادله را نشان می‌دهد. اینها را با پنج معادلهٔ متناظر یک‌بعدی جدول ۲ فصل ۲ مقایسه کنید. به‌جز معادلهٔ ۱۳ که معادله‌ای اسکالر است (هرچند شاملِ بردار)، هر یک از معادلات جدول ۱ سه معادلهٔ اسکالر مستقل از هم دربر دارند. مؤلفهٔ x معادلات ۱۱، ۱۲، ۱۴ و ۱۵، همان معادلات

جدول ۱. معادلات برداری حرکت با شتاب ثابت.

شمارهٔ معادله	معادله	r	$\mathbf{v}_\circ$	v	a	t
		شامل				
۱۱	$\mathbf{v}=\mathbf{v}_\circ+\mathbf{a}t$	×	√	√	√	√
۱۲	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{v}_\circ t+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}t^۲$	√	√	×	√	√
۱۳*	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}_\circ\cdot\mathbf{v}_\circ+۲\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\circ)$	√	√	√	√	×
۱۴	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\frac{۱}{۲}(\mathbf{v}_\circ+\mathbf{v})t$	√	√	√	×	√
۱۵	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{v}t-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}t^۲$	√	×	√	√	√

* این معادله شامل ضرب اسکالر یا نقطه‌ای دو بردار است، که در بخش ۳ـ۵ تعریف شد.

متناظر در جدول ۲ فصل ۲اند. چون معادلهٔ ۱۳ اسکالر است، مؤلفهٔ x (یا هر مؤلفهٔ دیگری) ندارد.

مثال ۲. اسکی‌بازی روی شیب همواری از دامنه کوه پایین می‌آید. زاویهٔ خط شیب به طرف پایین (شمال‌ـجنوب) با افق ۱۰° است. بادی از جهت غرب می‌وزد که به اسکی باز یک شتاب جانبی به‌اندازهٔ $۰٫۵۴\text{m/s}^۲$ می‌دهد (شکل ۴). اسکی باز از گوشهٔ شمال‌غربی شیب شروع به حرکت می‌کند. مؤلفهٔ سرعت اولیه او در جهت شیب $۹٫۰\text{m/s}$، و در جهت جانبی صفر، است. شیب بدون اصطکاک است و ۱۲۵m طول و ۲۵m عرض دارد. (الف) اسکی‌باز در کجای شیب از آن خارج می‌شود؟ (ب) سرعت او در آن نقطه چقدر است؟ (راهنمایی: شتاب گرانشی در راستای صفحه‌ای با زاویهٔ شیب θ، برابر با $g\sin\theta$ است.)

حل: (الف) مبدأ راگوشهٔ شمال‌غربی، محور x را رو به پایین شیب، و محور y را در جهت جانبی می‌گیریم. مؤلفه‌های شتاب برابرند با

$$a_x=g\ \sin\ ۱۰^\circ=۱٫۷۰\text{m/s}^۲$$
$$a_y=۰٫۵۴\text{m/s}^۲$$

توجه کنید که این مؤلفه‌ها مستقل از هم‌اند. مؤلفهٔ a_x، ناشی از گرانش و به‌طرف پایین شیب است، و ربطی به وزیدن یا نوزیدن باد جانبی ندارد. a_y هم شتاب جانبی است که از باد حاصل می‌شود، چه سطح شیبدار باشد و چه نباشد. امکان کاربرد مستقل این دو مؤلفه، گویای ماهیت حساب برداری است.

$t=۰$ را زمانی می‌گیریم که اسکی‌باز شروع به حرکت می‌کند. داریم $v_{x_\circ}=۹٫۰\text{m/s}$ و $v_{y_\circ}=۰$. پس

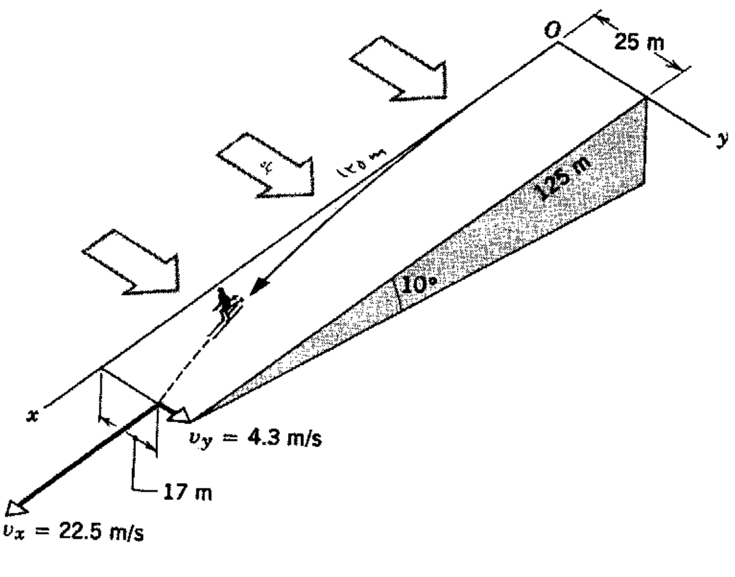
$$v_x=v_{x_\circ}+a_xt=۹٫۰\text{m/s}+(۱٫۷۰\text{m/s}^۲)t$$
$$v_y=v_{y_\circ}+a_yt=۰+(۰٫۵۴\text{m/s}^۲)t$$
$$x=x_\circ+v_{x_\circ}t+\frac{۱}{۲}a_xt^۲$$
$$=۰+(۹٫۰\text{m/s})t+(۰٫۸۵\text{m/s}^۲)t^۲$$
$$y=y_\circ+v_{y_\circ}t+\frac{۱}{۲}a_yt^۲=۰+۰+(۰٫۲۷\text{m/s}^۲)t^۲$$

فعلاً فرض می‌کنیم که اسکی‌باز، پیش از آنکه از لبهٔ جانبی شیب خارج شود، به پایین شیب می‌رسد. (بعداً می‌توانیم درستی این فرض را وارسی کنیم.) اول باید زمانی این رویداد (یعنی زمانی که $x=۱۲۵\text{m}$ می‌شود) را به‌دست آوریم:

$$۱۲۵\text{m}=(۹٫۰\text{m/s})t+(۰٫۸۵\text{m/s}^۲)t^۲$$

از حل این معادلهٔ درجهٔ دو، دو جواب $t=۷٫۹۴\text{s}$، و $t=-۱۸٫۵\text{s}$ به‌دست می‌آید. فعلاً فقط جواب مثبت را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن، مختصهٔ y متناظر با این زمان را حساب می‌کنیم:

$$y=(۰٫۲۷\text{m/s}^۲)t^۲=(۰٫۲۷\text{m/s}^۲)(۷٫۹۴\text{s})^۲=۱۷٫۰\text{m}$$



شکل۴. مثال ۲.

جابه‌جایی جانبی ۱۷٫۰m، کمتر از عرض شیب (۲۵m) است. پس فرض ما درست است، اسکی‌باز به فاصلهٔ ۱۷٫۰m از لبهٔ غربی شیب، از انتهای شیب خارج می‌شود.

(ب) مؤلفه‌های سرعت را می‌شود مستقیماً در $t = ۷٫۹۴\text{s}$ حساب کرد:

$$v_x = ۹٫۰\,\text{m/s} + (۱٫۷۰\,\text{m/s}^۲)(۷٫۹۴\,\text{s}) = ۲۲٫۵\,\text{m/s}$$

$$v_y = (۰٫۵۴\,\text{m/s}^۲)(۷٫۹۴\,\text{s}) = ۴٫۳\,\text{m/s}$$

دقت کنید که در حل این مسئله، محورهای x و y را در صفحهٔ شیب انتخاب کردیم. به این ترتیب، مسئلهٔ سه‌بعدی به مسئله‌ای دوبعدی تبدیل شده اگر از اول در دستگاه مختصاتی کار می‌کردیم که صفحهٔ xy آن در سطح افقی، و محور z آن در راستای قائم بود، شتاب سه مؤلفه پیدا می‌کرد و مسئله پیچیده‌تر می‌شد. معمولاً، در حل مسائل، آزادیم که جهت محورهای مختصات و محل مبدأ را به دلخواه انتخاب کنیم، به شرط آنکه این انتخاب را در تمام مراحل حل مسئله ثابت نگه داریم.

ریشهٔ منفی، $t = -۱۸٫۵\text{s}$، چه می‌شود؟ معادلات اولیهٔ حرکت را از زمان ۰ به بعد نوشتیم، پس زمان مثبت، حرکت بعدی اسکی‌باز روی شیب را توصیف می‌کند. زمان منفی باید مربوط به حرکت اسکی‌باز پیش از عبور از گوشهٔ شمال غربی شیب (مبدأ انتخابی ما) باشد. جواب منفی می‌گوید که اسکی‌باز می‌توانسته است پیش از رسیدن به مبدأ در $t = ۰$، یک مسیر محتمل قبلی را پیموده باشد و با سرعتِ درست (سرعت اولیهٔ مسئلهٔ ما) به نقطهٔ مبدأ رسیده باشد. طی این بخشِ قبلی حرکت، اسکی‌باز باید قبل از رسیدن به گوشهٔ شمال غربی، مسافت ۱۲۵m را (در جهت بالای شیب)! در ۱۸٫۵s پیموده باشد. مؤلفه‌های سرعت را در $t = -۱۸٫۵\text{s}$ به‌دست بیاورید و چگونگی حرکت اسکی‌باز را در آن زمان تعیین کنید. مختصهٔ y متناظر، در $t = -۱۸٫۵\text{s}$ چه بوده است؟ آیا این جواب معقول است؟ بیشترین مقدار مختصات x و y در بازهٔ بین $t = ۱۸٫۵\text{s}$ و $t = ۰$ چقدر است؟

از حل ریاضی مسائل فیزیکی، خیلی وقتها نتایج غیرمنتظره‌ای به‌دست می‌آید؛ مثل همین زمان منفی در مثال بالا. اگر در این مسئله فرض کنیم که حرکت اسکی‌باز در $t = ۰$ شروع شده است، ریشهٔ منفی برایمان اهمیتی ندارد. اما بد نیست که هر وقت به چنین جوابهایی برخوردید، معنی فیزیکی آنها را بررسی کنید.

۳ـ۴ حرکت پرتابی

حرکت پرتابی، نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت است. حرکتِ دوبعدی ذره‌ای است که به‌طور مایل در هوا پرتاب می‌شود. حرکت (ایده‌آل) عمومی بیسبال یا توپ گلف، مثالی از این نوع حرکت است. فعلاً فرض می‌کنیم که اثر هوا برحرکت پرتابی قابل اغماض است. در فصل ۶، اثر مقاومت هوا را (که اغلب قابل توجه است) بررسی خواهیم کرد.

حرکت پرتابی، حرکتی است با شتابِ ثابت $\mathbf{g}$؛ این شتاب به طرفِ پایین است. ممکن است سرعت این حرکت مؤلفهٔ افقی داشته باشد، اما شتاب آن مؤلفهٔ افقی ندارد. در دستگاه مختصاتی که جهت مثبت محور y آن در امتداد قائم رو به بالا باشد، می‌شود گفت $a_y = -g$ (اینجا هم، مثل فصل ۲، g همواره یک عدد مثبت است) و $a_x = ۰$. بعلاوه، فرض می‌کنیم $\mathbf{v}_۰$ در صفحهٔ xy باشد، یعنی $v_{z_۰}$ است. چون a_z هم صفر است، از مؤلفهٔ z معادلهٔ ۱۱ معلوم می‌شود که v_z همواره برابر با صفر است. پس کافی است که فقط رویدادهای صفحهٔ xy را بررسی کنیم.

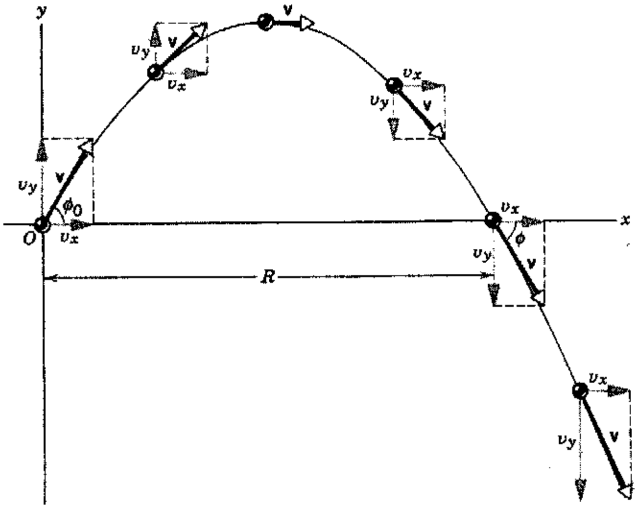
مبدأ مختصات را نقطه‌ای می‌گیریم که حرکت پرتابی از آن شروع می‌شود (شکل ۵)، مثلاً نقطه‌ای که در آن توپ از دست پرتاب‌کننده رها می‌شود. با این انتخاب، $x_۰ = y_۰ = ۰$ است. سرعت در $t = ۰$، زمان شروع حرکت پرتابه، $\mathbf{v}_۰$ است که با جهت مثبت محور x زاویهٔ $\phi_۰$ می‌سازد. به این ترتیب، مؤلفه‌های x و y بردار $\mathbf{v}_۰$ (شکل ۵) عبارت‌اند از

$$v_{y_۰} = v_۰ \sin\phi_۰ \quad \text{و} \quad v_{x_۰} = v_۰ \cos\phi_۰ \qquad (۱۶)$$

چون شتاب مؤلفهٔ افقی ندارد، مؤلفهٔ افقی سرعت ثابت است. مقادیر $a_x = ۰$ و $v_{x_۰} = v_۰\cos\phi_۰$ را در مؤلفهٔ x معادلهٔ ۱۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

$$v_x = v_{x_۰} + a_x t = v_۰ \cos\phi_۰ \qquad (۱۷)$$

مؤلفهٔ افقی سرعت، در تمام مدت پرواز، برابر با مقدار اولیهٔ آن است.



شکل۵. مسیر پرتابه، سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_۰$ و مؤلفه‌های آن، و سرعت $\mathbf{v}$ با مؤلفه‌هایش در پنج لحظهٔ مختلف پس از پرتاب. دقت کنید که طی حرکت، $v_x = v_{x_۰}$ است. فاصلهٔ افقی R، برد پرتابه است.

مؤلفهٔ عمودی سرعت، در اثر شتاب ثابتِ رو به پایین، تغییر می‌کند. مقادیر $a_y = -g$ و $v_{y_0} = v_0 \sin\phi_0$ را در مؤلفهٔ y معادلهٔ ۱۱ می‌گذاریم. خواهیم داشت

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin\phi_0 - gt \tag{۱۸}$$

مؤلفهٔ قائم سرعت، درست مثلِ سرعت سقوط آزاد رفتار می‌کند. (در واقع اگر حرکت شکل ۵ را در دستگاه مرجعی بررسی کنیم که با سرعت v_{x_0} به‌طرف راست حرکت می‌کند، حرکت ذره حرکت جسمی است که با سرعت اولیهٔ $v_0 \sin\phi_0$ در جهت عمودی به بالا پرتاب شده است.)
اندازهٔ بردار سرعت درهر لحظه برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{۱۹}$$

زاویهٔ بردار سرعت با افق در هر لحظه، زاویهٔ ϕ، از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} \tag{۲۰}$$

بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر ذره در آن نقطه مماس است (شکل ۵).

مختصهٔ x مکان ذره در هر لحظه، از مؤلفهٔ x معادلهٔ ۱۲ (جدول ۱) به‌دست می‌آید. اگر مقادیر $x_0 = 0$، $a_x = 0$، و $v_{x_0} = v_0 \cos\phi_0$ را در این معادله قرار بدهیم نتیجه می‌شود که

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (v_0 \cos\phi_0) t \tag{۲۱}$$

مختصهٔ y هم از مؤلفهٔ y معادلهٔ ۱۲ به‌دست می‌آید. با $y_0 = 0$، $a_y = -g$، و $v_{y_0} = v_0 \sin\phi_0$، خواهیم داشت

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_0 \sin\phi_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{۲۲}$$

معادلات ۲۱ و ۲۲، x و y را به‌صورت توابعی از پارامتر مشترک t، زمان پرواز، به‌دست می‌دهند. t را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$y = (\tan\phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos\phi_0)^2} x^2 \tag{۲۳}$$

این معادله y را به x مربوط می‌کند و در واقع معادلهٔ مسیر پرتابه است. چون v_0، ϕ_0، و g ثابت‌اند، شکل کلی معادلهٔ بالا

$$y = bx - cx^2$$

است، که معادلهٔ سهمی است. پس مسیر پرتابه هم سهموی است (شکل ۵).

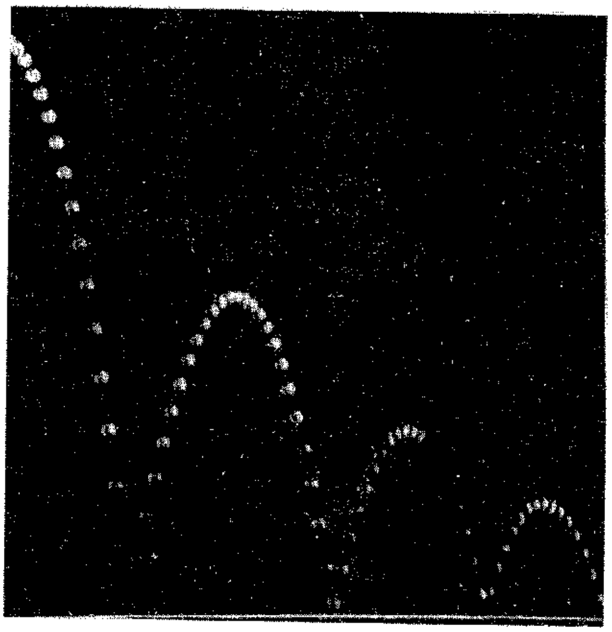
برد افقی R پرتابه (شکل ۵) طبق تعریف، مسافتی است در راستای افقی که پرتابه می‌پیماید تا به سطحی برسد که از آن شروع به حرکت کرده بود. برای پیدا کردن برد کافی است در معادلهٔ ۲۳ بگذاریم $y = 0$. یک جواب این معادله $x = 0$ است؛ جواب دیگر، برد را می‌دهد:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\phi_0 \cos\phi_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 \tag{۲۴}$$

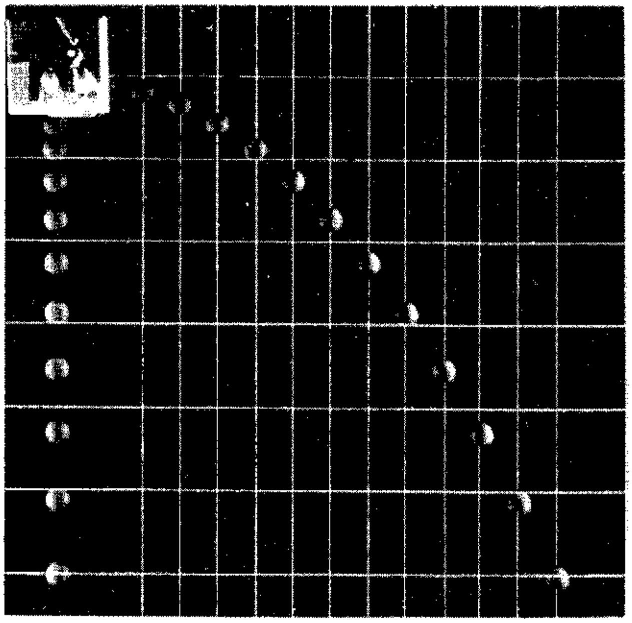
در این رابطه، از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که اگر سرعت اولیه ثابت باشد، بیشترین مقدار برد به‌ازای $\phi_0 = 45^\circ$ به‌دست می‌آید. در این حالت، $\sin 2\phi_0 = 1$ است.

جوابهایی که به‌دست آوردیم، شکل ایده‌آل حرکت پرتابی بود. یک عامل مهم، یعنی گرانش را در نظر گرفتیم؛ اما عامل دیگری هم وجود دارد که می‌تواند بر حرکت پرتابه اثر کند و اغلب اهمیت دارد ـــ مقاومت هوا. در سرعتهای کم، معمولاً می‌شود مقاومت هوا را نادیده گرفت، اما در سرعتهای زیاد، مسیر پرتابه دیگر به شکل سهمی معادلهٔ ۲۳ نیست، و برد پرتابه ممکن است خیلی کمتر از مقداری باشد که از معادلهٔ ۲۴ به‌دست می‌آید. در فصل ۶ آثار مقاومت هوا را بررسی خواهیم کرد؛ فعلاً فرض می‌کنیم که معادلات این بخش، حرکت پرتابی را به‌خوبی توصیف می‌کنند.

شکل ۶ مسیر پرتابه‌ای را نشان می‌دهد که اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز است. مسیر کاملاً شبیه به سهمی است. در شکل ۷ حرکت



شکل۶. عکسی با فلاشهای پی‌درپی (استروبوسکوپیک) از توپ گلفی که از طرف چپ وارد عکس می‌شود و به سطح سختی برمی‌خورد، و از آن وامی‌جهد. حرکت توپ، بین دو برخورد، مسیرسهموی مشخصهٔ حرکت پرتابی را نشان می‌دهد. چرا فکر می‌کنید کهارتفاع جهشها به تدریج کم می‌شود؟ (پاسخ را در فصلهای ۸ و ۱۰ پیدا خواهید کرد.)



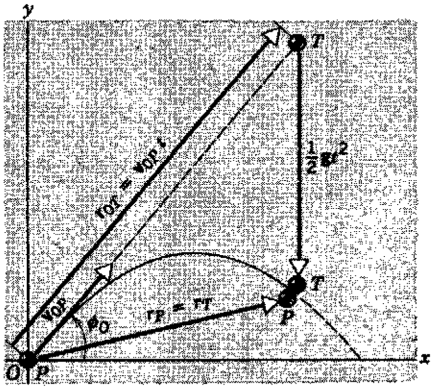
شکل۷. توپ I از حالت سکون رها می‌شود و در همان زمان، توپ II به طرف راست پرتاب می‌شود. توجه کنید که توپها در راستای قائم دقیقاً با یک سرعت سقوط می‌کنند؛ حرکت افقی توپ II بر سرعت سقوط قائم آن اثری ندارد. فاصلهٔ بین نوردهیهای متوالی این عکسِ استروبی $1/30\,s$ بوده است. آیا سرعت افقی توپ II ثابت به نظر می‌رسد؟

پرتابه‌ای که به‌طور افقی پرتاب شده با حرکت جسمی که همزمان رها شده و سقوط آزاد می‌کند مقایسه شده است. در اینجا می‌توانید پیش‌بینیهای معادلات ۲۱ و ۲۲ را، به‌ازای $\phi_0 = 0$، مستقیماً تحقیق کنید. توجه کنید که (۱) حرکت افقی پرتابهٔ اول واقعاً همانی است که از معادلهٔ ۲۱ به‌دست می‌آید: مؤلفهٔ x، در بازه‌های زمانی یکسان افزایش یکسانی دارد، و این افزایش مستقل از حرکت در راستای y است؛ و (۲) مؤلفهٔ y حرکتهای دو پرتابه یکسان است: مسافت طی شده در بازه‌های یکسان برای هر دو پرتابه یکی است، و به حرکت افقی یکی از آنها بستگی ندارد.

زدن هدفِ در حال سقوط

یکی از نمایشهای زیبای کلاسی این است که: با یک تفنگ بادی هدفی را که در ارتفاع بالاتری از تفنگ معلق است نشانه می‌گیریم و به آن شلیک می‌کنیم. ترتیبی داده شده است که هدف، همزمان با خروج "گلوله" از لولهٔ تفنگ، رها می‌شود و سقوط آزاد می‌کند. در این نمایش سرعت اولیهٔ گلوله هر چه باشد، گلوله همیشه به هدفِ در حال سقوط می‌خورد.

ساده‌ترین راهِ فهمیدن این موضوع این است: اگر شتاب گرانش نبود، هدف سقوط نمی‌کرد و گلوله درست در جهت خطی که آن‌را به هدف وصل می‌کند حرکت می‌کرد (شکل ۸). گرانش موجب می‌شود که هر دو جسم با سرعت یکسان، نسبت به نقطه‌ای که در صورت نبودن گرانش در آنجا می‌بودند سقوط کنند. بنابراین، در زمان t گلوله



شکل۸. جابه‌جایی پرتابه نسبت به مبدا را، در هر زمان t، می‌شود مجموع دو بردار دانست: $\mathbf{v}_{0P}t$ در جهت $\mathbf{v}_{0P}$ و $1/2\mathbf{g}t^2$ در راستای قائم رو به پایین است.

به اندازهٔ $\frac{1}{2}gt^2$ نسبت به نقطهٔ تعلیق هدف (که اگر گرانش نبود به آن می‌رسید) سقوط کرده است. هدف هم در این مدت به همین اندازه از محل اولیهٔ خود سقوط کرده است. زمانی که گلوله به خطِ سقوط هدف می‌رسد، همان قدر پایین‌تر از مکان اولیهٔ هدف است که خودِ هدف پایین‌تر است. پس گلوله به هدف می‌خورد. گلوله اگر سریعتر از این حرکت کند (v_0 بزرگتر باشد)، برد بیشتری هم خواهد داشت و در نقطهٔ بالاتری به خط سقوط هدف می‌رسد؛ اما چون این رویداد، نسبت به حالت قبل، زودتر رخ می‌دهد، هدف هم در این مدت، کمتر سقوط کرده است و باز هم برخورد صورت می‌گیرد. برای سرعتهای کمتر هم، همین استدلال مشاهده را توضیح می‌دهد.

با استفاده از معادلهٔ ۱۲

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

می‌توانیم ماوقع را به‌طور تحلیلی هم نشان بدهیم. به کمک این معادله، مکان پرتابه و هدف را در زمان دلبخواه t به‌دست می‌آوریم. برای پرتابهٔ P، $\mathbf{r}_0 = 0$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ است، پس

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

برای هدفِ T، $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$، $\mathbf{v}_0 = 0$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ است، پس

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

اگر قرار باشد برخورد صورت بگیرد، $\mathbf{r}_P$ باید با $\mathbf{r}_T$ برابر شود. مقایسهٔ دو معادله نشان می‌دهد که این برخورد همیشه در زمانی اتفاق می‌افتد که $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ شود، یعنی در زمان $(r_{0T}/v_{0P})t$ که در غیابِ گرانش، پرتابهٔ بی‌شتاب می‌بایست در امتداد خط پرتاب به هدف ثابت می‌رسید. چون ضرب شدن بردار در یک اسکالر، جهت آن را تغییر نمی‌دهد، از معادلهٔ $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{r}_{0T}$ و

$v_{\circ p}$ باید هم‌جهت باشند. یعنی تفنگ را باید درست به طرف مکان اولیهٔ هدف نشانه گرفت.

مثال ۳. می‌خواهیم بسته‌ای را از هواپیما روی هدف بیندازیم. هواپیما با سرعت ثابت افقی ۱۵۵km/h در ارتفاع ۲۲۵m از هدف پرواز می‌کند؛ جهت پرواز آن به طرف نقطه‌ای مستقیماً دربالای هدف است. زاویهٔ خط دید هدف از هواپیما، α، در لحظهٔ رها کردن بسته چقدر باشد تا بسته به هدف برسد (شکل ۹)؟

حل: دستگاه مرجعی انتخاب می‌کنیم که نسبت به زمین ثابت، و مبدأ آن O، نقطهٔ رها شدن بسته باشد. حرکت بسته در لحظهٔ رها شدن، همان حرکت هواپیماست. پس سرعت اولیهٔ بسته، $\mathbf{v}_\circ$، در راستای افق و اندازهٔ آن ۱۵۵km/h است. زاویهٔ پرتاب $\phi_\circ$ صفر است.

زمان سقوط از معادلهٔ ۲۲ به‌دست می‌آید. با $\phi_\circ = \circ$ و $y = -۲۲۵\text{m}$، نتیجه می‌شود که

$$t = \sqrt{-\frac{۲y}{g}} = \sqrt{-\frac{(۲)(-۲۲۵\text{m})}{۹٫۸\text{m/s}^۲}} = ۶٫۷۸\text{s}$$

توجه کنید که زمان سقوط در پرتابِ افقی، به سرعت هواپیما بستگی ندارد. (در پرتابِ مایل چنین نیست؛ مسئلهٔ ۳۸.)

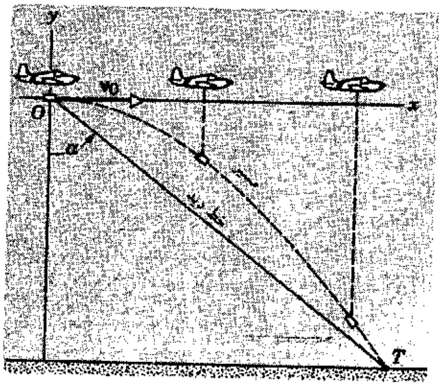
مسافت افقی‌ای که بسته در این مدت می‌پیماید از معادلهٔ ۲۱ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x = v_{x_\circ} t &= (۱۵۵\text{km/h})(۱\text{h}/۳۶۰۰\text{s})(۶٫۷۸\text{s}) \\ &= ۰٫۲۹۲\text{km} = ۲۹۲\text{m} \end{aligned}$$

بنابراین، زاویهٔ دید (شکل ۹) باید برابر باشد با

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{x}{|y|} = \tan^{-۱}\frac{۲۹۲\text{m}}{۲۲۵\text{m}} = ۵۲^\circ$$

آیا مسیر حرکت بسته از دیدگاه دستگاه مرجعی که نسبت به هواپیما ساکن است، سهموی به نظر می‌رسد؟ (آیا تاکنون فیلمی از پرتاب بمب



شکل۹. مثال ۳.

از هواپیما از چشم دوربینی در همان هواپیما، یا در هواپیمای دیگری که "پابه‌پای" اولی پرواز می‌کند، دیده‌اید؟)

مثال ۴. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیهٔ ۱۵٫۵m/s با زاویهٔ ۳۶° نسبت به افق شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در یک صفحهٔ قائم حرکت کند، (الف) زمان $t_۱$ برای اینکه توپ به نقطهٔ اوج مسیر خود برسد چقدر است؟ (ب) توپ تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟، (ج) برد توپ و زمان پرواز آن چقدر است؟ (د) سرعت توپ را در لحظهٔ برخورد به زمین پیدا کنید.

حل: (الف) در نقطهٔ اوج، مؤلفهٔ قائم سرعت صفر است. t را از معادلهٔ ۱۸ به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v_\circ \sin\,\phi_\circ - v_y}{g}$$

در این معادله اگر مقادیر

$$v_y = \circ,\ v_\circ = ۱۵٫۵\text{m/s},\ \phi_\circ = ۳۶^\circ,\ g = ۹٫۸\text{m/s}^۲$$

را بگذاریم، نتیجه می‌گیریم

$$t_۱ = \frac{(۱۵٫۵\text{m/s})(\sin ۳۶^\circ)}{۹٫۸\text{m/s}^۲} = ۰٫۹۳\text{s}$$

(ب) توپ در $t = ۰٫۹۳\text{s}$ به نقطهٔ اوج می‌رسد از معادلهٔ ۲۲

$$y = (v_\circ \sin\phi_\circ)t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} y_{\max} =&(۱۵٫۵\text{m/s})(\sin ۳۶^\circ)(۰٫۹۳\text{s}) - \\ &- \frac{۱}{۲}(۹٫۸\text{m/s}^۲)(۰٫۹۳\text{s})^۲ = ۴٫۲\text{m} \end{aligned}$$

(ج) برد R از رابطهٔ ۲۴ به‌دست می‌آید

$$R = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\phi_\circ = \frac{(۱۵٫۵\text{m/s})^۲}{۹٫۸\text{m/s}^۲}\sin ۷۲^\circ = ۲۳٫۳\text{m}$$

می‌توانیم در معادلهٔ ۲۲ بگذاریم $y = \circ$ و زمان $t_۲$ برای برگشت توپ به زمین را پیدا کنیم. نتیجه می‌شود که

$$t_۲ = \frac{۲v_\circ \sin\,\phi_\circ}{g} = \frac{۲(۱۵٫۵\text{m/s})(\sin ۳۶^\circ)}{۹٫۸\text{m/s}^۲} = ۱٫۸۶\text{s}$$

توجه کنید که $t_۲ = ۲t_۱$ است، که البته باید هم باشد چون زمان لازم برای بالا رفتن توپ (رسیدن آن از زمین به نقطهٔ اوج) با زمان لازم برای سقوط توپ (رسیدن آن از نقطهٔ اوج به زمین) برابر است.

می‌شود دید که این نتایج با معادلهٔ $x = x_\circ + v_{x_\circ} t$ هم سازگارند.
اگر بگذاریم $t = t_۲$، x باید برابر با R شود. از معادلهٔ ۲۱

$$R = v_{x_\circ} t_۲ = (v_\circ \cos\phi_\circ) t_۲ = ۲۳٫۳\text{m}$$

که همان مقداری است که قبلاً به‌دست آمد.

(د) برای پیدا کردن سرعت توپ در لحظهٔ برخورد با زمین، معادلهٔ ۱۷ را به‌کار می‌بریم و v_x را به‌دست می‌آوریم. v_x در طول حرکت ثابت می‌ماند:

$$v_x = v_\circ \cos\phi_\circ = (۱۵٫۵\text{m/s})(\cos ۳۶^\circ) = ۱۲٫۵\text{m/s}$$

از معادلهٔ ۱۸ هم v_y را در $t = t_۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} v_y &= v_\circ \sin\phi_\circ - gt = (۱۵٫۵\text{m/s})(\sin ۳۶^\circ) \\ &- (۹٫۸\text{m/s}^۲)(۱٫۸۶\text{s}) = -۹٫۱\text{m/s} \end{aligned}$$

پس اندازهٔ سرعت برابر است با

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(۱۲٫۵\text{m/s})^۲ + (-۹٫۱\text{m/s})^۲} \\ &= ۱۵٫۵\text{m/s} \end{aligned}$$

و جهت آن از این رابطه به‌دست می‌آید

$$\tan\phi = v_y / v_x = -۹٫۱/۱۲٫۵$$

بنابراین، $\phi = -۳۶^\circ$، یا ۳۶° ساعتگرد نسبت به محور x است. توجه کنید که $\phi = -\phi_\circ$ است، یعنی همان است که از تقارن مسئله انتظار می‌رود (شکل ۵).

اندازهٔ سرعت نهایی با اندازهٔ سرعت اولیه برابر از آب در آمد. می‌توانید بگویید چرا؟ آیا این صرفاً یک تصادف است؟

۴ـ۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت پرتابی، هم اندازه و هم جهت شتاب ثابت است، اما اندازه و جهت سرعت هر دو تغییر می‌کنند. اکنون حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن ثابت است. چنانکه بعداً خواهیم دید، در این حرکت اندازهٔ سرعت و اندازهٔ شتاب، هر دو، ثابت‌اند اما جهت هر یک از این دو بردار به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. این وضعیت را حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌نامند. از نمونه‌های این نوع حرکت می‌توانیم از حرکت ماهواره‌های زمین و حرکت نقاط روی اجسام چرخانی مثل پره‌های پنکه، صفحهٔ گرامافون، و دیسک کامپیوتر نام ببریم. در واقع، اگر بتوانیم خودمان را ذره فرض کنیم، ما هم به خاطر چرخش زمین حرکت دایره‌ای یکنواخت داریم.

شکل ۱۰الف این حرکت را نشان می‌دهد. فرض کنید که $P_۱$ مکان ذره در زمان $t_۱$ و $P_۲$ مکان آن در زمان $t_۲ = t_۱ + \Delta t$ باشد و سرعت در $P_۱$ بردار $\mathbf{v}_۱$ است که در این نقطه مماس بر منحنی است. سرعت در $P_۲$ بردار $\mathbf{v}_۲$ است. اندازهٔ $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ یکسان و برابر با v است، اما جهت آنها یکی نیست. طول مسیری که طی زمان Δt پیموده شده، همان طولِ قوس $P_۱P_۲$ است که برابر است با $r\theta$ (اگر θ را برحسب رادیان بسنجیم)، و همچنین برابر است با $v\Delta t$. پس،

$$r\theta = v\Delta t \qquad (۲۵)$$

اکنون دو بردار $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ را به‌صورت شکل ۱۰ب، از یک نقطه رسم می‌کنیم. این کار مجاز است، به شرطی که اندازه و جهت بردارها، همان اندازه و جهتشان در شکل ۱۰الف باشد. به کمک شکل ۱۰ب، تغییر سرعت ذره از $P_۱$ به $P_۲$، کاملاً مشهود است. این تغییر، $\mathbf{v}_۲ - \mathbf{v}_۱ = \Delta\mathbf{v}$، برداری است که باید به $\mathbf{v}_۱$ اضافه کنیم تا $\mathbf{v}_۲$ به‌دست بیاید. اگر این تغییر سرعت در بازهٔ $P_۱P_۲$ را از نقطهٔ وسط قوس $P_۱P_۲$ بکشیم، $\Delta\mathbf{v}$ به‌طرف مرکز دایره خواهد بود.

مثلث $OQ_۱Q_۲$ که متشکل از $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$ و $\Delta\mathbf{v}$ است با مثلث $CP_۱P_۲$ (شکل ۱۰ج)، که از وتر $P_۱P_۲$ و شعاعهای $CP_۱$ و $CP_۲$ ساخته می‌شود متشابه است چون‌که هر دو مثلث متساوی‌الساقین‌اند و زاویهٔ رأسشان با هم برابر است؛ زاویهٔ θ بین $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ همان زاویهٔ $P_۱CP_۲$ است زیرا $\mathbf{v}_۱$ بر $CP_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ بر $CP_۲$ است. در شکل ۱۰ب، با توجه به نیمساز زاویهٔ θ می‌بینیم که

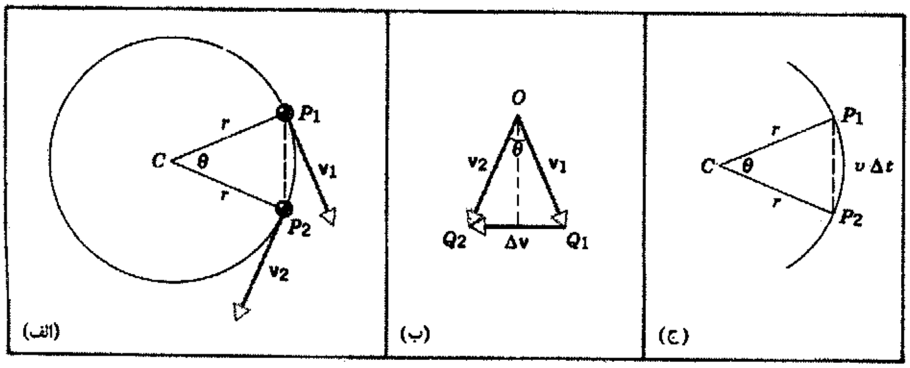
$$\frac{۱}{۲}\Delta v = v \sin\frac{\theta}{۲} \qquad (۲۶)$$

حالا با استفاده از نتایج معادلات ۲۵ و ۲۶ برای Δv و Δt، اندازهٔ شتاب متوسط را در این بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲v\sin(\theta/۲)}{r\theta/v} = \frac{v^۲}{r}\,\frac{\sin(\theta/۲)}{\theta/۲} \qquad (۲۷)$$

برای به‌دست آوردن شتاب لحظه‌ای، حد این عبارت را در $\Delta t \to \circ$ در نظر می‌گیریم. اگر Δt کوچک باشد، زاویهٔ θ هم کوچک می‌شود. در این مورد می‌توانیم تقریب زاویهٔ کوچک، $\sin x \approx x$ را به‌کار ببریم. (این رابطه فقط وقتی درست است که زاویه برحسب رادیان بیان شود. مثلاً اگر $x = ۵^\circ = ۰٫۰۸۷۳\text{rad}$ باشد، $\sin x = ۰٫۰۸۷۲$ است.) پس برای زوایای کوچک $\sin(\theta/۲) \approx \theta/۲$ است و کسر دوم طرف راست معادلهٔ ۲۷ به ۱ می‌گراید. دقت کنید که در کسر اول طرف راست معادلهٔ ۲۷، نه v و نه r هیچ‌یک به Δt بستگی ندارند. بنابراین مقدار این کسر در حدگیری تغییر نمی‌کند. به‌این ترتیب، اندازهٔ شتاب لحظه‌ای به‌دست می‌آید:

$$a = \lim_{\Delta t\to\circ}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\circ}\frac{v^۲}{r}\,\frac{\sin(\theta/۲)}{\theta/۲} = \frac{v^۲}{r}\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{\sin(\theta/۲)}{\theta/۲}$$



شکل ۱۰. حرکت دایره‌ای یکنواخت (الف) ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن ثابت می‌ماند. سرعت ذره در دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$ نشان داده شده است. (ب) تغییر سرعت ذره از $P_۱$ تا $P_۲$، $\Delta \mathbf{v}$ است. (ج) ذره در زمان Δt قوس $P_۱P_۲$ را طی می‌کند.

با استفاده از تقریب زاویهٔ کوچک، به‌جای حد باقی‌مانده ۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

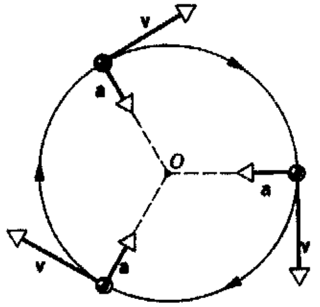
$$a = \frac{v^۲}{r} \qquad (۲۸)$$

چون جهت شتاب متوسط همان جهت $\Delta \mathbf{v}$ است، جهت $\mathbf{a}$ همیشه شعاعی و به طرف مرکز دایره، (یا هر قوس دایره‌ای از مسیر حرکت) است.

شکل ۱۱ رابطهٔ لحظه‌ای بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را در نقاط مختلف مسیر نشان می‌دهد. اندازهٔ $\mathbf{v}$ ثابت است، اما جهت آن مدام تغییر می‌کند. این سرعت منجر به شتابی ($\mathbf{a}$) می‌شود که آن هم اندازه‌اش ثابت است ولی جهتش مدام تغییر می‌کند. سرعت $\mathbf{v}$ همواره مماس بر دایره و در جهتِ حرکت است؛ شتاب $\mathbf{a}$ همواره در راستای شعاع و به طرف داخل است. به همین علت، $\mathbf{a}$ را شتاب شعاعی، یا مرکزگرا می‌نامند. در بخش بعدی، معادلهٔ ۲۸ را با استفاده از بردارهای یکه به‌دست خواهیم آورد.

هم در سقوط آزاد و هم در حرکت پرتابی، جهت و اندازهٔ $\mathbf{a}$ ثابت است، و می‌توانیم معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار ببریم. این معادلات را نمی‌شود برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به‌کار برد، زیرا $\mathbf{a}$ جهتش تغییر می‌کند و بنابراین ثابت نیست.

یکای شتاب مرکز گرا همان یکای شتاب ناشی از تغییر اندازهٔ



شکل ۱۱. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب $\mathbf{a}$ همواره به طرف مرکز دایره است، و بنابراین همواره بر $\mathbf{v}$ عمود است.

سرعت است. از نظر ابعادی

$$[a] = \frac{[v^۲]}{[r]} = \frac{(\mathrm{L/T})^۲}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^۲}$$

که همان بعد معمول شتاب است. پس یکای این شتاب ممکن است $\mathrm{m/s^۲}$، $\mathrm{km/h^۲}$، یا هر یکای دیگری با بعد $\mathrm{L/T^۲}$ باشد.

شتاب ناشی از تغییر جهتِ سرعت همانقدر واقعی است و همانقدر، از هر نظر، "شتاب" است که شتاب ناشی از تغییر اندازهٔ سرعت. شتاب، طبق تعریف، آهنگِ تغییر زمانی سرعت است؛ سرعت هم بردار است، یعنی هم تغییر اندازهٔ آن می‌تواند منجر به شتاب شود هم تغییر جهتش. ویژگیهای جهتی کمیتهای فیزیکی برداری را نمی‌شود نادیده گرفت؛ تغییرات جهتی این کمیتها درست همانقدر اهمیت دارد که تغییرات مقداری آنها.

باید بر این نکته تأکید کرد که لزومی ندارد در جهت شتاب، حرکت داشته باشیم، و در حالت کلی هیچ رابطهٔ مشخصی بین جهتهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ وجود ندارد. شکل ۱۲ مثالهایی را نشان می‌دهد که در آنها زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ از ۰ تا ۱۸۰° تغییرمی‌کند. تنها در یک مورد، که $\theta = ۰$ است، حرکت در جهت $\mathbf{a}$ است.

مثال ۵. ماه به دور زمین می‌گردد و زمان یک گردشِ کامل آن ۲۷٫۳ روز است. فرض کنید که مدار دایره‌ای، و شعاع آن ۲۳۸۰۰۰ مایل است. اندازهٔ شتاب ماه به طرف زمین چقدر است؟

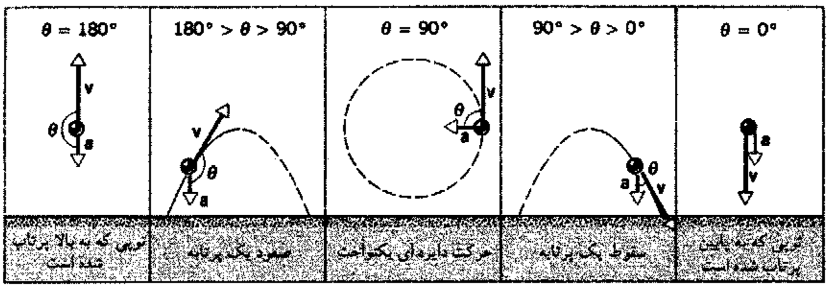
حل: $r = ۲۳۸۰۰۰\,\mathrm{mi} = ۳٫۸۲ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m}$ است. زمان یک گردش کامل (زمان تناوب) $T = ۲۷٫۳\mathrm{d} = ۲٫۳۶ \times ۱۰^۶\,\mathrm{s}$ است. بنابراین اندازهٔ سرعت ماه (که آن‌را ثابت فرض می‌کنیم) برابر است با

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = \frac{۲\pi(۳٫۸۲ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m})}{۲٫۳۶ \times ۱۰^۶\,\mathrm{s}} = ۱۰۱۸\,\mathrm{m/s}$$

شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۱۰۱۸\,\mathrm{m/s})^۲}{۳٫۸۲ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m}}$$

$$= ۰٫۰۰۲۷۱\,\mathrm{m/s^۲} \quad \text{یا} \quad ۲٫۷۶ \times ۱۰^{-۴} g_n$$



شکل ۱۲. رابطهٔ هندسی میان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برای حرکتهای مختلف.

g_n (یعنی $۹٫۸۰۶۶۵\,\mathrm{m/s^۲}$) مقدار استانداردِ بین‌المللی پذیرفته شده برای g است. این مقدار استاندارد، که در واقع مقدار تقریبی شتاب سقوط آزاد در سطح دریا در عرض جغرافیایی °۴۵ است، خیلی وقتها به عنوان مقیاسی برای شتاب به‌کار می‌رود. مثلاً، شتاب وارد بر خلبانهای جت، یا شتاب وارد بر مسافران ارابه‌های تفریحی بازیگاهها را معمولاً برحسب g_n بیان می‌کنند.

مثال ۶. ماهواره‌ای در ارتفاع $h = ۲۱۰\,\mathrm{km}$ از سطح زمین، به دور زمین می‌گردد. در این ارتفاع، $g = ۹٫۲\,\mathrm{m/s^۲}$ است. (این مقدار از $۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲}$ کمتر است چون g با زیاد شدن ارتفاع کم می‌شود، فصل ۱۶) سرعت این ماهواره را پیدا کنید. شعاع زمین $R = ۶۳۷۰\,\mathrm{km}$ است.

حل: ماهواره هم، مثل اجسام دیگر نزدیک به زمین، یک شتاب g به طرف مرکز زمین دارد. این شتاب، همراه با سرعت مماسی ماهواره، موجب می‌شود که حرکت ماهواره دایره‌ای باشد. پس شتاب مرکزگرا همان شتاب گرانشیِ g است، و از معادلهٔ ۲۸ $(a = v^۲/r)$ به‌ازای $a = g$ و $r = R + h$ به‌دست می‌آید

$$g = \frac{v^۲}{R+h}$$

یا

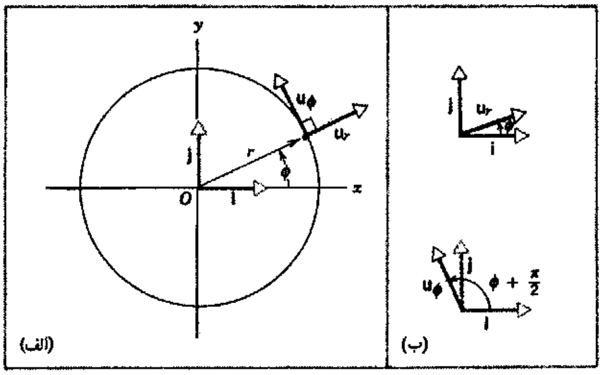
$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(۶۵۸۰\,\mathrm{km})(۹٫۲\,\mathrm{m/s^۲})(۱۰^۳\,\mathrm{m/km})}$$

$$= ۷۷۸۰\,\mathrm{m/s} \quad \text{یا} \quad ۱۷۴۰۰\,\mathrm{mi/h}$$

با این سرعت، ماهواره در هر ۱٫۴۸h یک بار به دور زمین می‌گردد.

۵ـ۴ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای (اختیاری)[1]

چنانکه در بخش پیش دیدیم، ذره‌ای که با (مقدار) سرعت ثابت روی قوسی از دایره حرکت می‌کند شتاب مرکزگرا دارد. البته اگر اندازهٔ سرعت ثابت نباشد باز هم شتاب مرکزگرا در کار هست، اما در این حالت ذره یک شتاب مماسی هم دارد که موجب تغییر سرعت مماسی آن



شکل ۱۳. (الف) ذره‌ای که در جهت پادساعتگرد روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. (ب) بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ و رابطهٔ آنها با $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$.

می‌شود. با استفاده از روشهای برداری می‌توانیم ارتباط میان سرعت و شتاب، و جهت شتاب را تعیین کنیم.

ابتدا معادلهٔ ۲۸ برای شتاب مرکزگرا در سرعت ثابت را دوباره، این بار با روشهای برداری کلی‌تر، به‌دست می‌آوریم. شکل ۱۳ ذره‌ای را نشان می‌دهد که‌حول مبدأِ O یک دستگاه مرجع، حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. برای این حرکت، مختصات قطبی r و ϕ مفیدتر از مختصات دکارتی x و y است، زیرا r در طی حرکت ثابت می‌ماند و ϕ با زمان به صورت خطی ساده‌ای افزایش می‌یابد؛ رفتار x و y طی این نوع حرکت پیچیده‌تر است. رابطهٔ این دو دسته مختصات با هم به شکل زیر است

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-۱}(y/x) \qquad (۲۹)$$

یا (روابط معکوس)

$$x = r\cos\phi \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi \qquad (۳۰)$$

در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را برای توصیف حرکت در صفحهٔ xy به‌کار می‌بریم، اینجا بهتر است دو بردار یکهٔ جدید، $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$، معرفی کنیم. طول این دو بردار هم، مثل $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، یک است. اینها هم بی‌بعدند، و فقط جهت مشخص می‌کنند.

[1] می‌توان از این بخش گذشت یا آن‌را تا بحث مربوط به حرکت دورانی در فصل ۱۱ به‌تعویق انداخت.

بردار یکهٔ $\mathbf{u}_r$ در هر نقطه در جهت افزایش r در آن نقطه است. این بردار در راستای شعاع و به طرف خارج از مرکز است. بردار یکهٔ $\mathbf{u}_\phi$ در هر نقطه در جهت افزایش ϕ در آن نقطه است. این بردار در هر نقطه بر دایره‌ای به مرکز مبدأ که از آن نقطه می‌گذرد مماس، و در جهتِ پادساعتگرد است. چنانکه در شکل ۱۳الف می‌بینیم، $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ برهم عمودند. اختلاف $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ با بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در این است که جهت $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$، نقطه به نقطه عوض می‌شود؛ بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ بردارهای ثابتی نیستند. بنابراین وقتی از عبارتهای شامل بردارهای یکه مشتق می‌گیریم، $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را می‌توانیم ثابت بگیریم، اما $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ را نمی‌توانیم.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ را می‌شود برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، به‌صورت زیر نوشت (شکل ۱۳ب):

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\ \cos\ \phi + \mathbf{j}\ \sin\ \phi \qquad (۳۱)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\phi &= \mathbf{i}\ \cos(\phi + \pi/۲) + \mathbf{j}\ \sin(\phi + \pi/۲) \\ &= -\mathbf{i}\ \sin\ \phi + \mathbf{j}\ \cos\ \phi \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

در جملاتی از نوع $\mathbf{i} \cos\ \phi$ بردار را در اسکالر ضرب کرده‌ایم و ترتیبِ نوشتن عاملها مهم نیست؛ این جمله را به شکل $(\cos\ \phi)\mathbf{i}$ هم می‌شود نوشت.

اگر ذره با اندازهٔ سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، بردار سرعت آن مؤلفهٔ شعاعی ندارد، و کلاً در جهت $\mathbf{u}_\phi$ است. به‌علاوه، اندازهٔ سرعت همان vی ثابت است. پس،

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi \qquad (۳۳)$$

یعنی $\mathbf{v}$ بر دایره مماس است و اندازه‌اش ثابت است، اما جهتش تغییر می‌کند.

حالا می‌توانیم شتاب را به‌دست بیاوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} \qquad (۳۴)$$

توجه کنید که سرعت ثابتِ v از مشتق بیرون می‌آید. برای به‌دست آوردن مشتقِ بردار یکهٔ $\mathbf{u}_\phi$، معادلهٔ ۳۲ را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i}\frac{d(\sin\ \phi)}{dt} + \mathbf{j}\frac{d(\cos\ \phi)}{dt} \\ &= -\mathbf{i}\ \cos\ \phi\frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j}\ \sin\ \phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= (-\mathbf{i}\ \cos\ \phi - \mathbf{j}\ \sin\ \phi)\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\mathbf{u}_r\frac{d\phi}{dt}\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

در آخرین مرحله، معادلهٔ ۳۱ را به‌کار برده‌ایم. به این ترتیب،

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v\frac{d\phi}{dt} \qquad (۳۶)$$

ذره با سرعت ثابت روی دایره حرکت می‌کند، پس $d\phi/dt$ برابر است با زاویه‌ای که در یک دور طی می‌شود (۲π رادیان) تقسیم بر زمانِ پیمودن یک دور (مسافت $۲\pi r$ تقسیم بر سرعت v):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{۲\pi}{۲\pi r/v} = \frac{v}{r} \qquad (۳۷)$$

اکنون اگر معادلهٔ ۳۷ را در معادلهٔ ۳۶ بگذاریم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v\frac{v}{r} \\ &= -\mathbf{u}_r\frac{v^۲}{r}\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

می‌بینیم که اندازهٔ شتاب، ثابت و برابر با $v^۲/r$ است (همان‌طور که در معادلهٔ ۲۸ به‌دست آوردیم)، و جهت شتاب، شعاعی و به طرف داخل است (یعنی، برخلاف جهت $\mathbf{u}_r$). ضمنِ حرکت ذره روی دایره، جهت $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{a}$ نسبت به محورهای مختصات x و y تغییر می‌کند، زیرا جهت شعاعی تغییر می‌کند.

شتاب مماسی در حرکت دایره‌ای

اکنون حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم که در آن اندازهٔ سرعت v ذره‌ای که روی دایره حرکت می‌کند ثابت نیست. در این مورد هم از روشهای برداری و مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

اینجا هم سرعت از معادلهٔ ۳۳ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

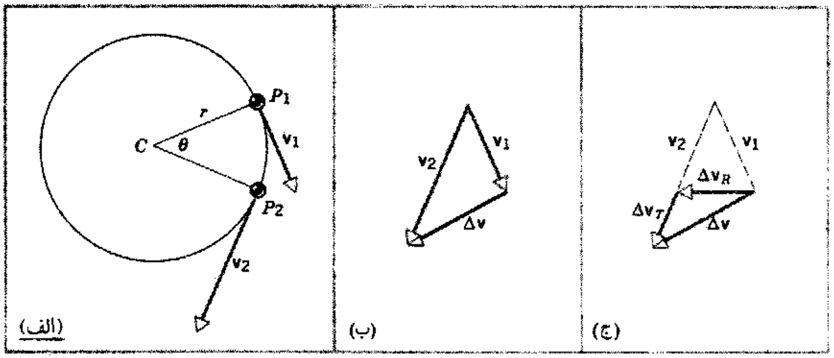
با این تفاوت که در این مورد نه تنها $\mathbf{u}_\phi$ بلکه v (اندازهٔ سرعت) هم با زمان تغییر می‌کند. با استفاده از رابطهٔ مشتق حاصل‌ضرب، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi\frac{dv}{dt} \qquad (۳۹)$$

در معادلهٔ ۳۴، جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ ۳۹ وجود نداشت، زیرا v را ثابت فرض کرده بودیم. جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ ۳۹، چنانکه قبلاً به‌دست آوردیم، $-\mathbf{u}_r(v^۲/r)$ است. به‌این ترتیب، معادلهٔ ۳۹ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T \qquad (۴۰)$$

که در آن، $a_R = v^۲/r$ و $a_T = dv/dt$ است. جملهٔ اول، $-\mathbf{u}_r a_R$، مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در راستای شعاعی به طرف مرکز دایره است، و ناشی از تغییر جهت سرعتِ حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار $\mathbf{a}_R$ و اندازهٔ آن، هر دو را شتاب مرکزگرا می‌نامند. جملهٔ دوم، $\mathbf{u}_\phi a_T$، مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در جهت مماس بر مسیر ذره است، و ناشی از تغییر اندازهٔ سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار $\mathbf{a}_T$ و اندازهٔ آن a_T، هر دو، را شتاب مماسی می‌نامند.



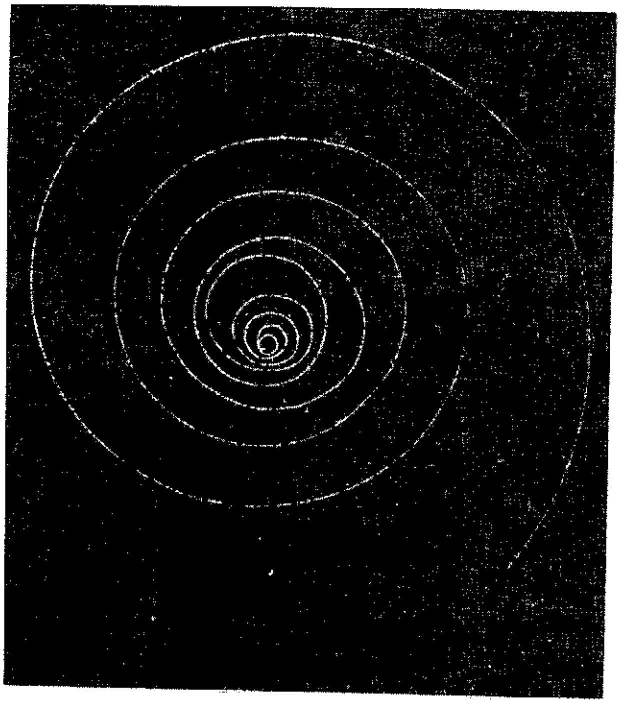
شکل ۱۴. (الف) در حرکت دایره‌ای غیریکنواخت، اندازهٔ سرعت متغیر است. (ب) تغییر سرعت از P_1 تا P_2 (ج) $\Delta \mathbf{v}$ شامل دو بخش است: $\Delta \mathbf{v}_R$، ناشی از تغییر جهت $\mathbf{v}$، و $\Delta \mathbf{v}_T$، ناشی از تغییر اندازهٔ $\mathbf{v}$، در حد $\Delta t \to 0$، $\Delta \mathbf{v}_R$ به‌طرف مرکز دایره، و $\Delta \mathbf{v}_T$ مماس بر مسیر است.

اندازهٔ شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \qquad (41)$$

اگر اندازهٔ سرعت ثابت باشد، $a_T = dv/dt = 0$ است و معادلهٔ ۴۰ به معادلهٔ ۳۸ تبدیل می‌شود. اگر اندازهٔ سرعت ثابت نباشد، a_T صفر نمی‌شود و a_R هم، نقطه به نقطه تغییر می‌کند. اندازهٔ سرعت v ممکن است چنان تغییر کند که a_T ثابت نباشد؛ در این صورت، a_T و a_R، هر دو، نقطه به نقطه تغییر می‌کنند.

شکل ۱۵ رد یک الکترون پر انرژی است که به شکل مارپیچی به طرف داخل است. این رد در اتاقک حباب پر از هیدروژن مایع تشکیل شده است. حرکت الکترون، در اثر حرکت در مایع اتاقک طوری کند می‌شود که سرعت v آن به‌طور منظم کاهش می‌یابد. بنابراین، الکترون در هر نقطه یک شتاب مماسی a_T دارد که از dv/dt به‌دست می‌آید. البته الکترون روی دایره حرکت نمی‌کند ولی قوسهای کوچک مارپیچ کاملاً شبیه قوسهای دایره‌ای به شعاع rاند. پس شتاب مرکزگرای a_R در هر نقطه v^2/r است، که در آن r شعاع مسیر در آن نقطه است. با کاهش انرژی ذره، r و v، هر دو، کوچک می‌شوند. شتاب شعاعی الکترون ناشی از میدان مغناطیسی‌ای است که در اتاقک حباب حضور دارد. این میدان بر صفحهٔ شکل ۱۵ عمود است (فصل ۳۴).



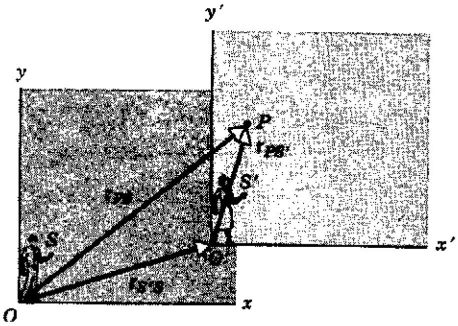
شکل ۱۵. رد یک الکترون دراتاقک حباب هیدروژن مایع. الکترون یک شتاب شعاعی دارد، که ناشی از میدان مغناطیسی است. این شتاب می‌خواهد که مسیر حرکت را دایره‌ای کند. اما الکترون، در اثر برخورد با اتمهای هیدروژن، کند می‌شود. بنابراین، یک شتاب مماسی هم دارد. مسیر حاصل از این دو شتاب، مارپیچ است.

۴ـ۶ حرکت نسبی

فرض کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که با سرعت ثابت 55mi/h حرکت می‌کند. اجسام دیگر موجود در اتومبیل هم با همان سرعت حرکت می‌کنند؛ سرعت آنها نسبت به زمین 55mi/h است، اما نسبت به شما صفر است. در این اتومبیل می‌توان یک دسته آزمایش معمولی فیزیک انجام داد؛ نتیجهٔ این آزمایشها از حرکت یکنواخت اتومبیل متأثر نمی‌شود. مثلاً می‌توانید توپی را (در دستگاه مرجع خودتان) به بالا پرتاب کنید؛ خواهید دید که توپ مستقیماً به پایین سقوط می‌کند. توپ (به خاطر حرکت اتومبیل) حرکت افقی دارد، اما شما هم همان حرکت افقی را دارید، در حرکت افقی نسبی صفر است.

اما نتیجه از دید ناظر زمینی فرق می‌کند. توپ یک مؤلفهٔ افقی سرعت دارد که 55mi/h است، و یک مؤلفهٔ عمودی که ناشی از حرکتی است که شما به آن می‌دهید. می‌دانیم که پرتابه‌ای با این سرعت، مسیر سهموی دارد. بنابراین، معادلاتی که شما و ناظر زمینی برای توصیف حرکت به‌کار می‌برید، با هم متفاوت‌اند، اما قوانین فیزیکی‌ای که بر حرکت توپ حاکم‌اند از نظر هر دو ناظر یکی است؛ مثلاً هر دو شما یک مقدار برای شتاب سقوط آزاد به‌دست می‌آورید.

اتومبیل دیگری که با سرعت 57mi/h از شما سبقت بگیرد، از نظر شما (نسبت به چارچوب مرجع شما) به آهستگی با سرعت 2mi/h (یعنی $57\text{mi/h} - 55\text{mi/h}$) در حرکت است. اگر شواهد خارجی ــ ناظری که از کنار شما می‌گذرند، هوایی که از اطراف



شکل۱۶. ناظرهای S و S'، که نسبت به هم حرکت می‌کنند، ذرهٔ P را مشاهده می‌کنند. این دو ناظر، در لحظهٔ مشاهده، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصاتِ خودشان، به‌ترتیب با $\mathbf{r}_{PS}$ و $\mathbf{r}_{PS'}$ می‌سنجند. در همین لحظه ناظر S مکان S' را نسبت به مبدأ O، با $\mathbf{r}_{S'S}$ می‌سنجد.

اتومبیل به عقب هجوم می‌برد، دست‌انداز جاده، و صدای موتور— را کنار بگذارید و فقط به "اتومبیل" توجه کنید، هیچ راهی ندارید برای اینکه "واقعاً" تعیین کنید که کدام اتومبیل دارد حرکت می‌کند. مثلاً اگر اتومبیل دیگر ساکن باشد و اتومبیل شما با سرعت 2mi/h به عقب برود، باز هم نتیجهٔ مشاهدات شما همین خواهد بود.

در این بخش، توصیف حرکت یک ذره را از دید دو ناظر، که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند، بررسی می‌کنیم. دو نفر را در نظر بگیرید که یکی در اتومبیلی که با سرعت ثابت در جاده‌ای مستقیم حرکت می‌کند نشسته و دیگری کنار جاده ایستاده است. ذره‌ای که هر دو ناظر مشاهده می‌کنند ممکن است مثلاً توپی باشد که از یک اتومبیل به هوا یا به طرف اتومبیل دیگر پرتاب می‌شود.

دو ناظر را S و S' می‌نامیم. هر ناظر، چارچوب مرجعی دارد که یک دستگاه مختصات دکارتی به آن متصل است. برای سادگی فرض می‌کنیم که هر ناظر در مبدأ دستگاه مختصات مربوط به خودش واقع شده است. تنها یک قید روی حرکت نسبی دو دستگاه می‌گذاریم: سرعت نسبی میان S و S' باید ثابت باشد. منظور این است که هم اندازه و هم جهت سرعت ثابت باشد. دقت کنید که این محدودیت روی سرعتِ ذره‌ای که ناظرهای S و S' مشاهده می‌کنند نیست. لزومی ندارد که ذره با سرعت ثابت حرکت کند؛ ذره می‌تواند شتاب داشته باشد.

شکل ۱۶ دو دستگاه مختصات مربوط به S و S' را در زمان t نشان می‌دهد. برای سادگی، فقط حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۶ دو صفحهٔ xy و $x'y'$ را، که در واقع یک صفحه‌اند، نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه S'، نسبت به مبدأ دستگاه S، با بردار $\mathbf{r}_{S'S}$ مشخص می‌شود. به ترتیب شاخصهای پایین بردار خوب توجه کنید: شاخص اول نقطه‌ای را که محل آن مورد نظر است مشخص می‌کند (در این مورد، مبدأ دستگاه مختصات S') و شاخص دوم دستگاهی را که محل نقطه نسبت به آن مورد نظر است (در این مورد، دستگاه مختصات S).

در شکل ۱۶ یک ذره (P) هم در صفحهٔ مشترک xy و $x'y'$ نشان داده شده است. S و S'، هر یک، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان تعیین می‌کنند. ذرهٔ P، از دید S در نقطهٔ متناظر با بردار $\mathbf{r}_{PS}$، و از دید S' در نقطهٔ متناظر با بردار $\mathbf{r}_{PS'}$ است. از شکل ۱۶ می‌بینیم که رابطهٔ میان این سه بردار به‌صورت زیر است

$$\mathbf{r}_{PS}=\mathbf{r}_{S'S}+\mathbf{r}_{PS'}=\mathbf{r}_{PS'}+\mathbf{r}_{S'S} \qquad (۴۲)$$

در رابطهٔ بالا، برای عوض کردن ترتیب بردارها، از قانون جابه‌جایی‌پذیری جمع برداری استفاده کرده‌ایم و باز هم به‌ترتیبِ شاخصها دقت کنید. رابطهٔ ۴۲، به زبان غیر ریاضی، می‌گوید که: "مکان P از دید S برابر است با مکان P از دید S' به اضافهٔ مکان S' از دید S."

فرض کنید ذرهٔ P با سرعت $\mathbf{v}_{PS'}$ نسبت به S' حرکت می‌کند. S چه سرعتی برای این ذره اندازه‌گیری می‌کند؟ برای پاسخ به این سؤال کافی است که از معادلهٔ ۴۲ نسبت به زمان مشتق بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}$$

آهنگ تغییر هر بردار مکان، سرعت متناظر با آن برداراست. پس،

$$\mathbf{v}_{PS}=\mathbf{v}_{PS'}+\mathbf{v}_{S'S} \qquad (۴۳)$$

بنابراین، سرعت P نسبت به S در هر لحظه برابر است با سرعت P نسبت به S' به اضافهٔ سرعت S' نسبت به S. معادلات ۴۲ و ۴۳، که برای حرکت دوبعدی به‌دست آورده‌ایم، برای حرکت سه‌بعدی هم کاملاً معتبرند.

معادلهٔ ۴۳ یک قانون تبدیل سرعت است. به کمک این قانون می‌توانیم سرعتی را که ناظر یک چارچوب مرجع، مثلاً S'، می‌سنجد، به سرعتی که ناظر دیگری، ، مثلاً S می‌سنجد تبدیل کنیم. کافی است که سرعت نسبی در چارچوب مرجع را بدانیم. این قانون تبدیل سرعت با مشاهدات روزمره و مفاهیم بنیادی فضا و زمان در فیزیک کلاسیکِ گالیله و نیوتون، به‌خوبی سازگار است. در واقع، معادلهٔ ۴۳ را اغلب شکل گالیله‌ای قانون تبدیل سرعتها می‌نامند.

در اینجا تنها حالت خاص بسیار مهمی را بررسی می‌کنیم که سرعت دو چارچوب مرجع نسبت به هم ثابت است؛ یعنی هم‌جهت و هم‌اندازهٔ $\mathbf{v}_{S'S}$ ثابت است. $\mathbf{v}_{PS}$ و $\mathbf{v}_{PS'}$، یعنی سرعتهای ذره از S و S'، می‌توانند ثابت نباشند، و البته در حالت کلی با هم برابر نیستند. اما اگر یکی از ناظرها، مثلاً S'، سرعت P را ثابت ببیند، هر دو جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۴۳ مستقل از زمان می‌شود، و به این ترتیب طرف چپ این معادله هم باید مستقل از زمان باشد. بنابراین، اگر ناظری سرعت ذره‌ای را ثابت ببیند، همهٔ ناظرهای دیگری هم که نسبت به این ناظر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، سرعت آن ذره را ثابت خواهند دید.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۴۳ نتیجهٔ مهم‌تری به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt}=\frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt}+\frac{d\mathbf{v}_{S'S}}{dt} \qquad (۴۴)$$

جملهٔ آخر معادلهٔ ۴۴ صفر است، چون فرض کرده‌ایم که سرعت نسبی دو چارچوب مرجع ثابت است. پس

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt}$$

اگر در دو طرف این معادله، به‌جای مشتق سرعت، شتاب متناظر با آن‌را قرار بدهیم می‌بینیم که

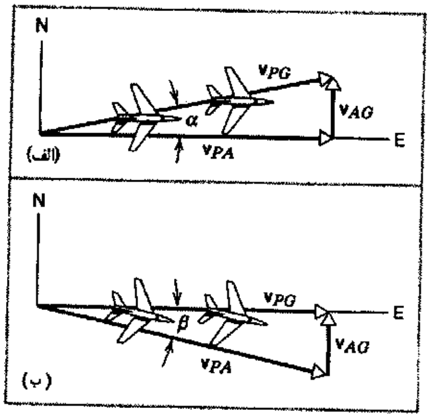
$$\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PS'} \qquad (۴۵)$$

یعنی، شتاب P از دید دو ناظر یکی است!

در فصل بعدی خواهیم دید که شتاب کمیتی بنیادی در رفتار دینامیکی اجسام است: قانون دوم نیوتون $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، نیروی $\mathbf{F}$، جرم m، و شتاب $\mathbf{a}$ را به هم مربوط می‌کند. معادلهٔ ۴۵ در شرایط خاصی که چارچوبهای مرجع S و S' نسبت به هم با سرعت ثابت (هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه) درحرکت باشند به‌دست آمد. چنین چارچوبهایی را، که ممکن است نسبت به هم در حرکت باشند اما ناظرهای آنها برای یک جسم معین، شتاب یکسانی مشاهده می‌کنند، چارچوب مرجع لَخت می‌نامند. در فصل بعد خواهیم دید که این چارچوبها، به ویژه از این نظر مهم‌اند که قوانین نیوتون تنها در آنها برقرار است.

در اینجا مثالی از یک قانون فیزیکی می‌آوریم که می‌شود آن‌را برای تعیین لخت بودن یا نبودن چارچوبهای مرجع به‌کار برد. جرمی را به یک سر نخی ببندید و سر دیگر نخ را در دست بگیرید تا جرم آویزان شود. جاذبهٔ گرانشی زمین بر جرم، آن‌را به طرف مرکز زمین می‌کشد؛ راستای نخ را می‌شود برای تعریف محور قائم به‌کار برد. اکنون همین آزمایش را در اتومبیلی که با سرعت ثابت 55mi/h بر خط مستقیم حرکت می‌کند تکرار کنید. نتیجه عوض نمی‌شود: نخ در همان راستای قائم آویزان می‌ماند. این اتومبیل هم، مثل زمین، یک چارچوب مرجع لَخت است. اگر این آزمایش را در اتومبیلی که در حال سرعت‌گرفتن، ترمزکردن، یا دور زدن باشد انجام بدهید، نخ از راستای قائم منحرف می‌شود. چارچوبهای شتابدار (حتی اگر شتابشان شتابِ مرکزگرا باشد) چارچوب نالخت‌اند.

در واقع زمین هم فقط به‌طور تقریبی یک چارچوب لخت است. به خاطر چرخش زمین به دور محورخودش، دو ناظر درعرضهای جغرافیایی متفاوت، نسبت به هم یک سرعت مماسی دارند که جهت آن با چرخش زمین تغییر می‌کند. البته این اثر کوچک و در بسیاری از موارد قابل چشمپوشی است؛ اما درکارهای بسیاردقیق باید آن‌را در نظر گرفت. ضمناً در مقیاس بزرگ، این پدیده می‌تواند آثار چشمگیری داشته باشد. مثلاً نالخت بودن چارچوب مرجع سطح زمین باعث چرخش باد حول مراکز پر فشار یا کم فشار می‌شود. این چرخش می‌تواند توفانهایی شدید و مخرب به‌بار بیاورد. در بخش ۶ـ۸، آثار دیگری را که در چارچوبهای نالخت مشاهده می‌شود بررسی خواهیم کرد.



شکل۱۷. (الف) هواپیمایی که جهت‌گیری آن به طرف شرق است و بادی به طرف شمال به آن می‌وزد. (ب) برای حرکت به طرف شرق، هواپیما باید قدری به درون باد جهت‌گیری کند.

مثال ۷. قطب‌نمای هواپیمایی نشان می‌دهد که سر هواپیما به طرف شرق است؛ سرعت‌سنج، آن که سرعت را نسبت به هوا می‌سنجد، مقدار ۲۱۵km/h را نشان می‌دهد. باد ثابتی با سرعت ۶۵km/h به‌طرف شمال می‌وزد. (الف) اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به‌زمین چقدر است؟ (ب) اگر خلبان بخواهد به‌طرف شرق برود، هواپیما را باید در چه جهتی هدایت کند، یعنی قطب‌نما چه جهتی را باید نشان بدهد؟

حل: (الف) در این مسئله، "ذره" متحرک، هواپیمای P است. دو چارچوب مرجع داریم، زمین (G) و هوا (A). زمین را دستگاه S و هوا را دستگاه S' می‌گیریم. معادلهٔ ۴۳ را، با تغییر ساده‌ای در نمادگذاری، چنین می‌نویسیم

$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}$$

شکل ۱۷الف این بردارها را نشان می‌دهد، که یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند. جمله‌های این رابطه، به‌ترتیب عبارت‌اند از سرعت هواپیما نسبت به زمین، سرعت هواپیما نسبت به هوا، و سرعت هوا نسبت به زمین (یعنی سرعت باد). توجه کنید که جهت‌گیری هواپیما به‌طرف شرق است، همان چیزی که قطب‌نما نشان می‌دهد.

اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^۲ + v_{AG}^۲} = \sqrt{(۲۱۵\text{km/h})^۲ + (۶۵\text{km/h})^۲} = ۲۲۵\text{km/h}$$

زاویهٔ α، از شکل ۱۷الف، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-۱}\frac{۶۵\text{km/h}}{۲۱۵\text{km/h}} = ۱۶{,}۸^\circ$$

بنابراین، هواپیما نسبت به زمین با سرعت ۲۲۵km/h در جهت $۱۶{,}۸^\circ$ شمالی نسبت به شرق پرواز می‌کند. توجه کنید که سرعت هواپیما نسبت به زمین، از سرعت آن نسبت به باد بیشتر است.

(ب) به این منظور، هواپیما باید طوری در مقابل باد جهت‌گیری کند که سرعت هواپیما نسبت به زمین به طرف شرق باشد. سرعت باد همان است که بود، و نمودار برداری معادلهٔ ۴۳ به‌صورت شکل ۱۷ب است. توجه کنید که در این مورد هم این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند، با این تفاوت (نسبت به شکل ۱۷الف) که این بار وتر مثلث v_{PA} است نه v_{PG}.

در این مورد، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^{۲} - v_{AG}^{۲}} = \sqrt{(۲۱۵\text{km/h})^{۲} - (۶۵\text{km/h})^{۲}} = ۲۰۵\text{km/h}$$

چنانکه جهت‌گیری هواپیما در شکل ۱۷ب نشان می‌دهد، هواپیما باید به اندازهٔ زاویهٔ β به درون باد هدایت شود. این زاویه برابر است با

$$\beta = \sin^{-۱}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-۱}\frac{۶۵\text{km/h}}{۲۱۵\text{km/h}} = ۱۷٫۶^\circ$$

همان‌طور که می‌بینید، در این حالت سرعت هواپیما نسبت به زمین کمتر از سرعت آن نسبت به هواست.

حرکت نسبی در سرعتهای زیاد (اختیاری)

مطالبی که در مورد حرکت نسبی گفته شد، مبنای مکانیک نیوتونی است، که بررسی آن‌را از فصل ۵ شروع خواهیم کرد. در اینجا هیچ محدودیتی روی سرعت نسبی چارچوبهای مرجع، یا روی سرعت ذراتی که بررسی می‌شوند وجود ندارد (تنها کافی است که سرعت نسبی چارچوبهای مرجع ثابت باشد). دو قرن پس از نیوتون، آلبرت اینشتین سعی کرد نتیجهٔ کاربرد معادلهٔ ۴۳ را برای پرتو نوری که با سرعت $c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸\text{m/s}$ در خلأ حرکت می‌کند، مجسم کند. فرض کنید ناظر S' پرتو نوری را مشاهده می‌کند که با سرعت c در جهت مثبت x' در حرکت است. باز فرض کنید خودِ S' هم نسبت به S با سرعت $v_{S'S} = ۱\text{m/s}$ در همان جهت x' حرکت می‌کند. ناظر S چه سرعتی برای پرتو نور می‌سنجد؟ مکانیک نیوتونی طبق معادلهٔ ۴۳ جواب می‌دهد:

$$v_{PS} = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸\text{m/s} + ۱\text{m/s} = ۲۹۹۷۹۲۴۵۹\text{m/s}$$

اینشتین البته کتابهای درسی‌اش را خوانده بود و می‌دانست که مکانیک نیوتونی دربارهٔ مشاهدهٔ سرعت توسط ناظرهای متحرک نسبت به یکدیگر، چه می‌گوید؛ این را هم می‌دانست که نور یک شیئ متحرک عادی نیست. پرتوهای نور به شکل خاصی حرکت می‌کنند. نور تابش الکترومغناطیسی است، و می‌شود آن‌را برحسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی سازنده‌اش تحلیل کرد. میدان الکتریکی متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کنند، و میدان مغناطیسی متحرک میدان الکتریکی تولید می‌کنند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متحرک نور، عملاً طی حرکت پرتو نور خودشان را باز تولید می‌کنند. اینشتین استدلال کرد که اگر معادلهٔ ۴۳ درست باشد، ناظر S می‌تواند پرتو نوری با سرعت c در جهت x بفرستد، و ناظر S' می‌تواند با $v_{S'S} = c$ در جهت x نسبت به S حرکت کند و پرتو نور را بگیرد. درست مثل اتومبیلی که با همان سرعت اتومبیل شما، کنار اتومبیلتان حرکت کند. در این صورت، پرتو نور، از دید ناظر S'، ساکن به‌نظر می‌رسد. این، از نظر اینشتین، تناقض شدیدی بود؛ چطور ممکن است پرتو نوری را، که اصولاً میدان الکترومغناطیسی متحرک است، "ساکن" ببینیم؟

اینشتین برای حل این مشکل راهی پیشنهاد کرد که به نظر خودش بدیهی بود: هیچ پرتو نوری را نمی‌توان "ساکن" دید. پس حتماً باید نتیجه گرفت که معادلهٔ ۴۳، برای سرعتهای نزدیک به c، غلط است. اینشتین یک گام از این هم جلوتر رفت: اظهار کرد که هر دو ناظر S و S' باید دقیقاً یک مقدار برای سرعت نور به‌دست بیاورند، سرعت نسبی‌شان هر چه می‌خواهد باشد! این حکم با عقل متعارف و با پیش‌بینی معادلهٔ ۴۳، مغایر به‌نظر می‌رسد؛ اگر دو ناظر با سرعت $۰٫۹۹۹۹۹۹۹c$ نسبت به هم حرکت کنند، چطور ممکن است که نتیجهٔ اندازه‌گیری هر دویشان از سرعت پرتو نوری که یکی از آنها گسیل کرده است یکسان و برابر با c باشد؟

توصیف ریاضی کامل این مسئله را به فصل ۲۱ موکول می‌کنیم؛ اینجا فقط مختصری در مورد حالت خاصی که همهٔ سرعتها در راستای x (یا x') باشند صحبت می‌کنیم. در این حالت، نتیجهٔ اینشتین برای تبدیل سرعتها چنین است:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{۱ + v_{PS'}v_{S'S}/c^{۲}} \qquad (۴۶)$$

ببینید که چه نتیجهٔ زیبایی است. اگر $v_{PS'}$ و $v_{S'S}$ (نسبت به c) کوچک باشند، مخرج معادلهٔ ۴۶ خیلی نزدیک به ۱ می‌شود، و معادلهٔ ۴۶ به معادلهٔ ۴۳ تبدیل می‌شود. در سرعتهای کم، تبدیل گالیله‌ای سرعت جواب قابل قبولی می‌دهد. اگر $v_{PS'} = c$ باشد (S' پرتو نور را مشاهده می‌کند)، از معادلهٔ ۴۶ نتیجه می‌شود که $v_{PS} = c$، و فرقی هم نمی‌کند که مقدار $v_{S'S}$ چه باشد. همهٔ ناظرها سرعت نور را یکسان می‌سنجند؛ یعنی مقداری که می‌سنجند به سرعت نسبی‌شان بستگی ندارد.

فرض اینشتین، و سینماتیک و مکانیکی که به دنبال آن می‌آید، لازم نمی‌دارد که فیزیک نیوتونی را کنار بگذاریم؛ تنها می‌گوید که محاسبات نیوتونی را به سرعتهای بسیار کوچک، در مقایسه با c، محدود کنیم. برای اجسام متحرکی که معمولاً با آنها سروکار داریم، این محدودیت به‌خوبی برقرار است. حتی سرعت سریعترین موشکهایی که بشر ساخته است ($v = ۱۰^{۴}\text{m/s}$)، آنقدر کمتر از سرعت نور $۳ \times ۱۰^{۸}\text{m/s}$ است، که فرمول گالیله را با اطمینان به‌کار ببریم، بی‌آنکه مرتکب خطای قابل‌توجهی شده باشیم. اما ذراتی مثل الکترون یا پروتون را می‌شود به‌راحتی تا سرعتهای خیلی نزدیک به c شتاب داد. دراین سرعتهای زیاد باید از یک فیزیک جدید، با معادلات جدید سینماتیکی

و دینامیکی، استفاده کرد. این فیزیک جدید، اساس نظریهٔ نسبیت خاص است، که آن را به تفصیل بیشتر در فصل ۲۱ مطالعه خواهیم کرد.

پرسشها

۱. آیا ممکن است جهت شتاب جسمی تغییر کند، بی‌آنکه جهت سرعت آن تغییر کند؟

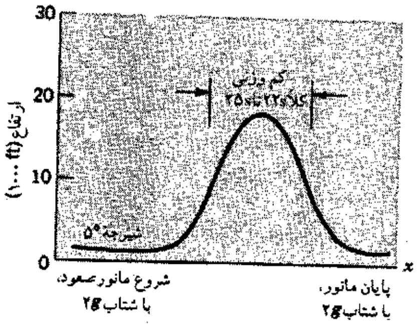
۲. اگر v و a به‌ترتیب نمایندهٔ سرعت و شتاب اتومبیلی باشد، وضعیت حرکت درهر یک از این حالتها چگونه است؟ (الف) v و a موازی و هم‌جهت‌اند؛ (ب) v و a موازی و در جهتهای مخالف‌اند؛ (ج) v و a برهم عمودند؛ (د) v صفر و a مخالف صفر است؛ (ه) a صفر و v مخالف صفر است.

۳. آیا در پرش طول، ارتفاعی هم که ورزشکار به آن می‌رسد اهمیت دارد؟ چه عواملی برد پرش را تعیین می‌کنند؟

۴. الکترونهای باریکه‌ای را که از تفنگ الکترونی خارج می‌شود، و نیز مولکولهای جریان آبی را که از لوله بیرون می‌زند در نظر بگیرید. چرا، در اثر گرانش، الکترون به‌اندازهٔ مولکول آب سقوط نمی‌کند؟ فرض کنید که حرکت اولیه ذرات، در هر دو مورد، افقی است.

۵. سرعت پرتابه در کدام نقطه یا نقاطِ مسیر کمینه است؟ در کجا بیشینه است؟

۶. شکل ۱۸ مسیر پرواز یکی از هواپیماهای جت ناسا را نشان می‌دهد. هدف از این پرواز، شبیه‌سازی شرایط کم‌وزنی برای مدتی کوتاه است. استدلال کنید که اگر مسیر هواپیما، سهمی خاصی باشد، مسافران آن احساس بی‌وزنی خواهند کرد.

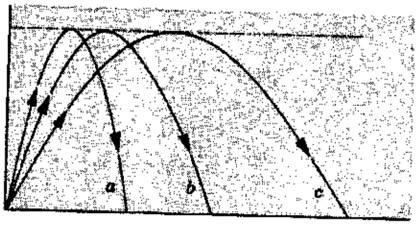


شکل ۱۸. پرسش ۶

۷. پرتابه‌ای از نقطه‌ای بالاتر از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویهٔ پرتاب متناظر با بیشترین برد کمتر از ۴۵° است. آیا می‌توانید این مشاهده را توضیح بدهید؟

۸. پرتابه‌ای را در اوج مسیرش در نظر بگیرید. در این نقطه (الف) سرعت پرتابه، برحسب v_0 و ϕ_0، چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر و درکدام جهت است؟ (ج) جهت شتاب پرتابه چه ارتباطی با جهت سرعت آن دارد؟

۹. شکل ۱۹، مسیر سه توپ فوتبال را نشان می‌دهد. (الف) کوتاهترین مدت پرواز، (ب) بزرگترین مؤلفهٔ قائم سرعت در زمان شروع حرکت، (ج) بزرگترین مؤلفهٔ افقی سرعت در زمان شروع حرکت، و (د) کمترین سرعت در زمان شروع حرکت، مربوط به کدام‌یک از این مسیرهاست؛ (مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.)



شکل ۱۹. پرسش ۹

۱۰. تفنگی، وقتی به‌طرف هدفی هم تراز با خودش نشانه برود، به هدف می‌زند. نشان بدهید که اگر این تفنگ به طرف هدفهای بالاتر یا پایین‌تر از خودش نشانه‌روی شود، به شرط آنکه فاصلهٔ هدف عوض نشود، همیشه "بالا می‌زند".[۱]

۱۱. پیتر برانکازیو درکتاب "دانشِ ورزش" در مورد پرتابه‌هایی مثل گوی بیسبال یا گوی گلف می‌نویسد: "با فرض اینکه بقیهٔ شرایط یکسان باشد، برد پرتابه‌ها در روزهای گرم بیشتر است تا در روزهای سرد، در سطوح مرتفع بیشتر است تا در سطح دریا، و در هوای مرطوب بیشتر است تا در هوای خشک". آیا می‌توانید درستی این گفته‌ها را توضیح بدهید؟

۱۲. نمودار ارتفاع-زمان پرتابه‌ای که در راستای قائم به بالا پرتاب شود، سهمی است. مسیر پرتابه‌ای هم که به‌طور مایل به بالا پرتاب شود سهمی است. آیا این شباهت تصادفی است؟ جواب خودتان را توجیه کنید.

۱۳. توپهای بلندبرد را در زاویهٔ " برد بیشینهٔ" ۴۵° تنظیم نمی‌کنند، بلکه در زاویه‌های بزرگتر، درگسترهٔ ۵۵° تا ۶۵°، تنظیم می‌کنند. زاویهٔ ۴۵° چه اشکالی دارد؟

۱۴. آیا در حرکت پرتابه، اگر مقاومت هوا قابل چشمپوشی باشد، هیچ وقت لازم می‌شود که حرکت را، به‌جای دوبعدی، سه‌بعدی درنظر بگیریم؟

۱۵. آیا ممکن است که اندازهٔ سرعت ثابت باشد ولی حرکت شتابدار باشد؟ آیا می‌شود با شتاب صفر روی یک مسیر منحنی حرکت کرد؟ با شتابِ ثابت چطور؟

۱۶. مهره‌ای را در نظر بگیرید که در امتدادِ سیم بدون اصطکاکی به شکل مارپیچ با سرعت ثابت می‌لغزد و حلقه‌هایی را که به تدریج کوچکتر می‌شوند طی می‌کند. شتاب این مهره را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۱۷. نشان بدهید که اگر هم چرخش و هم گردش زمین را به‌حساب

---

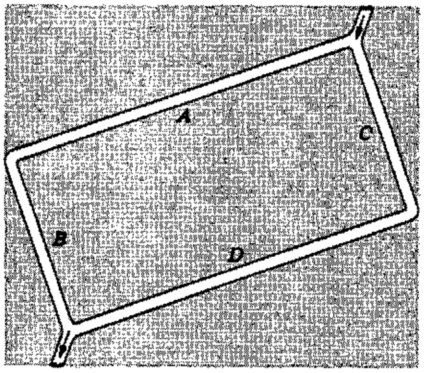
۱. در این باره می‌توانید رجوع کنید به
"A Puzzle in Elementary Ballistics," Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, p. 246.

بیاوریم، کتابی که روی میزتان است، شبها تندتر از روزها حرکت می‌کند. این گفته در کدام چارچوب مرجع درست است؟

۱۸. هوانوردی در پایان یک شیرجه، روی قوسی از دایره حرکت می‌کند. گفته می‌شود که هوانورد، با شتاب $3g$ از حالت شیرجه خارج شده است. معنی این عبارت را توضیح دهید.

۱۹. آیا می‌شود شتاب یک پرتابه را برحسب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی آن در هر نقطه از مسیر حرکت نشان داد؟ اگر چنین است، آیا این نمایش مزیتی هم دارد؟

۲۰. لوله‌ای به شکل مستطیلی با گوشه‌های گرد در صفحهٔ قائم قرار دارد (شکل ۲۰). دو بلبرینگ را درگوشهٔ بالای سمت راست، یکی را در مسیر AB و دیگری را در مسیر CD رها می‌کنیم. کدام‌یک زودتر به گوشهٔ پایینِ سمت چپ می‌رسد؟



شکل ۲۰. پرسش ۲۰

۲۱. آیا اگر شتاب جسمی در یک چارچوب مرجع خاص ثابت باشد، در چارچوبهای مرجع دیگر هم الزاماً ثابت است؟

۲۲. کودکی در قطاری که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. این کودک توپی را مستقیماً به بالا پرتاب می‌کند. آیا توپ پشت سرش می‌افتد، جلویش می‌افتد، یا توی دستهایش؟ اگر در مدتی که توپ در هواست، قطار به طرف جلو شتاب بگیرد، یا روی ریل منحنی حرکت کند، توپ در برگشت چه وضعیتی خواهد داشت؟

۲۳. شخصی روی سکوی عقبی قطاری که سرعت ثابت دارد ایستاده است. این شخص در حالی‌که روی ریل خم شده است، سکه‌ای را رها می‌کند. مسیر حرکت سکه را از دید این ناظرها بررسی کنید: (الف) خودِ شخص، (ب) شخصی که نزدیک ریل ایستاده است، و (ج) شخصی که در قطار دیگری است که روی ریلی موازی با ریل قطار اول، و در جهت مخالف این قطار حرکت می‌کند.

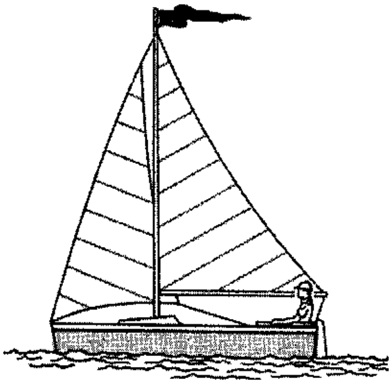
۲۴. آسانسوری با سرعت ثابت پایین می‌آید. شخصی در این آسانسور، سکه‌ای را رها می‌کند. شتاب سکهٔ افتان (الف) از دید این شخص و (ب) از دید شخصی که نسبت به چاه آسانسور ساکن است چقدر است؟

۲۵. سطلی زیر باران است. باران به‌طور یکنواخت می‌بارد و در سطل جمع می‌شود. آیا اگر باد افقی ثابتی بوزد، آهنگ جمع شدن آب در سطل تغییر می‌کند؟

۲۶. شیشهٔ جلوی اتوبوسی در صفحهٔ قائم است. این اتوبوس زیر باران شدید با سرعت v_b حرکت می‌کند قطرات باران با سرعت حد v_r در راستای قائم سقوط می‌کنند. این قطره‌ها با چه زاویه‌ای به شیشهٔ جلو می‌خورند؟

۲۷. فرض کنید بارانی با قطره‌های منظم و عمود بر زمین می‌بارد و شما می‌خواهید در زیر این باران مسافت معینی را طوری طی کنید که حتی‌الامکان کمتر خیس بشوید (یعنی قطره‌های کمتری به شما اصابت کند). آیا باید خیلی تند بدوید؟ خیلی آهسته راه بروید؟ یا یک سرعت میانی مناسب انتخاب کنید؟[1]

۲۸. شکل ۲۱ چه ایرادی دارد؟ قایق دارد با نیروی باد حرکت می‌کند.



شکل ۲۱. پرسش ۲۸

۲۹. تبدیل گالیله‌ای سرعت (معادلهٔ ۴۳) از تجربیات روزمره چنان به ذهن ما آشناست که گاهی ادعا می‌شود که "صحت آن بدیهی است و نیاز به اثبات ندارد." بسیاری از (به‌اصطلاح) ابطالهای نظریهٔ نسبیت هم در واقع مبتنی بر همین ادعاست. چگونه می‌شود این ادعا را رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۴ـ۱ مکان، سرعت، و شتاب

۱. هواپیمایی از شهر A، $410\,\mathrm{mi}$ به‌طرف شرق پرواز می‌کند و در مدت $45\,\mathrm{min}$ به شهر B می‌رسد. سپس $820\,\mathrm{mi}$ به طرف جنوب پرواز می‌کند و در مدت $1\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}$ به شهر C می‌رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی مربوط به کل مسیر را به‌دست بیاورید.

---

۱. نگاه کنید به
"An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", S. A. Stern, *American Journal of Physics*, September 1983, p. 815.

(ب) بردار سرعت متوسط و (ج) متوسط اندازهٔ سرعت را پیدا کنید.

۲. مکان ذره‌ای در صفحهٔ xy با رابطهٔ $\mathbf{r} = (۲t^۳ - ۵t)\mathbf{i} + (۶ - ۷t^۴)\mathbf{j}$ بیان می‌شود، که در آن r برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) $\mathbf{r}$، (ب) $\mathbf{v}$، و (ج) $\mathbf{a}$ را در $t = ۲\mathrm{s}$ حساب کنید.

۳. بالونی در مدت ۳h۲۴min، از نقطهٔ رهاشدنش در سطح زمین، ۸٫۷km به شمال، ۹٫۷km به‌شرق، و ۲٫۹km به طرف بالا می‌رود. (الف) اندازهٔ سرعت متوسط بالون و (ب) زاویهٔ بردار سرعت متوسط با سطح افقی را پیدا کنید.

۴. سرعت ذره‌ای درصفحهٔ xy از رابطهٔ $\mathbf{v} = (۶t - ۴t^۲)\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}$ به‌دست می‌آید، که در آن v برحسب متر بر ثانیه و $t(> ۰)$ برحسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره را در $t = ۳\mathrm{s}$ پیدا کنید. (ب) شتاب در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (ج) سرعت در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (د) سرعت در چه زمانی ۱۰m/s می‌شود (اگر اصولاً چنین زمانی در کار باشد)؟

بخش ۴ـ۲ حرکت با شتاب ثابت

۵. در یک لامپ پرتو کاتدی، باریکه‌ای از الکترونها با سرعت $۹٫۶ \times ۱۰^۸\mathrm{cm/s}$ به‌طور افقی وارد ناحیه‌ای به‌طول ۲٫۳cm میان دو صفحهٔ افقی می‌شود. بین این دو صفحه یک میدان الکتریکی وجود دارد که به الکترونها شتاب رو به پایین $۹٫۴ \times ۱۰^{۱۶}\mathrm{cm/s^۲}$ می‌دهد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا الکترونها از ناحیهٔ میان صفحات بگذرند؟ (ب) جابه‌جایی عمودی باریکه طی این مدت چقدر است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت باریکه، هنگام خروج از این ناحیه چقدر است؟

۶. یک قایق بادبانی یخ‌نوردی، با شتاب ثابت حاصل از باد، روی سطح دریاچهٔ یخزده‌ای حرکت می‌کند. سرعت آن در زمان معینی $۶٫۳۰\mathbf{i} - ۸٫۴۲\mathbf{j}$ (برحسب m/s) است. سه ثانیه بعد، قایق به‌حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. شتاب قایق در این مدت چه بوده است؟

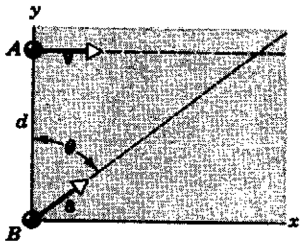
۷. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که مکان آن برحسب زمان به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + ۴t^۲\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

(الف) سرعت و (ب) شتاب آن‌را برحسب زمان بنویسید. (ج) مسیر ذره به چه شکلی است؟

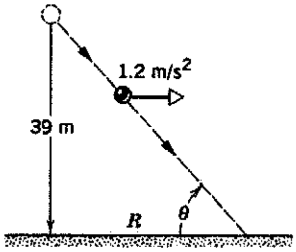
۸. ذره‌ای در $t = ۰$، با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_۰ = ۳٫۶\mathbf{i}$، برحسب m/s، از مبدأ حرکت می‌کند. شتاب این ذره ثابت و برابر با $\mathbf{a} = -۱٫۲\mathbf{i} - ۱٫۴\mathbf{j}$، برحسب m/s² است. (الف) ذره در چه زمانی به بیشترین مختصهٔ x خود می‌رسد؟ (ب) سرعت ذره در این زمان چقدر است؟ (ج) در این زمان، ذره کجاست؟

۹. ذرهٔ A در راستای خط $y = d(۳۰\mathrm{m})$، با سرعت ثابت $\mathbf{v}(v = ۳٫۰\mathrm{m/s})$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند (شکل ۲۲). ذرهٔ B، هنگامی که A از محور y می‌گذرد، با سرعت صفر و شتاب ثابت $\mathbf{a}(a = ۰٫۴۰\mathrm{m/s^۲})$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. زاویهٔ θ بین $\mathbf{a}$ و جهتِ مثبت محور y چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

۱۰. توپی از ارتفاع ۳۹٫۰m رها می‌شود. باد، افقی می‌وزد و به توپ شتاب ۱٫۲۰m/s² می‌دهد. (الف) نشان بدهید که توپ روی یک خط راست حرکت می‌کند و مقادیر R و θ در شکل ۲۳ را پیدا کنید. (ب) چه مدتی طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) توپ با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟



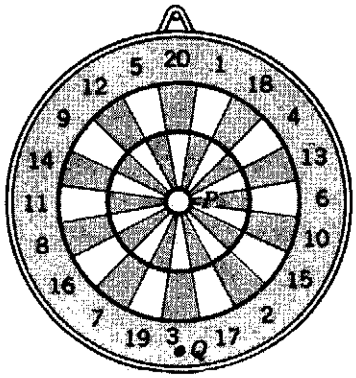
شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۰

بخش ۴ـ۳ حرکت پرتابی

۱۱. توپی روی میزی افقی به ارتفاع ۴٫۲۳ft می‌غلتد و از آن به زمین می‌افتد. نقطهٔ برخورد توپ به زمین در فاصلهٔ افقی ۵٫۱۱ft از لبهٔ میز است. (الف) توپ چه مدتی در هوا بوده است؟ (ب) سرعت آن هنگام افتادن از میز چقدر بوده است؟

۱۲. الکترون هم، مثل همهٔ انواع دیگر ماده، تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند. الکترونی با سرعت $۳٫۰ \times ۱۰^۷\mathrm{m/s}$ (یک دهم سرعت نور) به‌طور افقی پرتاب می‌شود. این الکترون، طی مسافت افقی ۱m، چقدر سقوط می‌کند؟

۱۳. پیکانی با سرعت اولیهٔ ۱۰m/s به طرف مرکز تختهٔ هدف، نقطهٔ P پرتاب می‌شود و ۰٫۱۹s بعد در نقطهٔ Q که در امتداد قائم زیر P است فرو می‌رود؛ شکل ۲۴. (الف) فاصلهٔ PQ چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ پرتاب‌کننده از هدف چقدر بوده است؟



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. تفنگی به‌طور افقی به طرف هدفی به فاصلهٔ $۱۳۰\,\mathrm{ft}$ نشانه رفته است. گلوله $۰٫۷۵\,\mathrm{in}$ زیر هدف می‌خورد. (الف) زمان پرواز گلوله چقدر بوده است؟ (ب) سرعت خروج گلوله چقدر بوده است؟

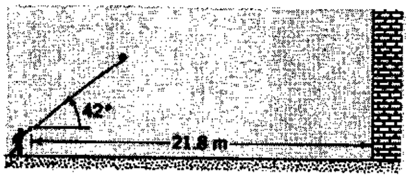
۱۵. گلوله‌ای با سرعت $۲۵۰\,\mathrm{m/s}$ در راستای افق از تفنگی در ارتفاع $۴۵٫۰\,\mathrm{m}$ از سطح زمین شلیک می‌شود. (الف) گلوله چه مدتی در هوا می‌ماند؟ (ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد گلوله به زمین از نقطهٔ شلیک چقدر است؟ (ج) مؤلفهٔ قائم سرعت گلوله، هنگام برخورد با زمین، چقدر است؟

۱۶. یک بازیکن بیسبال، توپ را با سرعت $۹۲٫۰\,\mathrm{mi/h}$ به‌طور افقی پرتاب می‌کند. فاصلهٔ پرتاب‌کننده تا بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، $۶۰٫۰\,\mathrm{ft}$ است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ $۳۰٫۰\,\mathrm{ft}$ افقی اول مسیر را بپیماید؟ چقدر طول می‌کشد تا $۳۰٫۰\,\mathrm{ft}$ دوم را بپیماید؟ (ب) در طی $۳۰٫۰\,\mathrm{ft}$ افقی اول، توپ تحت تأثیر گرانش چقدر سقوط می‌کند؟ (ج) در $۳۰٫۰\,\mathrm{ft}$ دوم چقدر؟ (د) چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟ مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.

۱۷. در یک داستان پلیسی، جسدی به فاصلهٔ $۱۵\,\mathrm{ft}$ از دیوار ساختمانی، و زیر پنجره‌ای باز به ارتفاع $۸۰\,\mathrm{ft}$ پیدا می‌شود. حدس می‌زنند که مرگ تصادفی بوده است یا خیر؟ چرا؟

۱۸. گلوله‌ای را با سرعت اولیهٔ $۱۵\,\mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ ۲۰° زیر سطح افق، از بالای صخره‌ای پرتاب می‌کنیم. (الف) جابه‌جایی افقی و (ب) جابه‌جایی عمودی گلوله $۲٫۳\,\mathrm{s}$ بعد از پرتاب چقدر است؟

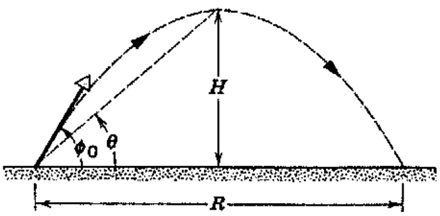
۱۹. توپ کوچکی را با سرعت $۲۵٫۳\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ $۴۲٫۰^\circ$ بالاتر از سطح افق، مستقیماً به‌طرف دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۲۵). دیوار $۲۱٫۸\,\mathrm{m}$ از نقطهٔ پرتاب توپ فاصله دارد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟ (ب) توپ چقدر بالاتر از نقطهٔ پرتاب به دیوار می‌خورد؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظهٔ برخورد به دیوار چقدر است؟ (د) آیا توپ، پس از گذشتن از نقطهٔ اوج مسیرش به دیوار می‌خورد؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. نشان بدهید که ارتفاع نقطهٔ اوج پرتابه، $y_{\max} = (v_0 \sin \phi_0)^2/2g$ است.

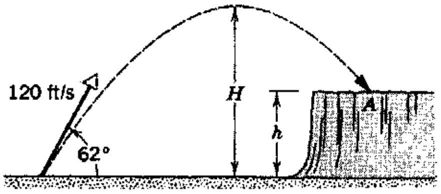
۲۱. (الف) پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. نشان بدهید که نسبت ارتفاع نقطهٔ اوج H به برد R برابر است با $H/R = 1/4\tan\phi_0$. (ب) زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟ (شکل ۲۶).



شکل ۲۶. مسئله‌های ۲۱ و ۲۲

۲۲. پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. (الف) نشان بدهید که رابطهٔ زاویهٔ فرازِ نقطهٔ اوج نسبت به نقطهٔ پرتاب (θ در شکل ۲۶)، با ϕ_0 چنین به صورت $\tan \theta = 1/2\tan \phi_0$ است. (ب) θ را به‌ازای $\phi_0 = 45^\circ$ حساب کنید.

۲۳. سنگی را از سطح زمین با سرعت اولیهٔ $۱۲۰\,\mathrm{ft/s}$ در جهت ۶۲° بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌کنند (شکل ۲۷). این سنگ $۵٫۵\,\mathrm{s}$ پس از پرتاب در نقطهٔ A به‌زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخرهٔ (h)، (ب) سرعت سنگ درست پیش از برخورد در نقطهٔ A، و (ج) ارتفاع اوج سنگ نسبت به زمین (H) را پیدا کنید.

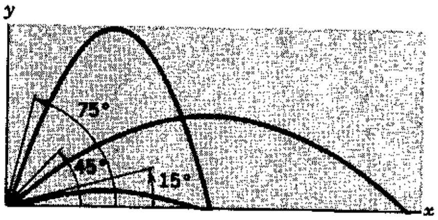


شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در المپیک ۱۹۶۸ مکزیکوسیتی، باب بیمون رکورد ۸٫۹۰m را برای پرش طول به‌جا گذاشت. فرض کنید سرعت اولیهٔ او درلحظهٔ آغاز پرش ۹٫۵۰m/s (تقریباً برابر با سرعت دونده‌های سرعت) بوده باشد، اختلاف این رکورد با رکوردی که در همین شرایط و در غیاب مقاومت هوا به‌دست می‌آمد چقدر است؟ مقدار g در مکزیکوسیتی ۹٫۷۸m/s^2 است.

۲۵. در مثال ۳، (الف) اندازهٔ سرعت بسته در موقع برخورد با هدف و (ب) زاویهٔ برخورد نسبت به راستای قائم چقدر است؟ (ج) چرا زاویهٔ برخورد با زاویهٔ دیدِ هدف از نقطهٔ پرتاب برابر نیست؟

۲۶. (الف) گالیله درکتاب دو علم جدید می‌نویسد که "برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از ۴۵° بیشتر یا کمتر باشند، برد یکسان است" این گفته را اثبات کنید (شکل ۲۸). (ب) دو زاویهٔ پرتابی را پیدا کنید که بردشان به‌ازای سرعت اولیهٔ ۳۰٫۰m/s برابر با ۲۰٫۰m باشد.



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. تردستی می‌تواند پنج توپ را در حرکت نگه دارد. او توپها را پشت سر هم تا ارتفاع ۳٫۰m به هوا پرتاب می‌کند. (الف) مدت بین دو پرتاب متوالی چقدر است؟ (ب) وقتی که یکی از توپها به‌دست تردست می‌رسد، بقیهٔ توپها کجاها هستند؟ (از زمان لازم برای اینکه تردست توپ را از یک دستش به‌دست دیگر بدهد صرفنظر کنید.)

۲۸. گلوله‌های تفنگی با سرعت ۱۵۰۰ft/s از لوله خارج می‌شوند. هدف در فاصلهٔ ۱۵۰ft از تفنگ است. چقدر بالاتر از هدف را باید نشانه گرفت تا گلوله به هدف بخورد؟

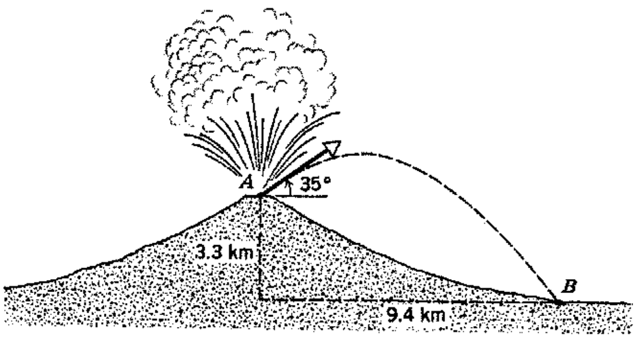
۲۹. توپی از بالاترین پلهٔ پلکانی قل می‌خورد و با سرعت افقی ۵٫۰ft/s از لبهٔ آن رها می‌شود. ارتفاع هر پله ۸٫۰in، و عرض هرپله هم ۸٫۰in است. اولین پله‌ای که توپ روی آن می‌افتد پلهٔ چندم است؟

۳۰. توپی را از زمین به هوا پرتاب می‌کنیم. سرعت توپ در ارتفاع ۹٫۱m به‌صورت $\mathbf{v} =$ ۷٫۶$\mathbf{i} +$ ۶٫۱$\mathbf{j}$، برحسب m/s، است (x محور افقی است و y محور قائم به طرف بالا). (الف) ارتفاع اوج توپ چقدر است؟ (ب) کل مسافت افقی‌ای که توپ می‌پیماید چقدر است؟ (ج) (اندازه و جهت) سرعت توپ را در لحظهٔ پیش از برخورد به زمین به‌دست بیاورید.

۳۱. منطقهٔ پرتاب توپ در زمین بیسبال، ۱٫۲۵ft بالاتر از زمین بازی است. آیا پرتاب‌کننده می‌تواند توپی سریع را به‌طور افقی با سرعت ۹۲٫۰mi/h پرتاب کند. چنانکه توپ در منطقهٔ ضربه قابل زدن باشد؟ منطقهٔ ضربه به ۶۰٫۵ft با منطقهٔ پرتاب فاصله دارد، فرض کنید که توپ، برای اینکه قابل زدن باشد، باید حداقل ۱٫۳۰ft و حداکثر ۳٫۶۰ft از نقطهٔ پرتاب پایین‌تر باشد.

۳۲. طبق معادلهٔ ۲۴، برد پرتابه‌ها نه تنها به v_0 و ϕ_0، بلکه به مقدار شتاب گرانشی g هم بستگی دارد. این شتاب، در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. در سال ۱۹۳۶، جسی اونس در بازیهای المپیک برلن ($g =$ ۹٫۸۱۲۸m/s^2) رکورد جهانی ۸٫۰۹m را برای پرش طول به‌جا گذاشت. اگر او، با همان مقدار v_0 و ϕ_0، در المپیک ۱۹۵۶ ملبورن ($g =$ ۹٫۷۹۹۹m/s^2) شرکت می‌کرد، رکوردش چقدر تغییرمی‌کرد؟[1]

۳۳. هنگام فوران آتشفشان، ممکن است قطعات سنگ جامد هم از دهانهٔ آتشفشان به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را پاره‌های آتشفشانی می‌نامند. شکل ۲۹ مقطع کوه فوجی (در ژاپن) را نشان می‌دهد. (الف) پاره‌ای که با زاویهٔ ۳۵° نسبت به سطح افقی از دهانهٔ A خارج می‌شود سرعتش چقدر باشد تا در نقطهٔ B در پای کوه آتشفشان به زمین برسد؟ (ب) زمان حرکت این پاره در هوا چقدر است؟



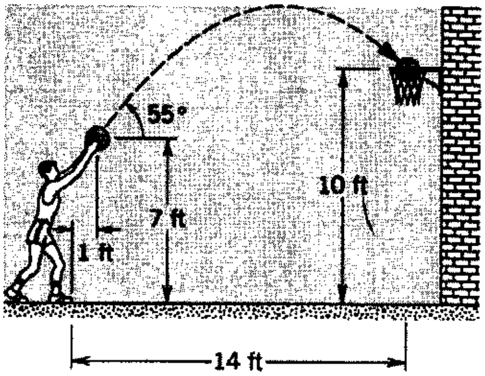
شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. یک بازیکن بیسبال می‌خواهد توپ را به نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۲۷ft پرتاب کند. بیشترین سرعتی که او می‌تواند به توپ بدهد ۸۵mi/h است. (الف) اگر توپ را به‌طور افقی و از فاصلهٔ ۳٫۰ft بالاتر از سطح زمین پرتاب کند، چه بر سر توپ می‌آید؟ (ب) توپ را با باید با چه زاویه‌ای به طرف بالا پرتاب کند تا بازیکن دیگری که در نقطهٔ فرود توپ ایستاده است بتواند آن‌را بگیرد؟ فرض کنید گیرندهٔ توپ هم آن‌را ۳٫۰ft بالاتر از سطح زمین می‌گیرد. (ج) مدت پرواز توپ در این مورد چقدر است؟

۳۵. بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویهٔ ۵۵° بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می‌کند؛ شکل ۳۰. سرعت اولیهٔ توپ چقدر باشد تا توپ مستقیماً وارد حلقه شود؟ قطر حلقه ۱۸in است. اطلاعات دیگر را از شکل ۳۰ بخوانید.

---

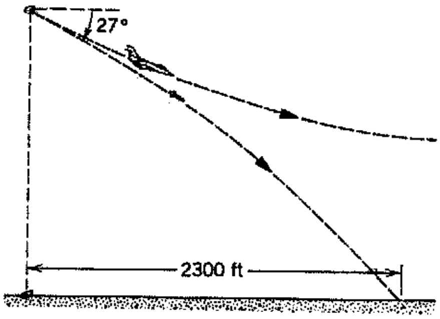
۱. رجوع کنید به
"The Earth's Gravity", Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, September 1955, p. 164.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۵

۳۶. فوتبالیستی توپ را چنان شوت می‌کند که زمان پرواز آن یعنی ۴٫۵۰s و برد آن ۵۰yd (یعنی ۴۵٫۸m) است. توپ در ارتفاع ۵٫۰ft (یعنی ۱٫۵۲m) از سطح زمین، از پای بازیکن جدا می‌شود. (اندازه و جهت) سرعت اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟

۳۷. هواپیمایی با سرعت ۱۸۰mi/h و با زاویهٔ °۲۷ پایین‌تر از افق در حال شیرجه است که یک "گول‌زنک" رادار از آن رها می‌شود. فاصلهٔ افقی میان نقطهٔ رها شدن گول‌زنک و نقطهٔ برخورد آن با زمین ۲۳۰۰ft است. گول‌زنک (الف) چه مدتی در هوا بوده؟ و (ب) در چه ارتفاعی از هواپیما رها شده است؟ (شکل ۳۱)



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۳۷

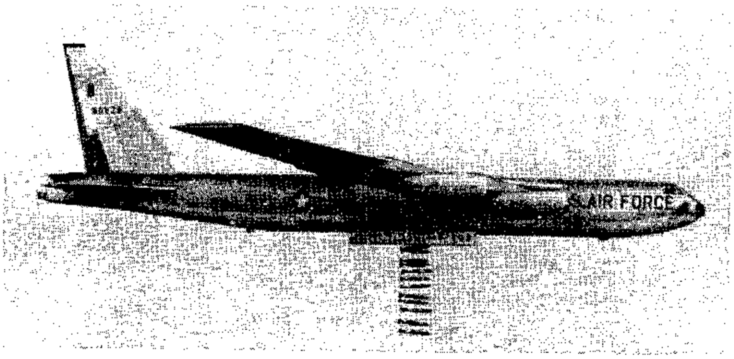
۳۸. بمب‌افکنی با زاویهٔ ۵۶٫۰° نسبت به راستای قائم شیرجه می‌رود و بمبی را در ارتفاع ۷۳۰m رها می‌کند. بمب ۵٫۱۰s بعد به زمین می‌رسد، اما به هدف برنمی‌خورد. (الف) سرعت بمب‌افکن، موقع رها کردن بمب، چقدر بوده است؟ (ب) بمب، در طی پروازش، چه مسافت افقی‌ای پیموده است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت بمب، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر بوده‌اند؟ (د) اندازهٔ سرعت، و زاویهٔ برخورد بمب نسبت به محور قائم، در زمان برخورد بمب با زمین چقدر بوده است؟

۳۹. طول هواپیمای B-۵۲ (شکل ۳۲) ۴۹m است. این هواپیما دارد با سرعت ۸۲۰km/h (یعنی ۵۱۰mi/h) بر فراز منطقه‌ای که قرار است بمباران شود پرواز می‌کند. فاصلهٔ حفره‌هایی که بمبها روی زمین ایجاد می‌کنند از یکدیگر چقدر خواهد بود؟ هر کمیت دیگری را که لازم دارید مستقیماً روی شکل اندازه‌گیری کنید، فرض کنید باد نمی‌وزد و مقاومت هوا را هم ناچیز بگیرید. مقاومت هوا چه تأثیری بر جواب شما خواهد داشت؟

۴۰. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیهٔ ۶۴ft/s با زاویهٔ °۴۲ بالاتر از سطح افقی شوت می‌کند. در همان لحظه بازیکن دیگری که به فاصلهٔ ۶۵yd از قبلی در جهت حرکت افقی توپ ایستاده است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. سرعت متوسط این بازیکن چقدر باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟ از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.

۴۱. (الف) تنیس‌بازی در یک مسابقه، چنان "سرو می‌زند" که به توپ سرعت ۲۳٫۶m/s می‌دهد (این مقدار توسط رادار ثبت می‌شود). اگر توپ ۲٫۳۷m بالاتر از سطح زمین و در راستای افق از راکت جدا شده باشد، در چه فاصله‌ای از بالای تور عبور می‌کند؟ تور در فاصلهٔ ۱۲m از محل سرویس است و ۰٫۹۰m ارتفاع دارد. (ب) فرض کنید تنیس‌باز به همان ترتیب سرو بزند، اما توپ با زاویهٔ ۵٫۰۰° پایین‌تر از سطح افقی از راکت جدا شود. آیا این بار هم توپ از تور می‌گذرد؟

۴۲. یک بازیکن بیسبال، توپ را با چوب بیسبال در ارتفاع ۴٫۰ft از سطح زمین چنان می‌زند که زاویهٔ پرتاب توپ °۴۵ و برد افقی آن

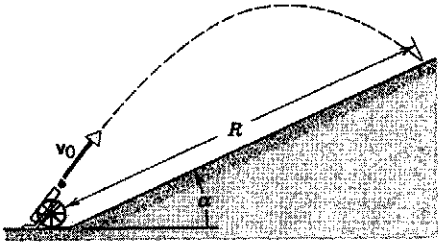


شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۹

۳۵۰ft می‌شود. توپ از زمین خارج می‌شود و به نرده‌ای به ارتفاع ۲۴ft می‌رسد که ۳۲۰ft از نقطهٔ پرتاب فاصله دارد. آیا توپ از بالای نرده می‌گذرد؟ اگر می‌گذرد، در چه فاصله‌ای؟

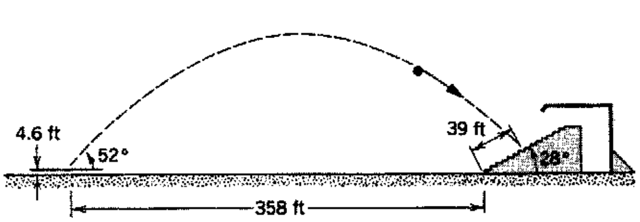
۴۳. بازیکنی می‌تواند توپ فوتبال را با سرعت ۲۵m/s شوت کند. زاویهٔ شوت نسبت به سطح زمین در چه گستره‌ای باشد تا توپ درست از زیر تیر افقی وارد دروازه شود؟ دروازه ۵۰m دورتر است و ارتفاع تیر افقی آن از سطح زمین ۳٫۴۴m است.

۴۴. توپی گلوله‌هایش را با سرعت $v_\circ$ پرتاب می‌کند. این توپ در پای تپه‌ای به زاویهٔ شیب α قرار دارد؛ شکل ۳۳. زاویهٔ پرتاب گلوله نسبت به سطح افقی چقدر باشد تا برد گلوله‌ها روی تپه بیشینه شود؟



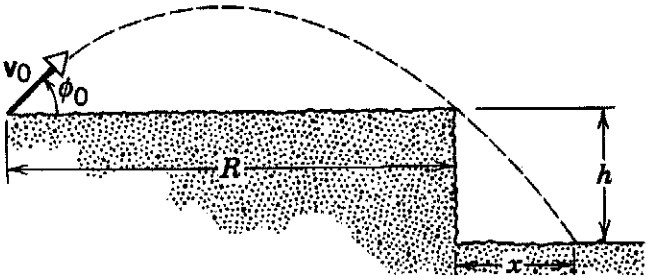
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. در یک بازی بیسبال، بازیکنی توپ را با چوب خود در ارتفاع ۴٫۶۰ft از سطح زمین می‌زند. زاویهٔ پرتاب توپ نسبت به سطح افقی ۵۲٫۰° است. توپ در جایگاه تماشاگران، و به فاصلهٔ ۳۹٫۰ft از پایین آن، فرود می‌آید؛ شکل ۳۴. شیب جایگاه ۲۸٫۰° است و پایین‌ترین نیمکتهای آن ۳۵۸ft از محل ضربه فاصله دارند. توپ با چه سرعتی از چوب بازیکن جدا شده است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۵

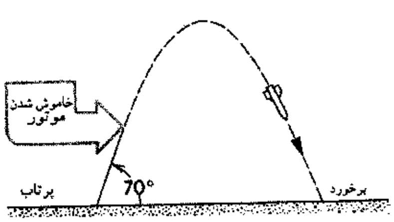
۴۶. پرتابه‌هایی را از فاصلهٔ R از لبهٔ صخره‌ای به ارتفاع h چنان پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ای به فاصلهٔ افقی x از پای صخره فرود بیایند؛ شکل ۳۵. $\phi_\circ$ و $v_\circ$ را چنان تعیین کنید که x کمینه شود. فرض کنید می‌توانیم $v_\circ$ را از صفر تا مقدار بیشینهٔ متناهی $v_{\max}$ تغییر بدهیم و $\phi_\circ$ را هم به دلخواه تنظیم کنیم. شرط مسئله این است که پرتابه باید تنها یک بار به زمین بخورد.



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۶

۴۷. متصدی رادار، از زمین پرتابه‌ای را "مشاهده می‌کند" که دارد نزدیک می‌شود. در یک لحظهٔ معین، اطلاعات دریافتی از حرکت پرتابه این است: پرتابه در نقطهٔ اوج است و با سرعت v به‌طور افقی حرکت می‌کند؛ فاصلهٔ مستقیم پرتابه از محل L است؛ پرتابه تحت زاویهٔ θ، بالاتر از سطح افقی، دیده می‌شود. (الف) فاصلهٔ D بین ناظر و نقطهٔ برخورد پرتابه به زمین چقدر است؟ D را برحسب مقادیر مشاهده شدهٔ v، L، θ، و مقدار معلوم g به‌دست بیاورید. فرض کنید زمین مسطح است و ناظر در صفحهٔ مسیر پرتابه است. (ب) آیا پرتابه از ناظر می‌گذرد یا جلوی او به زمین می‌خورد؟

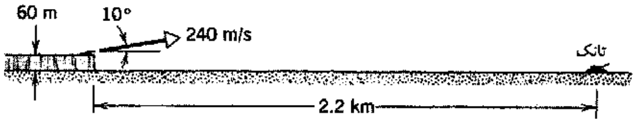
۴۸. موشکی از حالت سکون، با شتاب ۴۶٫۰m/s² و روی خط راستی با زاویهٔ ۷۰٫۰° نسبت به سطح افقی، شروع به حرکت می‌کند. مدت پرواز تحت تأثیر نیروی پیشران، ۳۰٫۰s است. پس از این مدت، موتور خاموش می‌شود و موشک در مسیری سهموی به زمین برمی‌گردد؛ شکل ۳۶. (الف) زمان پرواز، از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ برخورد، چقدر است؟ (ب) ارتفاع اوج موشک چقدر است؟ (ج) فاصلهٔ نقطهٔ پرتاب از نقطهٔ برخورد چقدر است؟ از تغییر g با ارتفاع صرفنظر کنید.



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۸

۴۹. سلاح ضد تانکی روی لبهٔ سطحی است که ۶۰٫۰m بالاتر از دشتِ اطراف است؛ شکل ۳۷. خدمهٔ سلاح، یکی از تانکهای دشمن را در دشت در فاصلهٔ افقی ۲٫۲۰km از سلاح می‌بینند که ساکن است. در همین لحظه، خدمهٔ تانک متوجه سلاح ضد تانک می‌شوند و با شتاب ۰٫۹۰۰m/s² شروع به حرکت در جهت مخالف می‌کنند و از سلاح دور می‌شوند. سلاح ضد تانک می‌تواند گلوله‌ای با سرعت ۲۴۰m/s و با زاویهٔ ۱۰٫۰° بالاتر از سطح افقی شلیک کند. خدمهٔ سلاح باید چه

مدتی بعد از شروع حرکت تانک شلیک کنند تا گلوله به تانک بخورد؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۹

۵۰. بازیکنی می‌تواندتوپ بیسبال را حداکثر تا فاصله ۶۰٫۰m پرتاب کند. همین بازیکن توپ را حداکثر تا چه ارتفاعی می‌تواند پرتاب کند؟ فرض کنید که توپ، در هر دو حالت، از ارتفاع ۱٫۶۰m و با سرعت اولیهٔ یکسان رها می‌شود.

بخش ۴ـ۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

۵۱. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون روی مداری دایره‌ای به شعاع $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$ و با سرعت $۲٫۱۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$ به‌دور پروتون می‌گردد. شتاب الکترون در این مدل چقدر است؟

۵۲. فضانوردی در یک دستگاه گریز از مرکز (سانتریفوژ) به شعاع ۵٫۲m چرخانده می‌شود. (الف) به‌ازای چه سرعتی، شتاب فضانورد $۶٫۸g$ می‌شود؟ (ب) این سرعت متناظر با چند دور بردقیقه است؟

۵۳. ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به ارتفاع ۶۴۰km از سطح زمین حرکت می‌کند. زمان یک دور چرخش ماهواره ۹۸٫۰min است. (الف) سرعت ماهواره چقدر است؟ (ب) شتاب سقوط آزاد در مدار ماهواره چقدر است؟

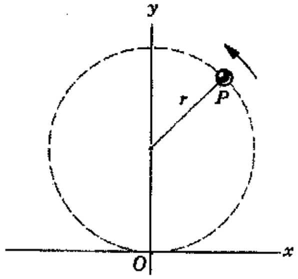
۵۴. شعاع چرخ وفلکی ۱۵m است. این چرخ و فلک، هر دقیقه پنج بار به دور محور افقی‌اش می‌گردد. (الف) (اندازه و جهت) شتاب مسافران را در بالاترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید. (ب) شتاب مسافران را در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید.

۵۵. پنکه‌ای در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور می‌زند. نقطه‌ای در بالای پره را در نظر بگیرید که ۰٫۱۵m از محور فاصله دارد. (الف) در هر دور، این نقطه چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) سرعت این نقطه چقدر است؟ (ج) شتاب این نقطه چقدر است؟

۵۶. قطار سریع‌السیر TGV آتلانتیک، در مسیر بین پاریس و لمان در فرانسه کار می‌کند. بیشترین سرعت این قطار ۳۱۰km/h است. (الف) اگر قرار باشد این قطار با همین سرعت از پیچی بگذرد، و اگر شتاب مجاز مسافران $۰٫۰۵g$ باشد، شعاع پیچ حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع پیچی ۰٫۹۴km باشد، سرعت قطار در آن پیچ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

۵۷. فرض بر این است که بعضی از ستاره‌های نوترونی (ستاره‌هایی فوق‌العاده چگال) با آهنگِ حدود ۱rev/s به‌دور خود می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰km باشد (که نوعاً چنین است)، (الف) سرعت نقاط واقع بر استوای این ستاره چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای این نقاط چقدر است؟

۵۸. ذرهٔ P با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع ۳٫۰m حرکت می‌کند و هر ۲۰s یک دور می‌زند؛ شکل ۳۸. ذره در $t = ۰$ از O می‌گذرد. (الف) اندازه و جهت بردار مکان ذره در زمانهای ۵٫۰s، ۷٫۵s، و ۱۰s (نسبت به O)؛ (ب) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی در بازهٔ ۵٫۰ ثانیه‌ای از پایان ثانیهٔ پنجم تا پایان ثانیهٔ دهم؛ (ج) بردار سرعت متوسط در این بازه؛ (د) بردار سرعت لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه؛ و (ه) بردار شتاب لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه را پیدا کنید. زاویه‌ها را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x بسنجید.

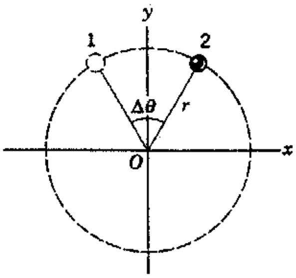


شکل ۳۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. ذره‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات O، با سرعت v به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند. (الف) نشان بدهید که زمان Δt لازم برای جابه‌جایی زاویه‌ای ذره به اندازهٔ $\Delta\theta$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{۲\pi r}{v}\,\frac{\Delta\theta}{۳۶۰^\circ}$$

که در آن $\Delta\theta$ برحسب درجه و r شعاع دایره است. (ب) در شکل ۳۹، مؤلفه‌های x و y سرعت در نقاط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. نشان بدهید که برای دو نقطهٔ متقارن نسبت به محور y، و به‌ازای $\Delta\theta = ۹۰^\circ$ خواهیم داشت $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹v^۲/r$. (ج) نشان بدهید که اگر $\Delta\theta = ۳۰^\circ$ باشد، $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹۹v^۲/r$ است. (د) نشان بدهید که در حد $\Delta\theta \to ۰$، $\overline{a}_y \to -v^۲/r$، و اینکه تقارن دورانی ایجاب می‌کند که این نتیجه برای همهٔ نقاط روی دایره درست باشد.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. کودکی سنگی را که به نخی بسته است روی دایره‌ای افقی به شعاع ۱٫۴m و در ارتفاع ۱٫۹m از سطح زمین می‌گرداند. نخ پاره می‌شود و سنگ به‌طور افقی پرتاب می‌شود و ۱۱m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

۶۱. (الف) با استفاده از داده‌های پیوست ج، نسبت شتابهای مرکزگرای زمین و زحل را، در گردش به دور خورشید، به‌دست بیاورید. فرض کنید که هر دو سیاره با سرعت ثابت در مدار دایره‌ای به دور خورشید می‌گردند. (ب) نسبت فاصلهٔ این دو سیاره از خورشید چقدر است؟ (ج) جوابهای دو قسمت (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و رابطهٔ ساده‌ای بین شتاب مرکزگرا و فاصله از خورشید پیشنهاد کنید. فرضیهٔ خودتان را با محاسبهٔ همین نسبت برای دو سیارهٔ دیگر بیازمایید.

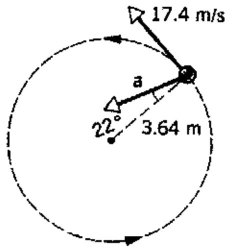
۶۲. (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (به علت چرخش زمین به دور خودش) چقدر است؟ (ب) دورهٔ تناوب چرخش زمین باید چقدر می‌بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا $9/8\,m/s^2$ باشد؟

۶۳. شتاب ناشی از چرخش زمینِ شخصی که در عرض جغرافیایی °۴۰ است، چقدر است؟

۶۴. فرض کنید شخصی با $1/6\,m$ قد به مدت $24h$ در عرض جغرافیایی °۵۰، صاف ایستاده باشد. (الف) در این مدت، مسافتی که "نوک" سر او می‌پیماید چقدر بیشتر از مسافتی است که نوک پایش می‌پیماید؟ (ب) شتاب نوک سر او چقدر بزرگتر از شتاب نوک پاهایش است؟ فقط آثار ناشی از چرخش زمین را در نظر بگیرید.

بخش ۴ـ۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای

۶۵. ذره‌ای در مسیری دایره‌ای به شعاع $3/64\,m$ حرکت می‌کند. در یک لحظهٔ معین، سرعت ذره $17/4\,m/s$، و شتاب آن در جهت °۲۲٫۰ نسبت به جهت مرکز دایره است؛ شکل ۴۰. (الف) آهنگ افزایش اندازهٔ سرعت ذره چقدر است؟ (ب) اندازهٔ شتاب ذره چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۶۵

۶۶. ذره‌ای طبق معادلات

$$x = R\sin\omega t + \omega R t$$
$$y = R\cos\omega t + R$$

در صفحه حرکت می‌کند؛ ω و R ثابت‌اند. مسیر حرکت این ذره را چرخزاد می‌نامند. این منحنی، مسیر نقطه‌ای است بر محیط چرخی که بدون لغزش در راستای محور x می‌غلتد. (الف) مسیر را رسم کنید. (ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را، در حالتی که y در بیشترین و کمترین مقدار است، به‌دست بیاورید.

بخش ۴ـ۶ حرکت نسبی

۶۷. شخصی پلهٔ برقی ساکنی به طول $15m$ را در $90s$ می‌پیماید. اگر شخصی روی همین پلهٔ برقی بایستد و پلهٔ برقی حرکت کند، همان مسیر در $60s$ طی می‌شود. اگر شخصی از پله برقی بالا برود و پله هم در حرکت باشد، پیمودن این مسیر چقدر طول می‌کشد؟ آیا جواب به طول پله برقی بستگی دارد؟

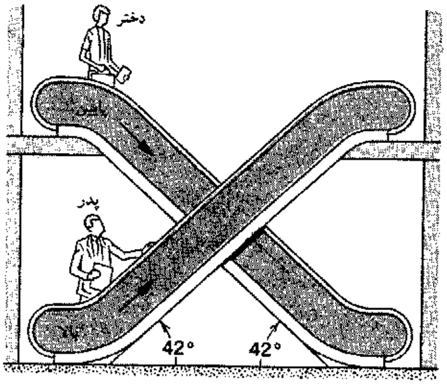
۶۸. پایانهٔ فرودگاه ژنو در سویس، یک "پیاده‌روی متحرک" دارد که حرکت مسافر را در یک راهرو طویل سریع می‌کند. پیتر از این پیاده‌رو استفاده نمی‌کند و راهرو را در $150s$ می‌پیماید. پل فقط روی پیاده‌رو می‌ایستد و راهرو را در $70s$ می‌پیماید. مری ضمن استفاده از پیاده‌رو، روی آن راه هم می‌رود. با فرض اینکه سرعت راه رفتن مری و پیتر یکسان باشد، چقدر طول می‌کشد تا مری راهرو را بپیماید؟

۶۹. زمان برنامه‌ریزی شدهٔ یک پرواز بین قاره‌ای به مسافت $2700\,mi$، در جهت غرب $50\,min$ بیشتر است تا در جهت شرق. سرعت هواپیما نسبت به هوا $600\,mi/h$ است. در تعیین این برنامه، چه فرضی دربارهٔ سرعت وزش باد شده است؟ باد را شرقی غربی در نظر بگیرید.

۷۰. برف در راستای قائم با سرعت ثابت $7/8\,m/s$ می‌بارد. راننده‌ای اتومبیل‌اش را روی جاده‌ای مسطح با سرعت $55\,km/h$ می‌راند. از دید راننده، دانه‌های برف (الف) با چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، و (ب) با چه سرعتی سقوط می‌کنند؟

۷۱. قطاری با سرعت $28\,m/s$ (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می‌بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می‌کند. مسیر قطره‌های باران، از دید ناظرِ ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویهٔ °۶۴ می‌سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش باران را دقیقاً عمود به سطح زمین می‌بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

۷۲. در یک فروشگاه بزرگ، شخصی روی پله برقی‌ای با زاویهٔ شیب °۴۲ که با سرعت $0/75\,m/s$ به بالا می‌رود ایستاده است. این شخص از کنار دخترش می‌گذرد که روی پله برقی مشابهی ایستاده است و دارد از طبقهٔ بالا به پایین می‌آید؛ شکل ۴۱. بردار سرعت شخص را نسبت به دخترش پیدا کنید.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۷۲

Ramin.samad@yahoo.com

۷۳. خلبانی باید در جهت شرق از A به B برود. بعد در جهت غرب به A برگردد. سرعت هواپیما نسبت به هوا $\mathbf{v}$، و سرعت هوا نسبت به زمین $\mathbf{u}$ است. فاصلهٔ A تا B برابر با l است، و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت می‌ماند. (الف) نشان بدهید که اگر $u = ۰$ باشد (هوای ساکن)، زمان رفت و برگشت $t_\circ = ۲l/v$ است. (ب) فرض کنید که سرعت باد در جهت شرق (یا غرب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

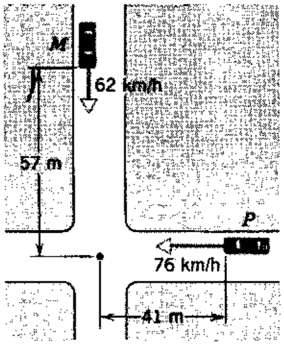
$$t_{\mathrm{E}} = \frac{t_\circ}{۱ - u^۲/v^۲}$$

(ج) فرض کنید که سرعت باد در جهت شمال (یا جنوب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_{\mathrm{N}} = \frac{t_\circ}{\sqrt{۱ - u^۲/v^۲}}$$

(د) در قسمتهای (ب) و (ج) باید فرض کرد که $u < v$ است. چرا؟

۷۴. دو بزرگراه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ شکل ۴۲. در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده است، اتومبیل پلیس (P) در فاصلهٔ ۴۱m از تقاطع است و با سرعت ۷۶km/h حرکت می‌کند. اتومبیل سواری (M) ۵۷m از تقاطع فاصله دارد و با سرعت ۶۲km/h در حرکت است. سرعت (اندازه و زاویهٔ بردار سرعت نسبت به خط دید) اتومبیل M را نسبت به اتومبیل پلیس پیدا کنید.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۷۴

۷۵. هلی‌کوپتری بر فراز یک دشت مسطح، روی خط راست پرواز می‌کند. سرعت هلی‌کوپتر ثابت، و برابر با ۶٫۲m/s است. ارتفاع پرواز هم ثابت، و برابر با ۹٫۵m است، بسته‌ای با سرعت افقی ۱۲m/s نسبت به هلی‌کوپتر، و در خلاف جهت حرکت هلی‌کوپتر، از آن رها می‌شود. (الف) سرعت اولیهٔ بسته نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ افقی بین هلی‌کوپتر و بسته، در لحظهٔ برخورد بسته به زمین چقدر است؟ (ج) زاویهٔ بردار سرعت بسته با زمین، درست پیش از برخورد، از دید ناظر زمین چقدر است؟ (د) این زاویه از دید خلبان هلی‌کوپتر چقدر است؟

۷۶. آسانسوری با شتاب ۴٫۰ft/s² بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت آن ۸٫۰ft/s به طرف بالاست، پیچ لقی از سقف آسانسور رها می‌شود. بلندی اتاقک آسانسور ۹٫۰ft است. (الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور، و (ب) مسافت سقوط پیچ از دید ناظر زمین چقدر است؟

۷۷. هواپیمای سبکی با سرعت ۴۸۰km/h نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصلهٔ ۸۱۰km به طرف شمال است. خلبان متوجه می‌شود که هواپیما را باید به اندازهٔ °۲۱ از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت ۱٫۹h به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را پیدا کنید.

۷۸. پلیس ایالت نیوهمپشایر، برای پاییدن سرعت اتومبیلها در بزرگراهها، از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید سرعت یکی از این هواپیماها، در هوای ساکن، ۱۳۵mi/h باشد. هواپیما مستقیماً به طرف شمال پرواز می‌کند تا همواره بر فراز یک بزرگراه شمالی-جنوبی باشد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان خبر می‌دهد که بادی با سرعت ۷۰mi/h جریان دارد، اما فراموش می‌کند جهت باد را بگوید. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود باد، باز هم هواپیمایش می‌تواند ۱۳۵mi بر فراز بزرگراه را طی ۱h بپیماید. یعنی اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به زمین، همان است که در هوای آرام بود. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) سر هواپیما در چه جهتی است، یعنی زاویهٔ بین محور هواپیما و بزرگراه چقدر است؟

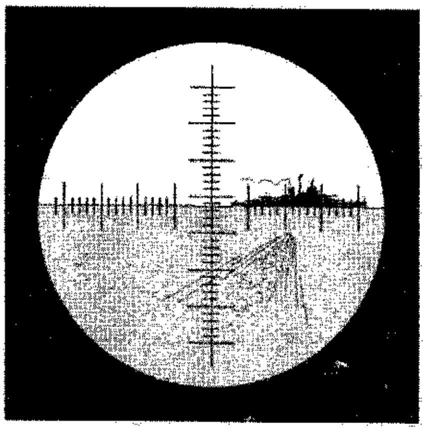
۷۹. شخصی می‌تواند قایقی را با سرعت ۴٫۰mi/h در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد که سرعت جریان آن ۲٫۰mi/h است، قایقش را باید در چه جهتی هدایت کند تا درست به نقطهٔ مقابل برسد؟ (ب) اگر عرض رودخانه ۴٫۰mi باشد، چقدر طول می‌کشد تا از رودخانه بگذرد؟ (ج) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای ۲٫۰mi پایین‌تر برود و برگردد؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای ۲٫۰mi بالاتر برود و برگردد؟ (هـ) قایق را در چه جهتی براند تا در کوتاهترین زمان ممکن از رودخانه بگذرد؟ این زمان چقدر است؟

۸۰. واگنی چوبی روی ریل مستقیمی با سرعت $v_۱$ حرکت می‌کند. راهزنی با تفنگ پرقدرتی به آن شلیک می‌کند سرعت اولیهٔ گلوله $v_۲$ است. گلوله از هر دو دیوارهٔ جانبی واگن می‌گذرد و دو سوراخ ایجاد می‌کند. این سوراخها، از دید ناظر واگن، درست روبه روی هم‌اند. گلوله در چه جهتی، نسبت به واگن شلیک شده است؟ فرض کنید که گلوله هنگام ورود به واگن منحرف نشده، اما سرعتش به اندازهٔ ۲۰٪ کم شده است. فرض کنید $v_۱ = ۸۵\mathrm{km/h}$ و $v_۲ = ۶۵۰\mathrm{m/s}$ است. (تعجب می‌کنید که برای حل مسئله لازم نیست که عرض واگن معلوم باشد؟)

۸۱. مردی می‌خواهد با قایق از رودی به عرض ۵۰۰m بگذرد. سرعت حاصل از پاروزنی او (نسبت به آب) ۳٫۰km/h، سرعت جریان آب ۲٫۰km/h، و سرعت پیاده‌روی مرد در ساحل ۵٫۰km/h است. (الف) مسیری را پیدا کنید که این شخص بتواند از طریق آن در

کوتاهترین زمانِ ممکن درست به نقطهٔ مقابل در آن طرف رودخانه برسد. (حرکت می‌تواند ترکیبی از قایق‌رانی و پیاده‌روی باشد.) (ب) این زمان چقدر است؟

۸۲. رزم‌ناوی با سرعت $24\,\mathrm{km/h}$ به طرف شرق می‌رود. از یک زیردریایی درفاصلهٔ $4.0\,\mathrm{km}$ اژدری با سرعت $50\,\mathrm{km/h}$ به طرف آن شلیک می‌شود؛ شکل ۴۳. ناو از زیردریایی، در جهت $20°$ شرقِ شمال مشاهده می‌شود. (الف) اژدر در چه جهتی شلیک شود تا به ناو اصابت کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا اژدر به ناو برسد؟



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۸۲

۸۳. الکترونی با سرعت $0.42c$ نسبت به ناظر B حرکت می‌کند. ناظر B با سرعت $0.63c$، در همان جهت حرکت الکترون، نسبت به ناظر A در حرکت است. سرعت الکترون از دید ناظر A چقدر است؟

۸۴. رصد نشان می‌دهد که کهکشان آلفا با سرعت $0.350c$ از ما دور می‌شود. کهکشان بتا هم، که درست در نقطهٔ مقابل کهکشان آلفاست، با همین سرعت از ما دور می‌شود. از دید ناظر آلفا (الف) کهکشان ما و (ب) کهکشان بتا با چه سرعتی از کهکشان خودش دور می‌شوند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۸۵. کامپیوتر می‌تواند جدولی از مختصات، مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب یک جسم در زمانهای معین را تهیه کند. به کمک این جدول می‌توانیم کمیتهای مورد نظر، مثلاً اوج مسیر، زمان برگشت به زمین، و غیره را جستجو کنیم. برنامه‌ای بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات و مؤلفه‌های سرعت یک پرتابه را در پایان بازه‌های زمانی Δt از زمان t_1 تا زمان t_2 محاسبه کند. فرض کنید پرتابه در $t=0$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. کامپیوتر باید $x=v_0 t\cos\theta_0$، $y=v_0 t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2$، $v_x=v_0\cos\theta_0$، و $v_y=v_0\sin\theta_0-gt$ را به ازای $t=t_1$، $t=t_1+\Delta t$، $t=t_1+2\Delta t$، ...، $t=t_1+N\Delta t$ حساب کند. ابتدا مقادیر v_0، θ_0، t_1، Δt، و N را به کامپیوتر بدهید. برنامه را چنان تنظیم کنید که در هر اجرا به راحتی بشود t_1، Δt، و N را تغییر داد بی‌آنکه نیاز به تغییر بقیهٔ مقادیر باشد. برنامه را با مسئلهٔ زیر آزمایش کنید. نتایج کامپیوتری را با نتایج حاصل از عبارتهای جبری مناسب مقایسه کنید.

پرتابه‌ای با سرعت $v_0=50\,\mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ $25°$ بالاتر از افق، از زمین شلیک می‌شود. (الف) $x(t)$، $y(t)$، $v_x(t)$، و $v_y(t)$ را در هر $0.1\,\mathrm{s}$، از $t=0$ تا $t=4.5\,\mathrm{s}$، به‌دست بیاورید. (ب) دو زمان متوالی را که لحظهٔ رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج بین آن دو است پیدا کنید. حالا برنامه را دوباره اجرا کنید. این بار t_1 را زمان کوچکتر دو زمان بالا، و Δt را $0.005\,\mathrm{s}$ بگیرید. با استفاده از جدول، مختصات نقطهٔ اوج را تا ۲ رقم با معنی به‌دست بیاورید. (ج) با استفاده از همین روش، زمان، مختصات، و مؤلفه‌های سرعت پرتابه را در موقعی که به ارتفاع نقطهٔ شلیک برگشته است پیدا کنید.

۸۶. ذره‌ای با شتاب $a_x=-1.7$ و $a_y=-0.45$ در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. (در این مسئله، همهٔ طولها برحسب سانتی‌متر و همهٔ زمانها برحسب ثانیه‌اند.) در $t=0$، ذره با سرعت $v_x=10$ و $v_y=2$ از نقطهٔ $x=1$، $y=10$ می‌گذرد. برنامه‌ای بنویسید که متغیرهای زیر را، که حرکت ذره را توصیف می‌کنند، تنها برای مواقعی که ذره در ربع اول (طرف راستِ بالا) دستگاه مختصات است جدول‌بندی کند. t، x، y، r، ϕ(یعنی $\tan^{-1}y/x$)، v_x، v_y، v، θ(یعنی $\tan^{-1}v_y/v_x$). با استفاده از جدولی که حاصل می‌شود، به این پرسشها پاسخ بدهید. (الف) ذره در چه زمانی و درکدام نقطه از ربع اول خارج می‌شود؟ (ب) بیشترین فاصلهٔ ذره از مبدأ چقدر است، و در این نقطه چه سرعتی دارد؟ (ج) ذره، در لحظه‌ای که سرعت آن 2.00 است، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (د) ذره در چه نقطه‌ای خط $45°$ (نیمساز ربع اول) را قطع می‌کند؟

۸۷. مختصات جسمی که روی دایره به شعاع R به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند، $x=R\cos\omega t$ و $y=R\sin\omega t$ است؛ ω ثابت و زاویهٔ ωt برحسب رادیان است. برنامه‌ای بنویسید یا الگوریتمی طرح کنید، که بردار سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی t_0 تا $t_0+\Delta t$ محاسبه کند. به ازای $R=1.5\,\mathrm{m}$ و $\omega=5.0\,\mathrm{rad/s}$، حساب کنید که $\bar{v}_x=[x(t_0+\Delta t)-x(t_0)]/\Delta t$ و $\bar{v}_y=[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)]/\Delta t$ چقدر است. برنامه را چنان تنظیم کنید که بشود در هر اجرا مقادیر t_0 و Δt را به‌راحتی تغییر داد. اگر همهٔ متغیرها را با دقت مضاعف بگیرید، افت دقت در محاسبات کم می‌شود. (الف) به‌ازای $t_0=1\,\mathrm{s}$، x، y، $\bar{v}_x$، $\bar{v}_y$، و $x\bar{v}_x+y\bar{v}_y$ را حساب کنید. عبارت اخیر برابر است با حاصلضرب اسکالر بردارهای مکان و سرعت متوسط که صفر است اگر این دو بردار بر هم عمود باشند. حالا این محاسبه را به‌ازای $\Delta t=0.1\,\mathrm{s}$، $\Delta t=0.01\,\mathrm{s}$، $\Delta t=0.001\,\mathrm{s}$، و $\Delta t=0.0001\,\mathrm{s}$ تکرار کنید. دقت کنید که مؤلفه‌های $\bar{\mathbf{v}}$، مرتباً به مقادیر حدی خودشان، که مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$اند، نزدیکتر می‌شوند، و خود $\bar{\mathbf{v}}$ هم مرتباً به جهت بردار مکان (یعنی مماس بر دایره) نزدیکتر می‌شود.

چنانکه مستقیماً با مشتق‌گیری می‌شود نشان داد، مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ عبارت‌اند از $v_x = -\omega R \sin \omega t$ و $v_y = \omega R \cos \omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و به کمک آن ببینید که برنامهٔ شما با چه دقتی $\mathbf{v}$ را تخمین زده است. (ب) حالا برنامه را تغییر بدهید و مؤلفه‌های شتاب متوسط، $\bar{a}_x = [v_x(t_\circ + \Delta t) - v_x(t_\circ)]/\Delta t$ و $\bar{a}_y = [v_y(t_\circ + \Delta t) - v_y(t_\circ)]/\Delta t$ را حساب کنید. برای این کار، عبارت $v_x(t) = -\omega R \sin \omega t$ و $v_y(t) = \omega R \cos \omega t$ را به‌کار ببرید. $x\bar{a}_y - y\bar{a}_x$ را هم حساب کنید. قدرمطلق این مقدار، اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری بردارهای مکان و شتاب است، که اگر این دو بردار با هم موازی باشند، صفر است. محاسبه را به‌ازای $t_\circ = ۱\text{s}$ و $\Delta t = ۱\text{s}$، $\Delta t = ۰٫۱\text{s}$، $\Delta t = ۰٫۰۱\text{s}$، $\Delta t = ۰٫۰۰۱\text{s}$، و $\Delta t = ۰٫۰۰۰۱\text{s}$ انجام بدهید. توجه کنید که $\bar{\mathbf{a}}$ مدام به مقدار حدی‌اش، که شتاب لحظه‌ای $\mathbf{a}$ است، نزدیکتر می‌شود، و خود $\mathbf{a}$ هم به جهت بردار مکان نزدیکتر می‌شود. مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ عبارت‌اند از $a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$ و $a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و با نتایج حاصل از برنامهٔ خودتان مقایسه کنید. همچنین تحقیق کنید که نتایج حاصل از برنامهٔ شما هم مقدار $a = v^2/R$ را برای اندازهٔ شتاب به‌دست می‌دهد.

۵

نیرو و قوانین نیوتون

در فصلهای ۲ و ۴، حرکت ذرات را بررسی کردیم. نپرسیدیم که چه چیزی "باعث" حرکت می‌شود؛ صرفاً به توصیف حرکت برحسب بردارهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{v}$، و $\mathbf{a}$ پرداختیم. در این فصل و فصل بعدی، علت حرکت را بررسی می‌کنیم. این بخش از مکانیک را **دینامیک** می‌نامند.

رهیافتی به دینامیک که ما دراین فصل و فصل بعدی اختیار کرده‌ایم عموماً **مکانیک کلاسیک** نامیده می‌شود. این رهیافت در قرنهای هفدهم و هیجدهم فرمولبندی و با موفقیت آزموده شد. در قرن ما نظریه‌های جدیدی (نسبیت خاص و عام و مکانیک کوانتومی) ظهور کرده‌اند که واقعیتهایی فراتر از تجربیات روزمره را آشکار می‌کنند؛ این واقعیتها در حوزه‌هایی بروز می‌کنند که در آنها مکانیک کلاسیک نمی‌تواند پیش‌بینیهای سازگار با تجربه ارائه کند. اما همین نظریه‌ها هم در حد اجسام معمولی به مکانیک کلاسیک تحویل می‌شوند.

بدون نیاز به نسبیت خاص و عام یا مکانیک کوانتومی هم می‌شود آسمانخراش‌های عظیم ساخت و خواص مواد سازندهٔ آنها را بررسی کرد؛ می‌شود هواپیماهایی ساخت که صدها نفر را جابه‌جا کنند و نیمی از کره زمین را یکسره بپیمایند؛ و می‌شود فضاپیماهایی ساخت که مأموریتهای مشکلی به سوی دنباله‌دارها، سیاره‌ها، و جز آنها انجام بدهند. اینها همه در قلمرو مکانیک کلاسیک‌اند.

۱ـ۵ مکانیک کلاسیک

مطالعه را به حرکت یک جسم معین معطوف می‌کنیم. این جسم با اجسام اطراف خودش (یعنی با محیط خودش) برهم‌کنش می‌کند، و به این ترتیب سرعتش تغییر می‌کند: شتاب تولید می‌شود. در جدول ۱، چند حرکت شتابدار معمولی و همچنین در هر مورد مؤثرترین عامل در تولید شتاب آمده است. مسئلهٔ اساسی مکانیک کلاسیک این است: ۱. جسمی داریم که مشخصات آن (از قبیل جرم، حجم، و بار الکتریکی) را می‌دانیم. ۲. این جسم را، در مکان اولیهٔ مشخص و با سرعت اولیهٔ مشخص، در محیطی که کاملاً می‌شناسیم رها می‌کنیم. ۳. حرکت بعدی این جسم چگونه است؟

در فصلهای قبلی، اجسام فیزیکی را ذره در نظر گرفتیم، یعنی اجسامی که ساختار یا حرکات درونی‌شان قابل اغماض است و همهٔ اجزائشان دقیقاً یک جور حرکت می‌کنند. در بررسی برهم‌کنشی اجسام با محیط، اغلب باید اجسام گسترده‌ای را در نظر گرفت که بخشهای متفاوتشان به طرق مختلفی با محیط برهم‌کنش دارند. مثلاً، کارگری را در نظر بگیرید که یک صندوق سنگین را روی یک سطح ناهموار

جدول ۱. چند حرکت شتابدار و علت آنها.

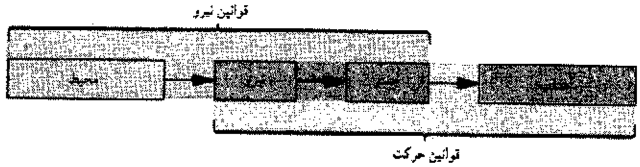
جسم	تغییر حرکت	علت اصلی (محیط)
سیب	افتادن از درخت	گرانش (زمین)
گوی بیلیارد	واجهیدن از یک گوی دیگر	گوی دیگر، میز، گرانش (زمین)
اسکی‌باز	لغزیدن از تپه به پایین	گرانش (زمین)، اصطکاک (برف)، مقاومت هوا
پرتو الکترون (در تلویزیون)	کانونی شدن و انحراف	میدان الکترومغناطیسی (آهنربا و اختلاف ولتاژ)
دنباله‌دار هالی	گردش در منظومهٔ شمسی	گرانش (خورشید)

هل می‌دهد. کارگر به یکی از وجوه قائم صندوق نیرو وارد می‌کند؛ در همین حال، به کف افقی صندوق نیروی بازدارندهٔ اصطکاک وارد می‌شود. همچنین ممکن است وجه جلویی صندوق تحت اثر مقاومت هوا قرار بگیرد.

در قسمتهای بعدی همین کتاب، مکانیک اجسام گسترده را هم به تفصیل بررسی خواهیم کرد. فعلاً همچنان فرض می‌کنیم که همهٔ قسمتهای جسم یک نوع حرکت دارند و در نتیجه می‌توانیم جسم را ذره در نظر بگیریم. در این شرایط، مهم نیست که محیط به کجای جسم اثر می‌کند؛ هدف اصلی ما فعلاً بررسی اثر خالص محیط است.

ایزاک نیوتون (۱۶۴۲ تا ۱۷۲۷) با ارائهٔ قوانین حرکت و قانون گرانش جهانی خود، این مسئلهٔ مکانیک کلاسیک را، لااقل برای بسیاری از محیطها، حل کرد. برنامهٔ حل این‌مسئله، در چارچوب مکانیک کلاسیک، چنین است: ۱. از مفهوم نیرو ($\mathbf{F}$) را ــ که فعلاً به‌صورت هل دادن یا کشیدن در نظر می‌گیریم ــ معرفی می‌کنیم و آن‌را برحسب شتابی ($\mathbf{a}$) که به یک‌جسم استانداردِ معین می‌دهد تعریف می‌کنیم. ۲. روشی برای نسبت دادنِ جرم (m) به اجسام اختیار می‌کنیم؛ به‌این ترتیب می‌توانیم بفهمیم که اجسام با جرمهای متفاوت در محیطهای یکسان شتابهای مختلفی می‌گیرند. ۳. سرانجام، سعی می‌کنیم راهی برای محاسبهٔ نیروهای وارد براجسام، برحسب خواص اجسام و محیط آنها، پیدا کنیم؛ یعنی دنبال قوانین نیرو می‌گردیم. نیرو، که اساساً واسطهٔ محیط با حرکت جسم است، هم در قوانین حرکت (که می‌گوید یک جسم معین تحت تأثیر نیرویی معین چه شتابی دارد) ظاهر می‌شود و هم در قوانین نیرو (که می‌گوید چگونه می‌توان نیروی وارد بر جسمی معین در محیطی معین را حساب کرد). قوانین حرکت و قوانین نیرو، با هم، قوانین مکانیک را تشکیل می‌دهند (شکل ۱).

بخشهای مختلف این برنامهٔ مکانیک را نمی‌شود جداگانه آزمود. باید آن‌را به‌صورت واحد در نظر گرفت، و این برنامه وقتی موفق است که بتوانیم به این دو پرسش پاسخ مثبت بدهیم: ۱. آیا نتایج حاصل از برنامه با تجربه سازگار است؟ ۲. آیا شکل قوانین نیرو شکل ساده‌ای دارند؟ تاج افتخار مکانیک نیوتونی این است که واقعاً می‌شود به هر دو پرسش پاسخ مثبت داد.



شکل۱. برنامهٔ ما در مکانیک. سه جعبهٔ سمت چپ نشان می‌دهند که نیرو برهم‌کنش جسم و محیط آن است. سه جعبهٔ سمت راست نشان می‌دهند که نیروی وارد بر جسم، به آن شتاب می‌دهد.

۵ـ۲ قانون اول نیوتون

مسئلهٔ حرکت و علل آن، قرنها یکی از موضوعات مهم فلسفهٔ طبیعی (آنچه امروز فیزیک می‌نامیم) بود. اما تازه در زمان گالیله و نیوتون بود که پیشرفت چشمگیری به‌دست آمد. ایزاک نیوتون، که در همان سال مرگ گالیله در انگلستان به دنیا آمد، معمار اصلی مکانیک کلاسیک است. او بود که تفکرات گالیله و پیشینیانش را کاملاً به ثمر رساند. سه قانون حرکت نیوتون، ابتدا (در سال ۱۶۸۶) در کتابش، اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی، منتشر شد. این کتاب را اغلب به‌نام اصلی‌اش "پرینکیپیا" می‌نامند.

پیش از گالیله، بیشتر فلاسفه می‌پنداشتند که نوعی اثر یا "نیرو" لازم است تا جسمی در حال حرکت بماند. آنها فکر می‌کردند اجسام زمانی در "حالت طبیعی" خودشان هستند که ساکن باشند. مثلاً گمان می‌کردند برای اینکه جسمی با سرعت ثابت روی خط راست حرکت کند، یک عامل خارجی لازم است تا پیوسته آن‌را براند؛ در غیر این‌صورت به گمان آنها، جسم "طبیعتاً" می‌ایستاد.

کسی که بخواهد این افکار را تجربه کند، اول باید راهی بیابد که همهٔ آثار محیطی یا همهٔ نیروها را، برای جسم مورد بررسی حذف کند. این کار خیلی سخت است، اما در موارد خاصی می‌شود نیروها را فوق‌العاده کوچک کرد. اگر حرکت اجسام را، هنگامی که نیروها را کوچک و کوچکتر می‌کنیم، بررسی کنیم، می‌توانیم تصوری از حالتی که نیروهای خارجی واقعاً صفر شده‌اند به‌دست بیاوریم.

فرض کنید جسم آزمونی، مثلاً یک قالب، را روی سطح افقی زبری بگذاریم. اگر قالب را روی صفحه بلغزانیم، خواهیم دید که حرکتش به تدریج کند می‌شود و می‌ایستد. در واقع همین قبیل مشاهدات بود که توقف حرکت در غیاب عامل خارجی را تأیید می‌کرد. در این مورد، عامل خارجی فشار دست است، که با برداشتن آن جسم متوقف می‌شود. اما می‌توانیم برای مردود شمردن این فکر، چنین استدلال کنیم: فرض کنید آزمایش را تکرار می‌کنیم، اما این بار با قالبی صافتر و سطحی صافتر، خواهیم دید که سرعت جسم آهسته‌تر از حالت پیش کم می‌شود. قالب و سطح را باز هم صیقلی‌تر می‌کنیم و این بار روان‌کننده هم به‌کار می‌بریم. خواهیم دید که آهنگ کاهش سرعت قطعه مرتباً کمتر می‌شود و قطعه هر بار مسافت بیشتری را تا زمان توقف می‌پیماید. شاید خودتان با ریل هوا هم آزمایش کرده باشید: می‌شود اجسام را برریل هوا روی لایهٔ نازکی از هوا شناورکرد. با چنین ابزاری به حد بدون اصطکاک نزدیک می‌شویم: حتی ضربهٔ کوچکی به جسم کافی است تا آن‌را، با سرعت کم و تقریباً ثابت، روی ریل براند. حالا می‌توانیم برونیابی کنیم و بگوییم که اگرمی‌شد اصطکاک را کاملاً حذف کرد، اجسام به‌طور نامحدود با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کردند. برای به حرکت درآوردن اجسام نیرو لازم است، اما برای اینکه جسمی به حرکت با سرعت ثابت ادامه بدهد نیروی خارجی لازم نیست.

دستیابی به شرایطی که هیچ نیروی خارجی‌ای برجسم اثر نکند

دشوار است. نیروی گرانش بر همهٔ اجسامی که روی زمین، یا نزدیک آن، واقع شده‌اند اثر می‌کند؛ نیروهای بازدارنده‌ای مثل اصطکاک یا مقاومت هوا هم با حرکت اجسام بر سطح زمین یا در هوا مقابله می‌کنند. خوشبختانه لازم نیست به خلأ فضاهای دور برویم تا بتوانیم حرکت اجسام را به دور از نیروهای خارجی بررسی کنیم چون، تا آنجا که تنها حرکت انتقالی کلی جسم مطرح است، بین جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود، و جسمی که مجموع یا برایند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است، تفاوتی وجود ندارد. معمولاً برایند همهٔ نیروهای وارد بر جسم را نیروی "خالص" می‌نامیم. مثلاً، نیروی وارد از دست به قالب لغزنده، می‌تواند با نیروی اصطکاک وارد بر قالب مقابله کند و نیروی رو به بالای سطح افقی می‌تواند با نیروی گرانش مقابله کند. به این ترتیب، نیروی خالص وارد بر قالب می‌تواند صفر شود، و قطعه می‌تواند با سرعت ثابت حرکت کند.

نیوتون این اصل را به عنوان نخستین قانون از قوانین سه‌گانه‌اش برگزید:

> جسمی را در نظر بگیرید که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر این جسم ساکن باشد، درحالت سکون باقی خواهد ماند. اگر درحال حرکت باشد، با سرعت ثابت به حرکتش ادامه خواهد داد.

قانون اول نیوتون در واقع گزاره‌ای دربارهٔ چارچوبهای مرجع است. به‌طور کلی، شتاب اجسام بستگی به چارچوب مرجعی دارد که این شتاب نسبت به آن سنجیده می‌شود. اما قوانین مکانیک کلاسیک تنها در چارچوبهای مرجع خاصی درست‌اند، در آنهایی که ناظرهایشان همگی شتاب یکسانی برای جسم متحرک می‌سنجند. به کمک قانون اول نیوتون می‌شود این گروه چارچوبهای مرجع را مشخص کرد. به این منظور، قانون اول را چنین بیان می‌کنیم:

> می‌توان دسته‌ای از چارچوبهای مرجع یافت که اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم در این چارچوبها صفر باشد.

تمایل اجسام برای باقی ماندن در حالت سکون یا در حرکت راستخط یکنواخت را لختی، و قانون اول نیوتون را اغلب قانون لختی می‌نامند. چارچوبهایی هم که این قانون در آنها برقرار است چارچوبهای لخت نامیده می‌شوند. قبلاً در بخش ۴ـ۶ در بارهٔ این چارچوبها صحبت کردیم؛ به خاطر دارید که ناظرهای چارچوبهای مرجع لخت متفاوت (که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند) همه یک شتاب می‌سنجند. بنابراین، فقط یک چارچوب نیست که شتاب در آن صفر است: مجموعه‌ای از چارچوبهای مرجع هست که همگی چنین خاصیتی دارند.

برای اینکه ببینیم یک چارچوب مرجع خاص لخت هست یا نه، جسم آزمونی را به حالت سکون در آن رها می‌کنیم و مطمئن می‌شویم که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر جسم درحالت سکون نماند، چارچوب لخت نیست. به همین ترتیب می‌شود جسم متحرکی را (که باز هم نیروی خالصی بر آن وارد نشود) در این چارچوب گذاشت؛ اگر (اندازه یا جهت) سرعت تغییر کند، چارچوب لخت نیست. چارچوبی که به این آزمون در همهٔ نقاط مختلف پاسخ مثبت بدهد (جسم ساکن همچنان ساکن بماند و سرعت جسم متحرک ثابت بماند) یک چارچوب لخت است. همین‌که یک چارچوب لخت پیدا کردیم، به سادگی می‌توانیم بسیاری چارچوبهای لخت دیگر هم پیدا کنیم، چون، هر چارچوب مرجعی که نسبت به چارچوب اول با سرعت ثابت حرکت کند هم یک چارچوب لخت است.

در این کتاب، تقریباً همیشه قوانین مکانیک کلاسیک را از دیدگاه ناظرهای چارچوبهای لخت به‌کار می‌بریم. گاهگاهی هم مسائلی را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت ــ مثلاً اتومبیل شتابدار، صفحهٔ دوار، یا ماهواره‌های گردان در مدار ــ بررسی می‌کنیم. اگرچه زمین در حال چرخش است، می‌توانیم چارچوب مرجع وابسته به آن‌را، در اکثر موارد عملی، یک چارچوب تقریباً لخت در نظر بگیریم، اما در کاربردهای بزرگ مقیاس، مثلاً در تحلیل حرکت موشکهای قاره‌پیما یا بررسی باد و جریانهای اقیانوس، نالخت بودن زمین چرخان اهمیت پیدا می‌کند.

توجه کنید که قانون اول فرقی میان اجسام ساکن و اجسام متحرک با سرعت ثابت قائل نمی‌شود. اگر نیروی خالص وارد بر جسم صفر باشد، هر دو حرکت "طبیعی"اند. اگر جسمی را که نسبت به یک چارچوب مرجع ساکن است از دید چارچوب مرجع دیگری، که با سرعت ثابت نسبت به اولی حرکت می‌کند، بررسی کنیم، این موضوع روشنتر می‌شود. ناظر چارچوب اول جسم را ساکن می‌بیند؛ ناظر چارچوب دوم همان جسم را در حال حرکت با سرعت ثابت می‌بیند. هر دو ناظر در می‌یابند که جسم شتاب ندارد، یعنی سرعت آن تغییر نمی‌کند، و هر دو از قانون اول نتیجه می‌گیرند که نیروی خالصی بر جسم اثر نمی‌کند.

اگر برهم‌کنش خالصی بین جسم و اشیای محیط وجود داشته باشد، این اثر ممکن است حالت "طبیعی" حرکت جسم را تغییر بدهد. برای تحقیق این موضوع باید مفهوم نیرو را به‌دقت بررسی کنیم.

۵ـ۳ نیرو

برای پروراندن مفهوم نیرو، آن‌را به‌طور عملیاتی تعریف می‌کنیم. در زبان روزمره، نیرو همان هل دادن یا کشیدن است. برای سنجش کمی چنین نیروهایی، آنها را برحسب شتابی که به یک جسم استاندارد می‌دهند تعریف می‌کنیم.

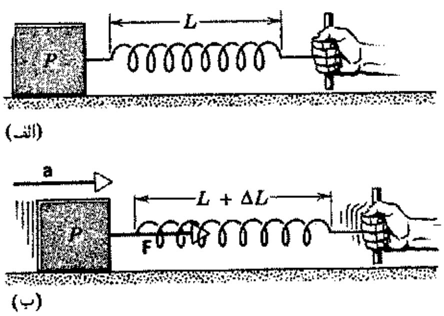
به عنوان جسم‌استاندارد، کیلوگرم استاندارد را به‌کار می‌بریم (یا فرض می‌کنیم که داریم به‌کارمی‌بریم!). به این جسم، طبق تعریف، جرم m_0 دقیقاً برابر با 1kg نسبت داده شده است (شکل ۵ در فصل ۱). بعداً توضیح خواهیم داد که چگونه به هر جسم دیگری جرم نسبت می‌دهیم.

برای اینکه محیطی داشته باشیم که نیرو وارد کند، جسم استاندارد را روی یک میز افقی با اصطکاک ناچیز می‌گذاریم و یک فنر به آن می‌بندیم و سر دیگر فنر را در دست می‌گیریم؛ شکل ۲الف. سپس فنر را به راست می‌کشیم، چنانکه با آزمون خطا به حالتی برسیم که شتاب جسم استاندارد دقیقاً برابر با مقدار ثابت ۱m/s² باشد. در این حالت می‌گوییم که فنر (که جسم با اهمیت محیط است) طبق تعریف هرکیلوگرم استاندارد نیروی ثابتی به اندازهٔ "۱ نیوتون" (به‌اختصار ۱N) وارد می‌کند. متوجه می‌شویم که فنر، در حالتی که این نیرو را وارد می‌کند، به اندازهٔ ΔL، نسبت به طول معمولی‌اش، کشیده شده است (شکل ۲ب).

می‌شود آزمایش را تکرار کرد، و این بار فنر سخت‌تری به‌کار برد یا فنر را بیشتر کشید، تا شتابی که برای جسم استاندارد اندازه می‌گیریم برابر با ۲m/s² بشود. در این حالت می‌گوییم که فنر نیروی ۲N به جسم استاندارد وارد می‌کند. به‌طور کلی، اگر مشاهده کنیم که این جسم در یک محیط معین شتاب a دارد، می‌گوییم که محیط بر جسم ۱kg استاندارد نیروی F وارد می‌کند. که در آن F (برحسب نیوتون) از لحاظ عددی برابر با a (برحسب متر بر مجذور ثانیه) است.

حالا ببینیم که آیا نیرو، که به شکل بالا تعریف کردیم، یک کمیت برداری است یا نه. در شکل ۲ب به نیروی F اندازه نسبت دادیم. به راحتی می‌توانیم به آن جهت هم نسبت بدهیم، که این جهت همان جهت شتابی است که همین نیرو ایجاد کرده است. اما برای اینکه کمیتی بردار باشد کافی نیست که اندازه و جهت داشته باشد؛ این کمیت باید از قوانین جمع برداری فصل ۳ هم تبعیت کند. تنها با آزمایش می‌شود فهمید که نیرو، که به روش بالا تعریف شد، واقعاً طبق این قوانین رفتار می‌کند یا خیر.

یک نیروی ۴N در راستای محور x و یک نیروی ۳N در راستای محور y اعمال می‌کنیم. این نیروها را یکبار جداگانه و بعد با هم به جسم استاندارد، که همچنان روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد، وارد می‌کنیم. شتاب جسم چه خواهد بود؟ از آزمایش نتیجه می‌شود که نیروی ۴N در جهت محور x، شتاب ۴m/s² در جهت



شکل۲. (الف) "ذرهٔ" P (کیلوگرم استاندارد) در حالت سکون روی یک سطح افقی بدون اصطکاک. (ب) جسم، با کشیدن فنر به طرف راست، شتاب گرفته است.

محور x تولید می‌کند، و نیروی ۳N در جهت محور y هم شتاب ۳m/s² در جهت محور y به جسم می‌دهد؛ شکل ۳الف. اگر دو نیرو را با هم اعمال کنیم؛ شکل ۳ب، خواهیم دید که شتاب جسم ۵m/s² و در جهت خطی است که با محور x زاویهٔ °۳۷ می‌سازد. اگر به جسم نیروی ۵N در این جهت وارد می‌شد هم همین شتاب به‌دست می‌آمد. برای به‌دست آوردن این نتیجه، می‌توانستیم اول دو نیروی ۴N و ۳N را جمع برداری کنیم (شکل ۳ج) تا برایند ۵N در جهت °۳۷ از محور x به‌دست بیاید، و بعد این نیروی خالص را به جسم اعمال کنیم. با آزمایشهایی از این نوع معلوم می‌شود که نیرو بردار است: یعنی اندازه و جهت دارد، و طبق قانونِ جمع برداری جمع می‌شود.

توجه کنید که دو روشِ تحلیل داریم که هر دو باید به یک نتیجه بینجامند. ۱. می‌توانیم شتاب حاصل از هر نیرو را پیدا کنیم و شتابها را با هم جمع برداری کنیم. ۲. می‌توانیم نیروها را جمع برداری کنیم، برایند حاصل را به جسم اعمال کنیم و شتاب را به‌دست بیاوریم.

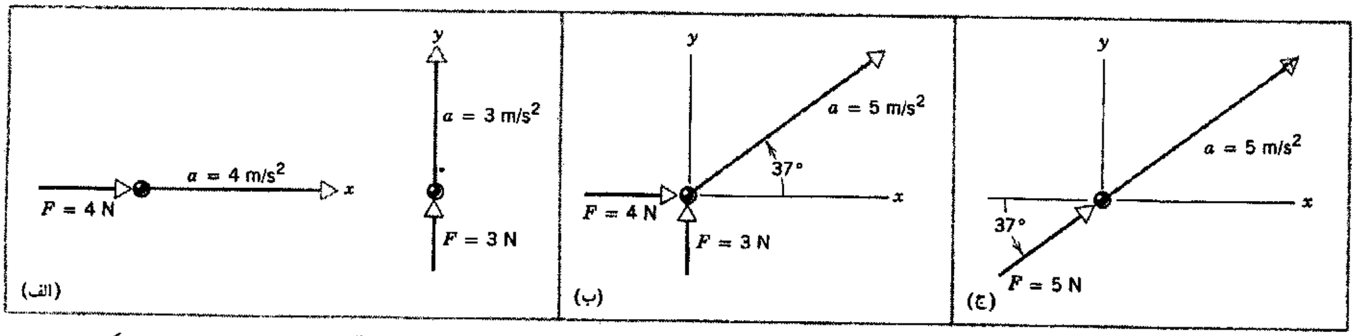
۴ـ۵ جرم

در بخش ۵ـ۳، فقط شتابهای یک جسم خاص، یعنی کیلوگرم استاندارد را بررسی کردیم. از اینجا توانستیم نیرو را به طور کمّی تعریف کنیم. اما ببینیم نیرو بر اجسام دیگر چه اثری می‌گذارد؟ چون جسم استاندارد را دلبخواه انتخاب کرده بودیم، طبیعی است که برای هر جسمی، شتاب مستقیماً متناسب با نیرویی باشد که بر آن وارد می‌شود. پرسش مهمی که باقی می‌ماند این است: اثر یک نیروی یکسان بر اجسام متفاوت چگونه است؟

پاسخ کیفی این سؤال از تجربیات روزمره حاصل می‌شود. نیروهای یکسان، شتابهای متفاوتی به اجسام متفاوت می‌دهند. یک نیروی معین، به توپ بیسبال شتاب بیشتری می‌دهد تا به یک اتومبیل. برای به‌دست آوردن پاسخ کمّی به این پرسش، به روشی برای اندازه‌گیری جرم نیاز داریم، یعنی به روشی برای سنجش خاصیتی از جسم که مقاومت آن‌را در برابر تغییر حرکتش تعیین می‌کند.

فرض کنید که فنری به جسم استانداردمان (کیلوگرم استاندارد، که خودمان به آن جرم $m_\circ$، دقیقاً برابر با ۱kg نسبت دادیم) ببندیم و آن‌را، به روش شکل ۲ب، چنان بکشیم که شتاب آن $a_\circ$، مثلاً ۲٫۰۰m/s²، شود. تغییر طول ΔL فنر را، که متناظر با نیرویی است که از فنر بر جسم وارد می‌شود، دقیقاً اندازه می‌گیریم.

اکنون دو جسم استاندارد یکسان را به فنر می‌بندیم و همان نیروی سابق را به آنها وارد می‌کنیم (یعنی فنر را آنقدر می‌کشیم تا افزایش طول آن به همان اندازهٔ ΔL باشد. شتاب مجموعهٔ دو جسم را اندازه می‌گیریم، و می‌بینیم ۱٫۰۰m/s² می‌شود. اگر سه جسم استاندارد به‌کار برده بودیم و همان نیرو را اعمال می‌کردیم، شتاب مجموعه را برابر ۰٫۶۷m/s² به‌دست می‌آوردیم.



شکل۳. (الف) نیروی 4N در جهت x، شتاب 4m/s^2 در جهت x تولید می‌کند، و نیروی 3N در جهت y شتاب 3m/s^2 در جهت y. (ب) اگر دو نیرو با هم اعمال شوند، شتاب برایند برابر با 5m/s^2 در جهتی است که نشان داده شده است. (ج) این شتاب را می‌شود با یک نیروی 5N در جهت مشخص شده تولید کرد.

از این مشاهدات معلوم می‌شود که به‌ازای نیروی ثابت، هر چه جرم بزرگتر باشد شتاب کوچکتر می‌شود. از این آزمایش و آزمایشهای مشابه دیگر، نتیجه می‌گیریم که شتابی که یک نیروی معین تولید می‌کند، تناسب معکوس با جرم جسمی دارد که شتاب می‌گیرد. به بیان دیگر: جرم اجسام متناسب با عکس شتابی است که از یک نیروی معین می‌گیرند. به این ترتیب، جرم جسم را می‌توانیم معیاری کمّی از مقاومت آن در برابر یک نیروی معین در نظر بگیریم.

با این مشاهده، روش مستقیمی برای مقایسهٔ جرم اجسام مختلف به‌دست می‌آید: کافی است شتاب اجسام تحت تأثیر یک نیروی معین را بسنجیم و با هم مقایسه کنیم. نسبت جرمهای دو جسم برابر با عکس نسبت شتابهایی است که در اثر آن نیرو کسب می‌کنند، یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \qquad (\text{به‌ازای نیروی یکسان})$$

اینجا در واقع داریم شتاب a_1 جسمی به جرم مجهول m_1 را با شتاب a_0 جسم استاندارد به جرم m_0 مقایسه می‌کنیم.

مثلاً، فرض کنید نیرویی اعمال کنیم که به جرم استاندارد شتاب $2.00\,\text{m/s}^2$ بدهد. همان نیرو را به جسمی به جرم مجهول m_1 وارد می‌کنیم (برای این کار فنر را به همان اندازه ΔL می‌کشیم)، و شتاب a_1 را می‌سنجیم، که مثلاً برابر با $0.50\,\text{m/s}^2$ می‌شود. حالا می‌توانیم m_1 را از رابطهٔ بالا بیاوریم. نتیجه می‌شود که

$$m_1 = m_0\left(\frac{a_0}{a_1}\right) = (1.00\,\text{kg})\left(\frac{2.00\,\text{m/s}^2}{0.50\,\text{m/s}^2}\right) = 4.00\,\text{kg}$$

شتاب جسم دوم، در اثر همان نیروی وارد بر جسم اول، یک چهارم شتابِ جسم اول است؛ بنابراین، جرم آن چهار برابر جرم جسم اول است. این مثال رابطهٔ معکوس میان جرم و شتاب را به‌ازای نیروی معین، نشان می‌دهد.

آزمایش بالا را برای همین دو جسم تکرار می‌کنیم، اما این بار به هر دو نیروی F' وارد می‌کنیم، که با F متفاوت است. این نیرو به جسم استاندارد شتاب a'_0 و به جسم مجهول شتاب a'_1 می‌دهد. خواهیم دید که نسبت شتابها، a'_0/a'_1، برابر با همان نسبت آزمایش قبلی است؛ یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

مثلاً فرض کنید نیروی بزرگتری اعمال کنیم، چنانکه فنر به اندازهٔ $1.5\Delta L$ کشیده شود. در این حالت خواهیم دید که جرم m_0 شتاب $3.00\,\text{m/s}^2$، و جرم مجهول m_1 شتاب $0.75\,\text{m/s}^2$ می‌گیرد. از اینجا جرم مجهول چنین به‌دست می‌آید:

$$m_1 = m_0\left(\frac{a'_0}{a'_1}\right) = (1.00\,\text{kg})\left(\frac{3.00\,\text{m/s}^2}{0.75\,\text{m/s}^2}\right) = 4.00\,\text{kg}$$

که همان مقداری است که در آزمایش قبل به‌دست آمد. مهم نیست که مقدار نیروی مشترکی که به کار می‌بریم چقدر باشد، در هر حال مقداری که برای m_1 حاصل می‌شود یکی است. نسبت جرم m_1/m_0 مستقل از نیروی مشترکی است که اعمال شده است؛ جرم از خواص بنیادی جسم است و بستگی به مقدار نیرویی که برای مقایسهٔ جرم مجهول با جرم استاندارد به کار رفته است ندارد. پس به کمک این روش می‌توانیم جرم اجسام را از مقایسه با کیلوگرم استاندارد به‌دست بیاوریم.

این روش را می‌شود به مقایسهٔ مستقیم جرم هر دو جسمی تعمیم داد. مثلاً، فرض کنید که ابتدا جسم دلبخواه دیگری را به همان روش قبلی با جسم استاندارد مقایسه و جرم آن، مثلاً m_2، را تعیین کنیم. اکنون می‌توانیم دو جسم m_2 و m_1 را مستقیماً با هم مقایسه کنیم: در اثر نیروی F''، شتابهای a''_2 و a''_1 به دست می‌آیند. نسبت جرمها که طبق معمول از رابطهٔ

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a''_1}{a''_2} \qquad (\text{به‌ازای نیروی یکسان})$$

تعریف می‌شود، برابر با همان نسبتی است که از دو جرم m_2 و m_1 که مستقیماً از مقایسه با جرم استاندارد به‌دست آمده باشند، حاصل می‌شود.

با آزمایش دیگری از همین نوع، می‌شود نشان داد که اگر دو جسم به جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ را به هم ببندیم، جسمی به‌دست می‌آید که از نظر مکانیکی مثل جسمی به جرم $m_۱ + m_۲$ رفتار می‌کند. به عبارت دیگر، جرم مانند کمیتهای اسکالر جمع می‌شود (اسکالر هم هست).

یکی از کاربردهای عملی این روش ــ تعیین جرم اجسام از راه مقایسهٔ شتاب نسبی آنها در اثر نیروی یکسان ــ اندازه‌گیری دقیق جرم اتمهاست. در این مورد، نیرو نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی، و شتاب شتابِ مرکزگراست، اما اصول کار دقیقاً همان است که دیدیم. اگرنیروی مغناطیسی وارد بر دو اتم یکسان باشد، نسبت جرمهای دو اتم برابر با عکس نسبت شتابهای آنهاست. با اندازه‌گیری مقدار انحراف، مثلاً در طیف‌سنج جرمی (شکل ۶ در فصل ۱)، می‌شود نسبت دقیق جرم اتمهای مختلف را سنجید، و با تعریف ^{۱۲}C به عنوان استاندارد، می‌شود مقادیر دقیق برای جرمها به‌دست آورد (مثل مقادیر جدول ۶ در فصل ۱).

۵ـ۵ قانون دوم نیوتن

حالا می‌توانیم همهٔ آزمایشها و تعریفهای قبلی را در یک معادله، معادلهٔ بنیادی مکانیک کلاسیک، خلاصه کنیم:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۱)$$

در این معادله، $\sum \mathbf{F}$ جمع (برداری) همهٔ نیروهایی است که بر جسم اثر می‌کنند، m جرم جسم، و $\mathbf{a}$ (بردار) شتاب آن است. معمولاً $\sum \mathbf{F}$ را نیروی برایند یا نیروی خالص می‌نامند.

معادلهٔ ۱ بیانی از قانون دوم نیوتن است. اگر آن‌را به شکل $\mathbf{a} = (\sum \mathbf{F})/m$ بنویسیم، به سادگی دیده می‌شود که اندازهٔ شتاب جسم مستقیماً متناسب با اندازهٔ نیروی برایند وارد بر آن است، و جهت شتاب هم با جهت نیرو موازی است. همچنین دیده می‌شود که شتاب حاصل از یک نیروی معین، با جرم جسم نسبت عکس دارد.

توجه کنید که قانون اول نیوتن را می‌شود حالت خاصی از قانون دوم تلقی کرد، چون اگر $\sum \mathbf{F} = ۰$ باشد $\mathbf{a} = ۰$ است. به بیان دیگر، اگر نیروی برایند وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم صفر می‌شود و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و این همان است که قانون اول نیوتن می‌گوید. اما قانون اول یک نقش مهم و مستقل از قانون دوم هم دارد، و آن تعریف چارچوبهای مرجع لخت است. بدون چنین تعریفی، نمی‌شود چارچوبهایی را که قانون دوم نیوتن در آنها معتبر است مشخص کرد. بنابراین هر دو قانون را لازم داریم تا سیستم مکانیکی کاملی داشته باشیم.

معادلهٔ ۱ معادله‌ای برداری است. این معادله را هم، مثل همهٔ معادلات برداری دیگر، می‌توانیم به شکل سه معادلهٔ اسکالر بنویسیم:

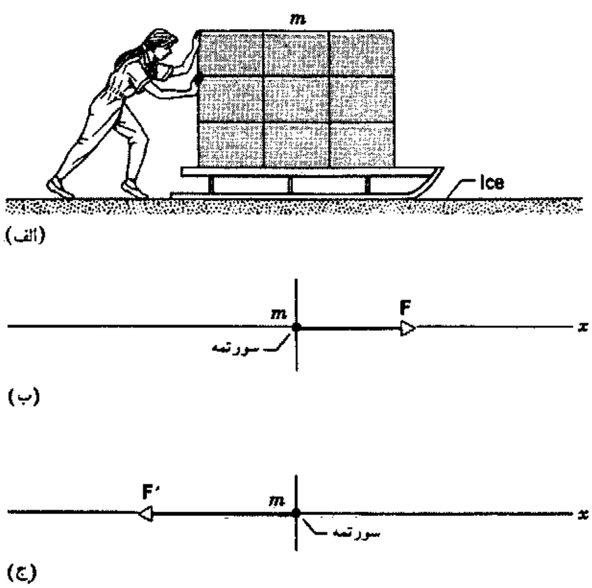
$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \text{و}\ \sum F_z = ma_z \qquad (۲)$$

این سه معادله، مؤلفه‌های x، y، و z نیروی برایند ($\sum F_x$، $\sum F_y$، و $\sum F_z$) را به مؤلفه‌های شتاب (a_x، a_y، و a_z) جسم به جرم m مربوط می‌کنند. لازم است تأکید کنیم که $\sum F_x$ جمع جبری مؤلفه‌های x همهٔ نیروها، $\sum F_y$ جمع جبری مؤلفه‌های y همهٔ نیروها، و $\sum F_z$ جمع جبری مؤلفه‌های z همهٔ نیروهای وارد بر m است. در به‌دست آوردن جمع جبری، باید علامت مؤلفه‌ها (یعنی جهت نیروها نسبت به همدیگر) را در نظر گرفت.

در تحلیل مسائل به کمک قانون دوم نیوتن، خوب است نموداری رسم کنیم که جسم مورد نظر را به شکل یک نقطه، و نیروهای وارد بر آن‌را به شکل بردارهایی که بر آن اثر می‌کنند نشان بدهد. چنین نمایشی را نمودار جسم آزاد می‌نامند؛ این نمایش یک گام اولیهٔ اساسی، هم در تحلیل مسئله و هم در تجسم وضعیت فیزیکی، است.

مثال ۱. دانشجویی سورتمهٔ بارشده‌ای به جرم $m = ۲۴۰\text{kg}$ را تا مسافت $d = ۲{,}۳\text{m}$ روی سطح بدون اصطکاک دریاچهٔ یخزده‌ای با نیروی افقی ثابت $F = ۱۳۰\text{N}$ (یعنی ۲۹lb) هل می‌دهد؛ شکل ۴الف. اگر سورتمه از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی آن چه خواهد بود؟

حل: یک محور x افقی می‌کشیم (شکل ۴ب)، جهت افزایش x را به‌طرف راست می‌گیریم، و سورتمه را ذره در نظر می‌گیریم. شکل ۴ب یک نمودار جسم آزاد جزئی است. درکشیدن نمودار جسم آزاد، مهم است که همهٔ نیروهای وارد بر ذره را در نظربگیریم، اما در اینجا دو نیروی عمودی را حذف کرده‌ایم. این دو نیرو را ــ که تأثیری بر حل مسئلهٔ ما ندارند ــ بعداً در همین فصل بررسی خواهیم کرد.



شکل۴. مثالهای ۱ و ۲. (الف) دانشجویی سورتمه‌ای بارشده را روی سطحی بدون اصطکاک هل می‌دهد. (ب) نمودار جسم آزادی که سورتمه را به شکل "ذره"، همراه با نیروی وارد بر آن، نشان می‌دهد. (ج) نمودار جسم آزاد دیگری که نیروی وارد بر جسم را، وقتی که دانشجو آن‌را در جهت مخالف هل می‌دهد، نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم که تنها نیروی افقی وارد بر سورتمه، نیروی F است که دانشجو وارد می‌کند. حالا می‌توانیم شتاب سورتمه را از قانون دوم نیوتون به‌دست بیاوریم:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{۱۳۰\text{N}}{۲۴۰\text{kg}} = ۰٫۵۴\text{m/s}^۲$$

چون شتاب ثابت است، می‌شود معادلهٔ ۲۰ فصل دوم $[v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)]$ را به‌کار برد و سرعت نهایی را به دست آورد. می‌گذاریم $v_۰ = ۰$ و $x - x_۰ = d$ و v را حساب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{۲ad} = \sqrt{(۲)(۰٫۵۴\text{m/s}^۲)(۲٫۳\text{m})} = ۱٫۶\text{m/s}$$

نیرو، شتاب، جابه‌جایی، و سرعت نهایی سورتمه، همه مثبت‌اند: یعنی جهت آنها، در شکل ۴ب به طرف راست است.

توجه کنید که دانشجو، برای اینکه بتواند همین نیروی ثابت را مدام اعمال کند، باید پیوسته تندتر و تندتر حرکت کند تا از سورتمهٔ شتابدار عقب نماند. سرانجام، سرعت سورتمه از بیشترین مقدار سرعت دویدن دانشجو بیشتر می‌شود، و از آن پس دانشجو دیگر نمی‌تواند به سورتمه نیرو وارد کند. از این پس (اگر اصطکاک نباشد) سورتمه با سرعت ثابت به لغزش خود ادامه خواهد داد.

مثال ۲. دانشجوی مثال ۱ می‌خواهد جهت سرعت سورتمه را در مدت ۴٫۵s برعکس کند. به این منظور چه نیروی ثابتی باید بر سورتمه وارد کند؟

حل: با استفاده از معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ $(v = v_۰ + at)$، شتاب (ثابت) جسم را پیدا می‌کنیم:

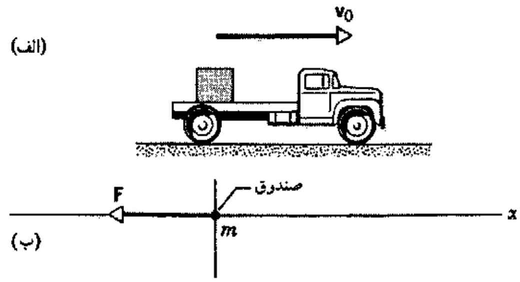
$$a = \frac{v - v_۰}{t} = \frac{(-۱٫۶\text{m/s}) - (۱٫۶\text{m/s})}{۴٫۵\text{s}} = -۰٫۷۱\text{m/s}^۲$$

اندازهٔ این شتاب، بزرگتر از اندازهٔ شتاب مثال ۱ $(۰٫۵۴\text{m/s}^۲)$ است؛ پس در این حالت دانشجو قاعدتاً باید سورتمه را شدیدتر هل بدهد. این نیروی (ثابت) F' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$F' = ma = (۲۴۰\text{kg})(-۰٫۷۱\text{m/s}^۲)$$
$$= -۱۷۰\text{N}(= -۳۸\text{lb})$$

علامت منفی نشان می‌دهد که دانشجو سورتمه را در جهت کاهش x، یعنی به طرف چپ در نمودار جسم آزاد شکل ۴ج، هل می‌دهد.

مثال ۳. صندوقی به جرم m برابر با ۳۶۰kg روی کفهٔ کامیونی که با سرعت $v_۰$ برابر با ۱۲۰km/h در حرکت است قرار دارد، و نسبت به کامیون ساکن است (شکل ۵الف). راننده ترمز می‌کند و طی ۱۷s سرعت را به ۶۲km/h می‌رساند. طی این مدت چه نیرویی



شکل۵. مثال ۳. (الف) صندوقی درکامیونی که سرعتش در حال کم شدن است. (ب) نمودار جسم آزاد صندوق.

(که فرض می‌کنیم ثابت است) بر صندوق وارد می‌شود؟ فرض کنید صندوق روی کفه نمی‌لغزد.

حل: ابتدا شتاب (ثابت) صندوق را پیدا می‌کنیم. به این منظور از معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ $(v = v_۰ + at)$ استفاده می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_۰}{t} = \frac{(۶۲\text{km/h}) - (۱۲۰\text{km/h})}{۱۷\text{s}}$$
$$= \left(-۳٫۴۱\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}\right)\left(\frac{۱\text{h}}{۳۶۰۰\text{s}}\right)\left(\frac{۱۰۰۰\text{m}}{۱\text{km}}\right) = -۰٫۹۵\text{m/s}^۲$$

جهت مثبت راستای افقی را به طرف راست گرفته‌ایم. پس بردار شتاب به طرف چپ است.

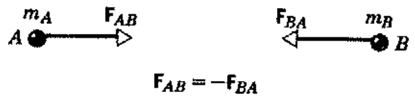
نیروی وارد بر صندوق از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید:

$$F = ma$$
$$= (۳۶۰\text{kg})(-۰٫۹۵\text{m/s}^۲) = -۳۴۰\text{N}$$

نیرو هم در همان جهت شتاب، یعنی به طرف چپ شکل ۵ب، است. این نیرو از طریق یک عامل خارجی به صندوق وارد می‌شود، مثلاً از طریق تسمه‌ها یا وسایل دیگری که برای محکم نگه‌داشتن صندوق به کار رفته است. اگر صندوق را نبسته باشند، نیرو باید از اصطکاک بین صندوق و کفه تأمین شود. اگر این اصطکاک برای تأمین ۳۴۰N نیرو کافی نباشد، صندوق روی کفه می‌لغزد و، از دید ناظر ساکن نسبت به زمین، سرعتش با آهنگ کمتری (ازکامیون) کند می‌شود.

۵ـ۶ قانون سوم نیوتون

نیروهای وارد بر یک جسم از اجسامی ناشی می‌شوند که محیط آن جسم را تشکیل می‌دهند. اگر نیروهای وارد بر جسم دیگری را که قبلاً جزء محیط جسم اول بوده است بررسی کنیم، خود جسم اول هم جزئی از محیط جسم دوم و منشأ بخشی از نیروهای وارد بر جسم دوم خواهد بود. بنابراین، هر تک نیرویی در واقع بخشی از برهم‌کنش متقابل میان دو جسم است. آزمایش نشان می‌دهد که اگر جسمی



شکل۶. قانون سوم نیوتون. جسم A نیروی $\mathbf{F}_{BA}$ را بر جسم B وارد می‌کند. در این حال، جسم B هم باید نیروی $\mathbf{F}_{AB}$ را بر جسم A وارد کند، و $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ است.

بر جسم دیگری نیرو وارد کند، همیشه جسم دوم هم نیرویی بر جسم اول وارد می‌کند. به‌علاوه، معلوم می‌شود که همواره اندازهٔ این دو نیرو یکسان و جهت آنها مخالف هم است. پس هیچ نیرویی به‌صورت تک نیروی مجزا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید که چنین نمی‌بود. دو جسم A و B را در نظر بگیرید که از محیط منزوی‌اند، و فرض کنید که A نیرویی بر B وارد می‌کند اما B نیرویی بر A وارد نمی‌کند. در این صورت نیروی کل وارد بر مجموعهٔ $A + B$ غیر صفر می‌شد و جسم مرکب می‌بایست شتاب می‌گرفت. اگرچنین چیزی در کار بود، چشمهٔ بی‌پایانی از انرژی می‌داشتیم که می‌توانست $A + B$ را، بی‌هیچ هزینه‌ای در فضا حرکت بدهد: قایقهای بادبانی می‌توانستند با دمیدن نفس مسافران به بادبانهایشان حرکت کنند، و سفینه‌های فضایی می‌توانستند با فشاری که فضانوردان بر دیواره‌هایشان وارد می‌کردند شتاب بگیرند. ناممکن بودن این چیزها نتیجه‌ای از قانون سوم نیوتون است.

به دلخواه، یکی از نیروهای برهم‌کنش بین دو جسم را نیروی "عمل" و دیگری را نیروی "عکس‌العمل" می‌نامیم. قانون سوم نیوتون، در شکلی که از قدیم رایج بوده است، چنین بیان می‌شود:

> هر عملی، عکس‌العملی به همان اندازه و در خلاف جهت عمل دارد.

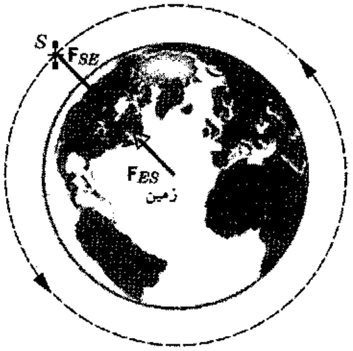
در روایت جدیدتری از قانون سوم، به نیروی متقابلی که دو جسم به هم وارد می‌کنند پرداخته می‌شود:

> وقتی دو جسم به یکدیگر نیرو وارد کنند، این دو نیرو هم‌اندازه و در جهتهای مخالف هم‌اند.

برای صورتبندی ریاضی این تعریف، فرض کنید ــ در شکل ۶ــ جسم A نیروی $\mathbf{F}_{BA}$ را به جسم B وارد می‌کند؛ آزمایش نشان می‌دهد که جسم B هم نیروی $\mathbf{F}_{AB}$ را به جسم A وارد می‌کند. (به‌ترتیبِ زیروندها توجه کنید؛ نیرو بر جسمی وارد می‌شود که با زیروند اول مشخص شده است، و این نیرو را جسمی وارد می‌کند که با زیروند دوم مشخص شده است.) این را می‌شود به شکل یک معادلهٔ برداری نوشت:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \tag{۳}$$

توجه کنید که عمل و عکس‌العمل همواره بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند؛ تفاوت زیروندهای اول در دو طرف معادله هم یادآور



شکل۷. ماهواره‌ای در مدار زمین. نیروهایی که در شکل می‌بینید یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند. توجه کنید که این دو نیرو بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند.

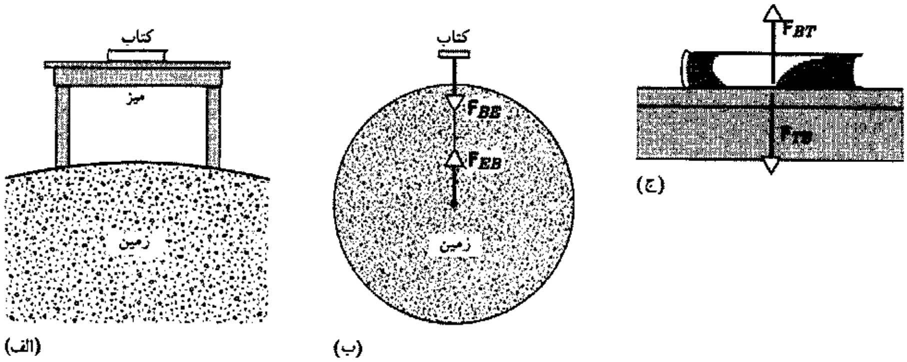
همین است. اگر این دو نیرو بر یک جسم اثر می‌کردند، نیروی خالص وارد بر آن جسم صفر می‌شود و حرکت شتابداری وجود نمی‌داشت.

هنگامی‌که چوب بیسبال به توپ می‌خورد، چوب نیرویی بر توپ وارد می‌کند. (عمل) و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر چوب وارد می‌کند. هنگامی‌که فوتبالیستی توپ را شوت می‌کند، پا نیرویی بر توپ وارد می‌کند (عمل)، و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر پا وارد می‌کند. هنگامی که دارید سعی می‌کنید اتومبیل وامانده‌ای را هل بدهید، می‌توانید حس کنید که اتومبیل هم شما را به عقب هل می‌دهد. در هر مورد، اگر هدف ما بررسی دینامیکِ یکی از دو جسم باشد ــ مثلاً فقط توپ بیسبال ــ تنها یکی از زوج نیروهای عمل‌ـعکس‌العمل را در نظر می‌گیریم؛ نیروی دیگر به جسم دیگری وارد می‌شود، و فقط وقتی به آن نیاز داریم که بخواهیم دینامیک آن جسم دیگر را بررسی کنیم.

در مثالهای زیر می‌بینیم که قانون سوم چگونه عمل می‌کند:

۱. ماهواره‌ای که در مدار زمین است. شکل ۷ ماهواره‌ای را نشان می‌دهد که به دور زمین می‌گردد. تنها نیروی وارد بر آن $\mathbf{F}_{SE}$ است، نیرویی که از (جاذبهٔ گرانشی) زمین بر ماهواره وارد می‌شود. عکس‌العمل متناظر با این نیرو کجاست؟ این نیرو $\mathbf{F}_{ES}$ است، نیروی ناشی از جاذبهٔ گرانشی ماهواره که بر زمین وارد می‌شود.

شاید فکر کنید که ماهوارهٔ به این کوچکی نمی‌تواند جاذبهٔ گرانشی قابل ملاحظه‌ای بر زمین وارد کند، اما این کار را می‌کند، درست همان‌طور که لازمهٔ قانون سوم نیوتون است. اگر فقط اندازهٔ دو نیرو را در نظر بگیریم، می‌دانیم که $\mathbf{F}_{ES} = \mathbf{F}_{SE}$. (به خاطر دارید که اندازهٔ هر برداری مثبت است.) نیروی $\mathbf{F}_{ES}$ باعث می‌شود که زمین شتاب بگیرد، اما چون جرم زمین خیلی زیاد است، این شتاب آنقدر کوچک است که آشکار نمی‌شود.



شکل۸. (الف) کتابی روی میز در حالت سکون است؛ خود میز هم نسبت به زمین ساکن است. (ب) کتاب و زمین نیروهای گرانشی برهم وارد می‌کنند، که یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند. (ج) میز و کتاب نیروهای تماسی عمل‌ـعکس‌العمل بر هم وارد می‌کنند.

۲. کتابی که روی میز، ساکن است. شکل ۸الف کتابی را نشان می‌دهد که روی میزی، به حالت سکون، قرار دارد. زمین کتاب را با نیروی $\mathbf{F}_{BE}$ به طرف پایین می‌کشد، اما کتاب شتاب نمی‌گیرد چون این نیرو با نیروی تماسی $\mathbf{F}_{BT}$ خنثی می‌شود. این نیرو با نیروی اول هم‌اندازه و در جهت مخالف آن است، و میز آن‌را بر کتاب وارد می‌کند.

$\mathbf{F}_{BE}$ و $\mathbf{F}_{BT}$ هم‌اندازه و در جهت مخالف هم‌اند، اما زوج عمل‌ـعکس‌العمل نیستند. چرا؟ چون هر دو بر یک جسم ــ به کتاب ــ وارد می‌شوند. این دو نیرو هم دیگر را خنثی می‌کنند، و به همین علت است که شتابِ کتاب صفر است.

هر یک از این دو نیرو البته باید در جایی یک نیروی عکس‌العمل متناظر هم داشته باشد. این عکس‌العملها کجا هستند؟ عکس‌العمل $\mathbf{F}_{BE}$ نیروی $\mathbf{F}_{EB}$ است، نیروی (گرانشی) وارد بر زمین از طرف کتاب. شکل ۸ب این زوج عمل‌ـعکس‌العمل را نشان می‌دهد.

شکل ۸ج عکس‌العمل $\mathbf{F}_{BT}$ را نشان می‌دهد، که نیروی $\mathbf{F}_{TB}$ است، یعنی نیروی تماسی‌ای که کتاب بر میز وارد می‌کند. زوجهای عمل‌ـعکس‌العمل این مسئله، که کتاب هم در آنها دخیل است، و اجسامی که این نیروها بر آنها اثر می‌کنند، عبارت‌اند از

$$\text{زوج اول:}\quad \mathbf{F}_{BE} = -\mathbf{F}_{EB} \quad \text{(کتاب و زمین)}$$

و

$$\text{زوج دوم:}\quad \mathbf{F}_{BT} = -\mathbf{F}_{TB} \quad \text{(کتاب و میز)}$$

۳. هل دادن یک ردیف صندلی. شکل ۹ کارگری (W) را نشان می‌دهد که دو صندوق را هل می‌دهد. هر یک از این دو صندوق روی صفحهٔ چرخداری است که می‌تواند با اصطکاک ناچیزی روی زمین حرکت کند. کارگر نیروی $\mathbf{F}_{1W}$ را بر صندوق ۱ وارد می‌کند، و صندوق ۱ هم با نیروی عکس‌العمل $\mathbf{F}_{W1}$ کارگر را به عقب می‌راند. صندوقِ ۱ صندوق ۲ را با نیروی $\mathbf{F}_{21}$ هل می‌دهد. (توجه کنید که کارگر مستقیماً بر صندوق ۲ نیرویی وارد نمی‌کند.) کارگر برای اینکه به جلو حرکت کند باید یک نیروی $\mathbf{F}_{GW}$ بر زمین وارد کند. $\mathbf{F}_{WG}$ کارگر را به جلو می‌راند. شکل، سه زوجِ عمل‌ـعکس‌العمل را نشان می‌دهد:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \qquad \text{(صندوق ۱ و صندوق ۲)}$$

$$\mathbf{F}_{1W} = -\mathbf{F}_{W1} \qquad \text{(کارگر و صندوق ۱)}$$

$$\mathbf{F}_{WG} = -\mathbf{F}_{GW} \qquad \text{(کارگر و زمین)}$$

شتاب جسم ۲، طبق قانون دوم نیوتون، از نیروی خالص وارد برآن به‌دست می‌آید:

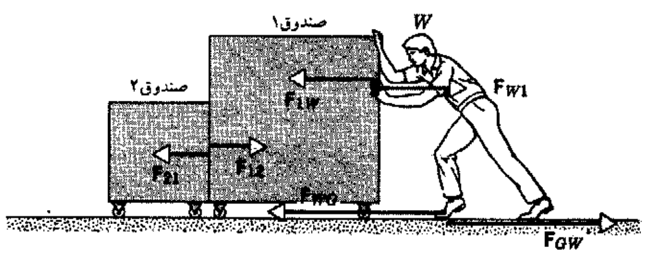
$$F_{21} = m_2 a_2$$

شتاب صندوق ۱ هم از نیروی خالص وارد بر این صندوق تعیین می‌شود:

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1$$

در رابطهٔ بالا جمع برداری دو نیرو را به‌صورت تفاضل اندازهٔ دو نیرو نوشته‌ایم، چون این دو در جهت مخالف هم بر صندوق ۱ اثر می‌کنند. اگر دو صندوق در تماس با هم بمانند، شتابشان باید یکی باشد. این شتاب را با a نشان می‌دهیم و دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a$$



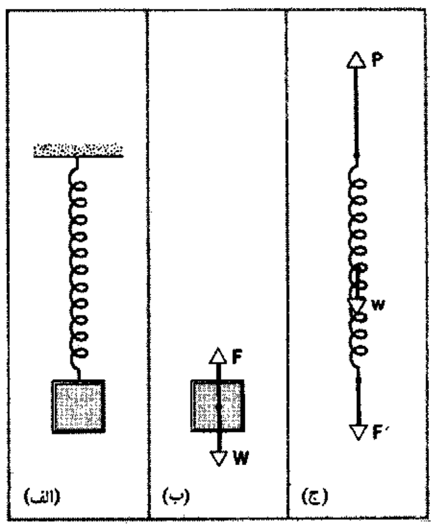
شکل۹. کارگری صندوق ۱ را هل می‌دهد، و صندوق ۱ هم صندوق ۲ را هل می‌دهد. صندوقها روی چرخ‌اند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند؛ یعنی اصطکاک صندوقها با زمین ناچیز است.

اگر مجموعهٔ صندوقهای ۱ و ۲ را به‌صورت یک جسم واحد به جرم $m_1 + m_2$ در نظر می‌گرفتیم هم همین معادله به‌دست می‌آمد. نیروی خارجی خالص وارد بر این جسم مجموع، F_{1W} است. در این صورت، دو نیروی تماسی در مرزِ میان صندوق ۱ و صندوق ۲ نیروهای داخلی‌اند و در معادلهٔ توصیف کنندهٔ جسم یکپارچه وارد نمی‌شوند. نیروهای اتمی‌ای که ذرات جسم را کنار هم نگه می‌دارند هم همین‌طور؛ هر نیروی داخلی‌ای در واقع یکی از اعضای زوجِ عمل‌ـعکس‌العملی است که بر اجزای مختلف (مثلاً دو اتم) اثر می‌کنند. این نیروها، وقتی که معادلات مربوط به اجزای مختلف را با هم جمع می‌کنیم، در مجموع صفر می‌شوند.

توجه کنید که در این مثال، کارگر عامل فعالی است که صندوقها را حرکت می‌دهد، اما آنچه این کار را ممکن می‌کند نیروی عکس‌العمل زمین است. اگر بین زمین و کفشهای کارگر اصطکاکی وجود نمی‌داشت، کارگر نمی‌توانست سیستم را به‌جلو براند.

۴. جسمی که از فنر آویزان است. شکل ۱۰الف جسمی را نشان می‌دهد که، به حالت ساکن، از فنری آویزان است. سر دیگر فنر به سقف متصل است. نیروهای وارد بر جسم، یکی وزن آن **W** (به طرف پایین) و دیگری نیروی **F** (به طرف بالا) است که از فنر وارد می‌شود. جسم تحت تأثیر این نیروها در حالت سکون است، اما این دو نیرو زوجِ عمل‌ـعکس‌العمل نیستند، چون‌که در این مورد هم بر یک جسم وارد می‌شوند. عکس‌العمل به نیروی **W** نیروی گرانشی‌ای است که جسم بر زمین وارد می‌کند، و در شکل نیامده است.

عکس‌العمل به **F** (نیرویی که از فنر بر جسم وارد می‌شود) نیرویی است که از جسم بر فنر وارد می‌شود. برای نشان دادن این نیرو، نیروهای وارد بر فنر را در شکل ۱۰ج نمایش داده‌ایم. این نیروها عبارت‌اند از



شکل ۱۰. (الف) جسمی که درحالت سکون از فنری آویزان است. (ب) نیروهای وارد بر جسم. (ج) نیروهای وارد بر فنر.

F′ (که همان عکس‌العمل به **F** است)، **w** (وزن فنر که معمولاً قابل چشمپوشی است)، و **P** (که از سقف به فنر وارد می‌شود). وقتی فنر در حالت سکون است، نیروی خالص وارد بر آن باید صفر شود: $\mathbf{P}+\mathbf{w}+\mathbf{F}'=0$.

عکس‌العمل به **P** نیرویی است که (مثلاً به اسم **P′**) که بر سقف اثر می‌کند. چون در این نمودارها سقف را به عنوان جسم مستقلی بررسی نکرده‌ایم، **P′** را هم نشان نداده‌ایم.

۵ـ۷ یکاهای نیرو

قانون دوم نیوتون ($F \doteq ma$) هم، مثل همهٔ معادلات دیگر، باید از نظر ابعادی سازگار باشد. بعد طرف راست $[m][a] = \mathrm{ML/T^2}$ است (از فصل ۱ به‌خاطر دارید که [ ] نماد بعد است)، بنابراین، بعد نیرو هم باید همین باشد.

$$[F] = \mathrm{ML/T^2}$$

منشأ نیرو هرچه باشد ــ گرانشی، الکتریکی، هسته‌ای، یا هر چیز دیگر ــ و معادلهٔ توصیف‌کنندهٔ آن هر قدرپیچیده هم باشد، بُعد آن همین است.

در سیستم یکاهای SI، جرم را برحسب kg وشتاب را برحسب $\mathrm{m/s^2}$ می‌سنجند. برای اینکه به جرم ۱kg شتاب $1\,\mathrm{m/s^2}$ بدهیم، باید $1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$ نیرو به آن وارد کنیم. این ترکیبِ نه چندان خوش دستِ یکاها را نیوتون (مخفف N) می‌نامند:

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$$

اگر جرم را برحسب kg و شتاب را برحسب $\mathrm{m/s^2}$ بسنجیم، قانون دوم نیوتون نیرو را برحسب N به‌دست می‌دهد.

دو سیستم رایج دیگر، سیستم cgs (سانتی‌مترـگرمـثانیه) و سیستم بریتانیایی‌اند. در سیستم cgs، جرم را برحسب گرم و شتاب را برحسب $\mathrm{cm/s^2}$ می‌سنجند. یکای نیرو در این سیستم دین (dyne) نامیده می‌شود که معادل است با $\mathrm{g\,cm/s^2}$. از آنجا که $1\mathrm{kg} = 10^3\mathrm{g}$ و $1\mathrm{m/s^2}$ یعنی $100\mathrm{cm/s^2}$ است، نتیجه می‌شود که $1\mathrm{N} = 10^5\mathrm{dyne}$. دین یکایی بسیار کوچک است؛ تقریباً برابر با وزن یک میلی‌مترمکعب آب. (یک نیوتون در حدود وزن نیم فنجان آب است.)

در سیستم بریتانیایی، نیرو را برحسب پاوند، و شتاب را برحسب $\mathrm{ft/s^2}$ می‌سنجند. در این سیستم، جرمی که دراثر نیروی 1lb شتاب $1\mathrm{ft/s^2}$ می‌گیرد، یک اسلاگ است.

سیستمهای پایهٔ دیگری هم هستند که گاه به گاه به‌کار می‌روند، اما این سه سیستم فعلاً از همه رایج‌ترند. این یکاهای رایج در جدول ۲ فهرست شده‌اند؛ جدول مفصلتری در پیوست ز آمده است.

۵ـ۸ وزن و جرم

وزن هر جسم در روی زمین نیروی گرانشی‌ای است که زمین بر آن جسم وارد می‌کند. وزن هم، مثل همهٔ نیروهای دیگر، کمیتی برداری

جدول ۲. یکاهای کمیتهای دخیل در قانون دوم نیوتون

سیستم	نیرو	جرم	شتاب
SI	نیوتون (N)	کیلوگرم (kg)	$m/s^۲$
cgs	دین	گرم (g)	$cm/s^۲$
بریتانیایی	پاوند	اسلاگ	$ft/s^۲$

است. جهت این بردار جهت نیروی گرانشی است، یعنی به‌طرف مرکز زمین. اندازهٔ نیرو برحسب یکاهای وزن، مثلاً پاوند یا نیوتون، بیان می‌شود.

بیایید فعلاً فرض کنیم که سطح زمین نمایندهٔ چارچوب مرجعی است که به قدر کافی لخت است. جسمی به جرم m را نزدیک سطح زمین رها می‌کنیم و می‌گذاریم که تحت اثر گرانش زمین آزادانه سقوط کند. تنها یک نیرو بر جسم اثر می‌کند، که وزن W جسم است. شتاب جسم همان شتاب سقوط آزاد (g) است. قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، را برای این جسم در حال سقوط آزاد به‌کار می‌بریم؛ $\mathbf{W}$ را به‌جای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{g}$ را به‌جای $\mathbf{a}$ می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود که $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$. وزن و شتاب سقوط، هر دو بردارهایی در جهت مرکز زمین‌اند. پس می‌شود نوشت

$$W = mg \qquad (۴)$$

که در آن W اندازهٔ بردار وزن و g اندازهٔ بردار شتاب است.

البته برای تعیین وزن اجسام، لازم نیست که آنها در حال سقوط آزاد باشند. اگر جسمی در نزدیکی سطح زمین در حالت سکون باشد، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، برای اینکه جسم در حالت سکون بماند باید نیرویی به اندازهٔ mg اما در جهت مخالف وزن جسم بر آن اثر کند. در شکل ۱۰، فنر این نیرو را تأمین می‌کند. نیرویی که فنر بر جسم وارد می‌کند. باید، از نظر عددی، برابر با mg باشد. در شکل ۸، میز نیروی رو به بالای $\mathbf{F}_{BT}$ بر کتاب وارد می‌کند و آن‌را در حالت تعادل نگه می‌دارد: اندازهٔ این نیرو با وزن کتاب (mg) برابر است.

چون $\mathbf{g}$ در نقاط مختلف یکی نیست، وزن یک جسم ($\mathbf{W}$) هم در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. مثلاً، وزن جسمی به جرم ۱٫۰۰kg در نقطه‌ای با $g = ۹٫۸۰\,m/s^۲$ برابر با ۹٫۸۰N است، اما همین جسم در جایی با $g = ۹٫۷۸m/s^۲$ وزنی برابر با ۹٫۷۸N دارد. اگر این دو وزن را با سنجش مقدار کشیدگی فنر تعیین کنیم، خواهیم دید که کشیدگیهای لازم برای متعادل کردن جسم ۱ کیلوگرمی در دو محل مختلف، کمی با هم تفاوت دارند. بنابراین، برخلاف جرم، که یک خاصیت ذاتی هر جسم است، وزن اجسام به موقعیت آنها نسبت به مرکز زمین بستگی دارد. چنانکه در بخش بعد می‌بینیم، ترازوهای فنری در نقاط مختلف روی زمین ممکن است مقادیر مختلفی نشان بدهند، اما ترازوهای وزنه‌ای (یا تعادلی) در تمام این نقاط یک مقدار نشان می‌دهند.

چون زمین به دور خودش می‌چرخد، سطح آن نمی‌تواند یک چارچوب مرجع لخت باشد. همهٔ چارچوبهای مرجع واقع برسطح زمین، در اثر چرخش، شتاب مرکزگرا دارند. شتاب سقوط آزادی که در این چارچوبِ نالخت می‌سنجیم، دست‌کم دو مؤلفه دارد: یکی ناشی از جاذبهٔ گرانشی زمین و دیگری ناشی از چرخش آن. اثرکوچکی که این چرخش برجا می‌گذارد آن است که شتاب سقوط آزاد از استوا (جایی‌که شتاب مرکزگرا بیشینه است) تا قطبها (جایی‌که شتاب مرکزگرا صفر است) در حدود ۰٫۳٪ تغییر کند. فعلاً از این اثر کوچک نالختی در وزن اجسام صرفنظر می‌کنیم، اما در فصل ۱۶ دوباره به آن برمی‌گردیم. در بخش ۶ـ۸ آثار دیگر نالختی چارچوبها بر اجسام را بررسی می‌کنیم.

در آن نواحی‌ای از فضا که آثار گرانشی وجود نداشته باشد وزن اجسام صفر می‌شود، اما خواصی که به جرم بستگی دارد، مثلاً مقاومت در برابر شتاب گرفتن تغییر نمی‌کند و مثل همان خواص در روی زمین است، در سفینه‌ای که فارغ از میدان گرانشی در فضا حرکت می‌کند، بلند کردن قطعهٔ بزرگی از سرب کار ساده‌ای است. ($W = ۰$)، اما اینجا هم اگر فضانوردی به این قطعه لگد بزند، شست پایش درد می‌گیرد ($m \neq ۰$).

برای شتاب دادن به اجسام در فضای تهی از گرانش همانقدر نیرو لازم است که در سطح بدون اصطکاکی روی زمین، چون‌که جرم اجسام در نقاط مختلف فرق نمی‌کند. اما نیروی لازم برای بالاکشیدن اجسام در مقابل جاذبهٔ گرانشی، در سطح زمین بیشتر است تا در نقطه‌ای که در فاصلهٔ زیادی از زمین واقع شده است، چون وزن اجسام در نقاط مختلف متفاوت است.

در هر نقطهٔ معین (که g مقدار مشخصی دارد)، جرم و وزن با هم متناسب‌اند. مثلاً گاهی می‌نویسند "۱kg" = "۲٫۲lb"، که در آن، " = " یعنی "معادل است با". این تنها یک تناظر عددی است نه یک معادلهٔ واقعی. (زیرا در معادلات، دو کمیت با ابعاد متفاوت نمی‌توانند با هم برابر باشند!) مسئله تا حدی شبیه به آن است که بگوییم ۱ پرتقال " = " x سیب: اگر صحبت بر سر قیمت باشد، x یک مقدار دارد، و اگر بر سر حجم آبی باشد که در هر کدام هست، مقدار دیگری که کاملاً با اولی متفاوت است.

رابطهٔ بین جرم و وزن، تنها به‌ازای یک مقدار معین g معتبر است، بنابراین باید این رابطه را با احتیاط به‌کار برد. در غیر این‌صورت ممکن است دچار سردرگمی یا حتی سردرد شوید. مثلاً، اگر روزگاری فضاپیمای خودتان را در ماه متوقف کردید و در یکی از رستورانهای مشهور آن، طبق عادت، یک همبرگر ربع پاوندی سفارش دادید، ممکن است ساندویچی به قطر تقریباً ۱ فوت نصیبتان شود (گرانش ماه در حدود یک ششم گرانش زمین است. در سطح ماه "۱kg" = "۰٫۳۸lb" است.) اگر همین سفارش را در سطح خورشید بدهید، همبرگری به دستتان می‌رسد که قطر آن به زحمت به ۱in می‌رسد، اما البته کاملاً مغز پخت شده است! (در خورشید، "۱kg" = "۶۲lb" است.) واضح

است که ما در واقع برحسب مقدار ماده (جرم) سفارش می‌دهیم، نه برحسب وزن. یک همبرگر ۱۰۰ گرمی (در حدود ۱/۴ پاوند روی زمین) در همه جای عالم دقیقاً یک اندازه دارد.

بی‌وزنی

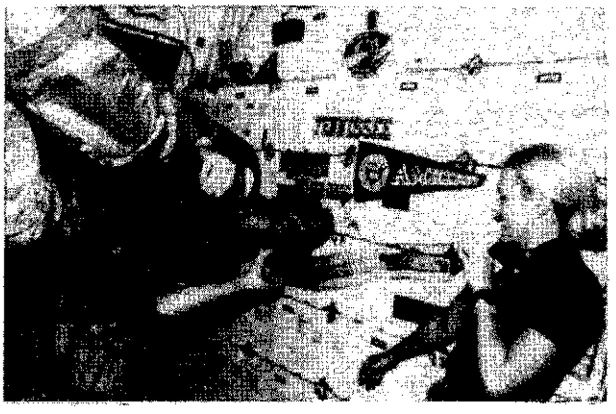
عکسهای فضانوردان در فضاپیماهای مدارگرد (مثلاً در شکل ۱۱)، آنها را در حالتی نشان می‌دهد که آزادانه شناورند؛ این حالت را معمولاً "بی‌وزنی" می‌نامند. اما بنابه تعریف ما از وزن، این فضانوردان به هیچ‌وجه بی‌وزن نیستند؛ در واقع، شاید وزن آنها فقط کمتر از ۱۰٪ نسبت به حالت عادی در سطح زمین کم شده باشد. این کاهش وزن هم به خاطر آن است که گرانش زمین با افزایش ارتفاع ضعیف‌تر می‌شود.

به دو دلیل است که گفته می‌شود این فضانوردها "بی‌وزن" اند:
۱. از دید ناظرهای خارجی، فضانوردان در حال سقوط آزاد به طرف مرکز زمین‌اند. اینکه ارتفاع آنها کم نمی‌شود تنها به این علت است که سرعت مماسی فضاپیما چنان تنظیم شده است که گرانش شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین کند. ۲. چون خود سفینه هم عیناً مثل سرنشینانش سقوط می‌کند، "کف" ای در کار نیست که با فضانوردها در تماس باشد و آنها را متعادل نگه دارد.

احساس یا ادراک روانی ما از وزن، مربوط است به نیرویی که کفِ زمین بر ما وارد می‌کند. اگر در آب شناور باشیم، احساس می‌کنیم سبکتریم یعنی احساسمان از وزن کمتر می‌شود (اما از جرم باز هم احساس کاملی داریم؛ مثلاً وقتی بخواهیم با شنا کردن در آب شتاب بگیریم). اگر سوار بر آسانسوری باشیم، وقتی آسانسور به طرف بالا شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان زیاد می‌شود، و وقتی به طرف پایین شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان کم می‌شود. این اثر، که آن‌را در مثال ۷ بررسی خواهیم کرد، نتیجهٔ افزایش یا کاهش نیروی رو به بالایی است که کفِ آسانسور اعمال می‌کند.

بی‌وزنی واقعی تنها در اعماق فضا، در نقاطی که خیلی دور از هر ستاره یا سیاره‌ای باشند، حاصل می‌شود. فضانوردان در این نواحی، در فضاپیمایی که با موتور خاموش در حرکت باشد، آزادانه شناور می‌شوند. اگر فضاپیما حول محوری بچرخد، فضانوردانی که عمود بر محور چرخش روی سطح چرخانی ایستاده باشند، احساس "وزنِ مصنوعی" می‌کنند، چون‌که این سطح باید فضانوردان را به بالا براند تا نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای آنها را تأمین کند. این نیروی رو به "بالا" (که از سطح به پای فضانوردان وارد می‌آید)، مثل وزن احساس می‌شود.

اگر از روی تخته پرش شیرجه برویم، یا از روی ترامپولین به هوا بپریم، در هوا در حالت سقوط آزاد خواهیم بود؛ سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند، و خودمان را "بی‌وزن" احساس می‌کنیم. همین‌طور اگر در اتاقکی در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط آزاد باشیم، و خود اتاقک هم در حال سقوطِ آزاد باشد، باز هم سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند و احساس "بی‌وزنی" خواهیم کرد. در چنین حالتی، آزادانه در اتاقک شناور خواهیم بود. سه نمونه از چنین وضعیتی عبارت‌اند از: ۱. فضاپیمایی در مدار زمین که در بالا بررسی‌اش کردیم، ۲. اتاقک آسانسوری که کابل آن بریده است و دارد سقوط می‌کند، و ۳. هواپیمایی که روی مسیر سهموی معینی حرکت می‌کند. فرض کنید هواپیمایی دارد اوج می‌گیرد و در لحظهٔ معینی در حال بالا رفتن با سرعت v_0 در جهتی است که با سطح افقی زاویهٔ ϕ_0 می‌سازد. اگر شما یکی از مسافران هواپیما باشید، و اگر خود هواپیما در آن لحظه ناگهان ناپدید شود، مسیر شما به شکل مسیرِ سهمی سقوط آزاد (معادلهٔ ۲۳ در فصل ۴) خواهد بود. اگر به جای اینکه هواپیما ناپدید شود، خلبان آن‌را در همین مسیر هدایت کند، هواپیما عملاً در حال سقوطِ آزاد خواهد بود و اجسام داخل آن در حالت "بی‌وزنی" شناور خواهند شد. در واقع از چنین سیستمی برای آموزش فضانوردان استفاده شده است، تا به حالت "بی‌وزنی" در فضاپیماهای مدارگرد عادت کنند. در هر یک از سه وضعیت بالا، وزن شما فقط به مقدار خیلی کمی نسبت به حالتی که روی زمین ایستاده‌اید تغییر می‌کند، اما درکار نبودن سطحی که به شما نیرو وارد کند موجب احساسِ "بی‌وزنی" می‌شود.



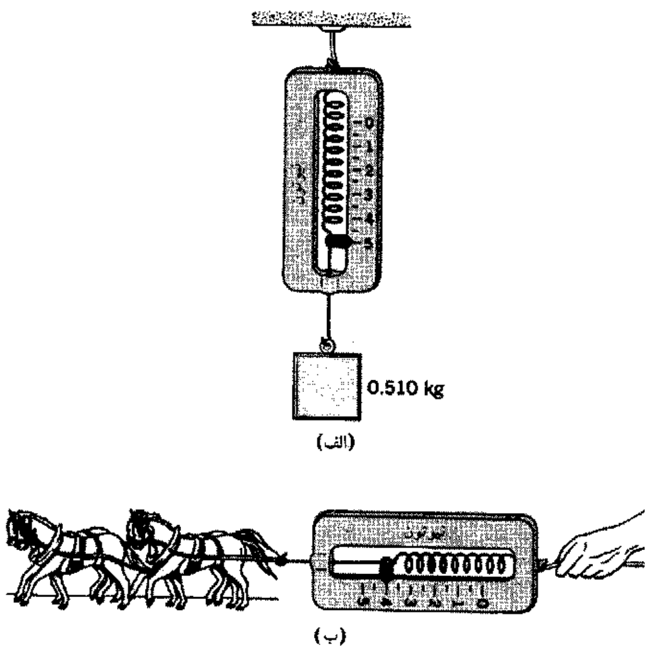
شکل۱۱. فضانوردهای شاتل فضایی در یک حالتِ سقوط آزادند، و این شناوری آنها طوری به‌نظر می‌رسد که انگار بی‌وزن‌اند.

۹ـ۵ اندازه‌گیری نیرو

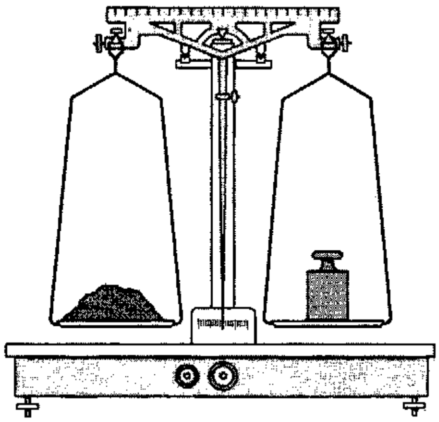
در بخش ۵ـ۳ نیرو را از طریق اندازه‌گیری شتابی که به یک جسمِ استاندارد در اثر کشیده شدن با فنر کسب می‌کند تعریف کردیم. این روش، که می‌توانیم آن‌را یک روشِ دینامیک برای سنجش نیرو بنامیم، اگرچه برای تعریف نیرو مناسب است، اما همیشه یک روش واقعاً عملی برای سنجش نیرو نیست. (سنجش مستقیم شتاب هم عموماً آسان نیست.) روش دیگر اندازه‌گیری نیرو مبتنی بر سنجش تغییر شکل یا تغییر اندازهٔ جسمی (مثلاً فنر) است که در حالتی که شتاب ندارد نیرو بر آن وارد می‌شود. این را می‌توانیم روشِ استاتیکِ سنجشِ نیروها بنامیم. اساس روش استاتیک این است که اگر جسمی تحت اثر چند نیرو

قرار بگیرد و شتاب آن صفر باشد، جمع برداری نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. و این البته همان قانون دوم نیوتون است. اگر فقط یک نیرو بر جسمی اثر کند به آن شتاب می‌دهد؛ برای اینکه این شتاب را صفر کنیم، می‌توانیم نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت نیروی اول به جسم وارد کنیم. در عمل کاری می‌کنیم که جسم در حالت سکون قرار بگیرد. اگر نیروی معینی را به عنوان نیروی یکه انتخاب کنیم، می‌توانیم نیرو را بسنجیم. مثلاً کشش زمین بر یک جسم استاندارد در یک نقطهٔ معین را می‌شود نیروی یکه اختیار کرد.

یکی از ابزارهای رایج سنجش نیرو ترازوی فنری است (شکل ۱۲). ترازوی فنری شامل یک فنر مارپیچی است که در یک سر آن شاخصی وجود دارد که روی مقیاس حرکت می‌کند. نیرویی که بر این ترازو وارد شود طول فنر را تغییر می‌دهد. اگر جسمی به وزن $۱٫۰۰\,\mathrm{N}$ ($m = ۰٫۱۰۲\,\mathrm{kg}$) در جایی که $g = ۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^2}$ است) را از این ترازو بیاویزیم، فنر کشیده می‌شود تا نیرویی به اندازهٔ وزن جسم و در جهت مخالفِ وزن به آن وارد کند. در این نقطه نشانه‌ای می‌گذاریم و آن را با "نیروی $۱٫۰۰\,\mathrm{N}$" برچسب می‌زنیم. حالا می‌توانیم همین کار را با وزنه‌های $۲٫۰۰\,\mathrm{N}$، $۳٫۰۰\,\mathrm{N}$ و غیره را تکرار کنیم و نشانه‌های متناظر با این نیروها را روی ترازو مشخص کنیم. به این ترتیب، فنر مدرج می‌شود. فرض بر این است که نیروهایی که فنر را تا نقطهٔ یکسانی بکشند، یکسان‌اند. حالا می‌شود این ترازوی مدرج را، به روش شکل ۱۲ب



شکل۱۲. (الف) برای مدرج کردن ترازوی فنری، در نقطه‌ای با g معین، جرم معلومی به آن می‌آویزیم و نیروی متناظر با آن جرم را علامتگذاری می‌کنیم. در شکل، جرم $۰٫۵۱۰\,\mathrm{kg}$، به‌ازای $g = ۹٫۸\,\mathrm{m/s^2}$، متناظر با نیروی $۵٫۰۰\,\mathrm{N}$ است. (ب) ترازوی مدرج را می‌توانیم برای سنجش نیروهای مجهول به‌کار ببریم. اساس کار همهٔ ترازوهای فنری ــ مثلاً ترازوهای ادارهٔ پست، ترازوهای یک کفه‌ای فروشگاهها، و ترازوهای حمام ــ همین است.



شکل۱۳. ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول، که جهتهای مختلف را از طریق توزین آنها با هم مقایسه می‌کند.

برای سنجش هر نیروی مجهولی (نه الزاماً کشش زمین بر اجسام) به کار برد.

استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول (شکل ۱۳)، روش استاتیک دیگری برای سنجش نیروهاست. رایج‌ترین کاربرد عملی این روش، مقایسهٔ وزنهای معلوم و مجهول است؛ وقتی بازوها متعادل می‌شوند یعنی وزن اجسامِ دو طرف یکی است. به‌علاوه، چون g برای هر دو بازوی ترازو یکی است، برابری وزنها به معنی برابری جرمهاست. بنابراین، ترازوی دوکفه‌ای با سنجش وزن اجسام در واقع برابری نسبی جرمهای آنها را تعیین می‌کند. (وزنه‌های معلوم این ترازوها را معمولاً با جرمشان برحسب گرم مشخص می‌کنند.) این سیستم در هر مقدار g، جز صفر، کار می‌کند؛ ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول را می‌شود، به همان خوبی زمین، برای مقایسهٔ جرم اجسام در کرهٔ ماه هم به‌کار برد. اما در فضای بدون گرانش، یا در بی‌وزنی نسبی در مدارهای زمین، چنین ترازویی به‌درد نمی‌خورد.

۵ـ۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون

هر مسئله‌ای که قرار است با استفاده از قوانین نیوتون حل شود رهیافت خاص خود را می‌طلبد، اما چند قاعدهٔ عمومی وجود دارد که برای راه‌اندازی حل همهٔ انواع این مسائل به‌کار می‌رود. در این بخش، این قواعد را معرفی می‌کنیم و کاربردشان را با چندین مثال نشان می‌دهیم. بهترین راه یادگیری این قواعد، مطالعهٔ مثالهاست.

مراحل اساسی در کاربرد قوانین نیوتون اینها هستند: ۱. جسمی را که می‌خواهید وضعیتش را تحلیل کنید خوب مشخص کنید. گاهی ممکن است دو یا چند جسم مورد نظر باشند؛ در این صورت معمولاً هر یک را باید جداگانه بررسی کرد. ۲. محیطی را که نیروها از آن به جسم وارد می‌شوند ــ سطوح، اشیای دیگر، زمین، فنر، ریسمان، و مانند آن ــ شناسایی کنید. ۳. یک چارچوب مرجع لخت (بدون شتاب) مناسب انتخاب کنید. ۴. یک دستگاه مختصات مناسب (در

چارچوب مرجعی که انتخاب کرده‌اید) مشخص کنید؛ مبدأ و جهت محورها را چنان انتخاب کنید که مسئله را تا حد ممکن ساده کند. اگر دقت کافی داشته باشید، می‌توانید برای هر جزئی از یک مسئله پیچیده دستگاه مختصات جداگانه‌ای به‌کار ببرید. ۵. نمودار جسم‌ـآزادی رسم کنید و در آن هر جسم را به شکل یک ذره، همراه با همهٔ نیروهای وارد بر آن، نمایش بدهید. ۶. حالا می‌توانید قانون دوم نیوتون را برای همهٔ مؤلفه‌های نیرو و شتاب به‌کار بگیرید.

در مثالهای زیر، فرضهایی می‌کنیم که مسئله را ساده می‌کنند، اما در مقابل بخشی از واقعیت فیزیکی را از دست می‌دهیم. اجسام را مثل ذره در نظر می‌گیریم، به این ترتیب همهٔ نیروهای وارد بر جسم مورد نظر در یک نقطه اثر می‌کنند. همهٔ حرکات را بدون اصطکاک فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که همهٔ ریسمانها بدون جرم‌اند (برای شتاب دادن به آنها نیرویی لازم نیست) و تغییر طول نمی‌دهند (یعنی کشیده نمی‌شوند؛ بنابراین، اجسامی که حرکت خطی دارند و با ریسمان کشیده به هم متصل‌اند، سرعت و شتاب یکسان دارند). قرقره‌ها بدون جرم‌اند (نیرویی برای چرخاندنشان لازم نیست) و محورشان هم بدون اصطکاک است. همهٔ اجسام صلب‌اند (زیر بار تغییر شکل نمی‌دهند و نیرو آناً در آنها منتقل می‌شود). مثالهای زیر، با وجود این ساده‌سازیها، دید خوبی از روشهای اساسی تحلیل دینامیکی به‌دست می‌دهند. بعداً در همین کتاب عوامل روشهای جدیدی را مطرح می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم وضعیتهای فیزیکی را به شکل واقعی‌تری تحلیل کنیم. مثلاً، در فصل ۶ نیروی اصطکاک را در تحلیل مسئله می‌گنجانیم، و در فصل ۱۲ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جرم قرقره و اصطکاک محور آن‌را وارد مسئله کرد. فعلاً از این آثار، که می‌دانیم مهم‌اند، چشم می‌پوشیم تا بهتر بتوانیم روی روشهای اساسی‌تر مورد استفاده در حل مسائل تأکید کنیم.

در مثال زیر، کشش T را معرفی می‌کنیم، نیرویی که ریسمان با آن اجسام متصل به خود را می‌کشد. در ریسمانهایی که ضخامتشان ناچیز است، جهت کشش همواره باید با خود ریسمان موازی باشد. (این گفته، چنانکه در فصل ۱۴ خواهیم دید، در مورد تیرهای کلفت و سخت درست نیست.) در ریسمانهایی که جرمشان ناچیز است، کشش به‌طور یکنواخت در طول ریسمان منتقل می‌شود، یعنی در دو سر ریسمان یکسان است.

از دید میکروسکوپیکی، هر جزء از ریسمان جزء مجاور خود را می‌کشد (و خودش هم، طبق قانون سوم نیوتون، توسط آن کشیده می‌شود). به این ترتیب است که نیروی کشش از یک سر ریسمان به جسمی که به سر دیگر آن متصل است منتقل می‌شود. بر جزء i ریسمان، یک کشش T در یک جهت وارد می‌شود که ناشی از جزء $i-1$ است، و یک کشش T برابر با قبلی و در خلاف جهت آن که ناشی از جزء $i+1$ است. اگر ریسمان را در نقطه‌ای دلبخواه ببریم و به محل برش یک نیروسنج فنری ببندیم (که به روش بخش ۵ـ۹ مدرج شده است)، نیروسنج مستقیماً کشش T را نشان خواهد داد.

مثال ۴. شکل ۱۴الف قطعه‌ای به جرم $m = ۱۵٫۰\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که با سه ریسمان نگه داشته شده است. کشش هر سه ریسمان را پیدا کنید.

حل: گرهٔ محل تلاقی سه ریسمان را به عنوان "جسم" در نظر می‌گیریم. شکل ۱۴ب نمودار جسم‌ـآزاد گره را نشان می‌دهد، که تحت اثر سه نیروی T_A، T_B، و T_C (کشش ریسمانها) در حالت سکون است. (فرض کرده‌ایم که گره هم، مثل خود ریسمانها، بی‌جرم است؛ بنابراین وزن آن وارد نمودار نمی‌شود.) محورهای x و y را مثل شکل ۱۴ب انتخاب می‌کنیم؛ به این ترتیب، می‌توانیم نیروها را به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنیم. مؤلفه‌های شتاب صفرند، بنابراین،

$$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } x:$$
$$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } y:$$

از شکل ۱۴ب دیده می‌شود که

$$T_{Ax} = -T_A \cos ۳۰^\circ = -۰٫۸۶۶T_A$$
$$T_{Ay} = T_A \sin ۳۰^\circ = ۰٫۵۰۰T_A$$
$$T_{Bx} = T_B \cos ۴۵^\circ = ۰٫۷۰۷T_B$$
$$T_{By} = T_B \sin ۴۵^\circ = ۰٫۷۰۷T_B$$

و

$$T_{Cx} = ۰$$
$$T_{Cy} = -T_C$$

در ادامه، نمودار جسم‌ـآزاد خود جرم m را بررسی می‌کنیم؛ شکل ۱۴ج. فقط مؤلفهٔ y وارد می‌شود، و باز هم شتاب صفر است:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = ۰$$

چون T_C فقط مؤلفهٔ y دارد، می‌شود نوشت

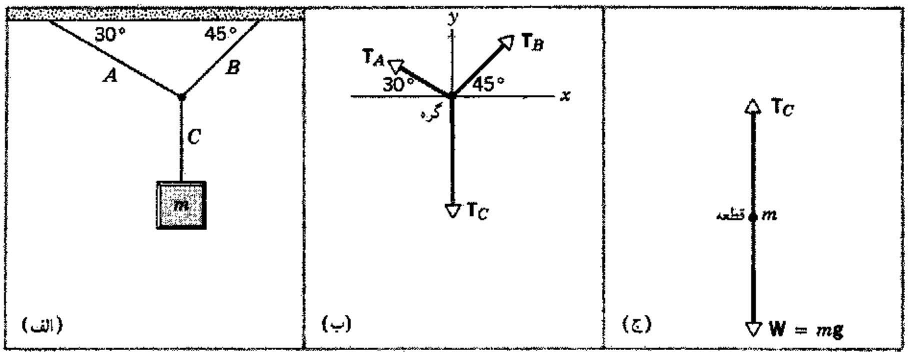
$$T_C = mg = (۱۵٫۰\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲) = ۱۴۷\text{N}$$

حالا می‌توانیم معادلات مربوط به مؤلفه‌های x و y نیروهای وارد بر گره را چنین بازنویسی کنیم:

$$-۰٫۸۶۶T_A + ۰٫۷۰۷T_B = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } x:$$
$$۰٫۵۰۰T_A + ۰٫۷۰۷T_B - T_C = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } y:$$

مقدار به‌دست آمده برای T_C را در جای T_C قرار می‌دهیم و دو معادله را حل می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$T_A = ۱۰۸\text{N}$$
$$T_B = ۱۳۲\text{N}$$



شکل۱۴. مثال ۴. (الف) قطعه‌ای از سه ریسمان A، B، و C آویزان است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد گره‌ای که سه ریسمان را به هم متصل می‌کند. (ج) نمودار جسم‌ـآزادِ قطعه.

این نتایج را امتحان کنید (درهمهٔ مسائل این کار را بکنید) تا ببینید که جمع برداری این سه نیرو واقعاً صفر است.

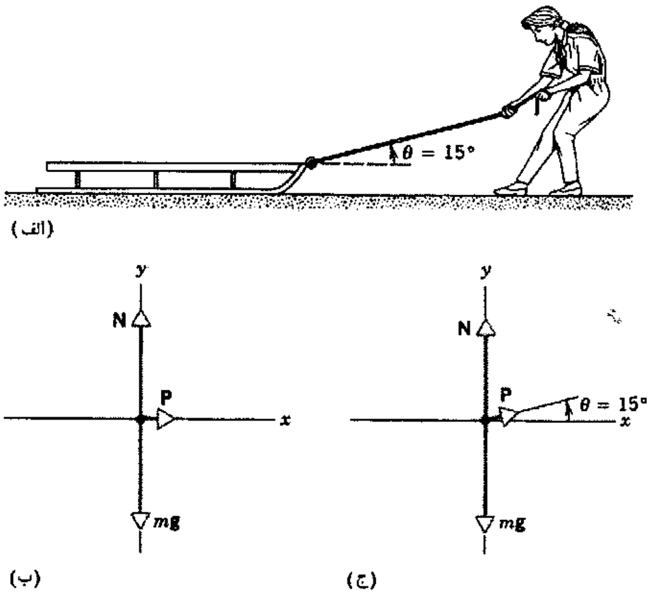
در مثال بعد، یک نیروی دیگر را معرفی می‌کنیم: نیروی عمود بر سطح N که سطوح بر اجسام وارد می‌کنند. کتاب روی میز شکل ۸ را در نظر بگیرید. زمین نیرویی رو به پایین به کتاب وارد می‌کند (وزن کتاب)، اما کتاب در حالت تعادل است، پس برایند نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. نیروی دیگری که بر کتاب وارد می‌شود نیروی رو به بالایی است که میز وارد می‌کند ($\mathbf{F}_{BT}$ در شکل ۸). در عمل، این نیرو است که کتاب را روی سطح میز نگه می‌دارد. اگر اصطکاک نباشد، سطوح فقط می‌توانند نیروی عمودی اعمال کنند، یعنی فقط نیروهایی که بر سطح عمود باشند. (توجه کنید که کتاب هم نیرویی رو به پایین بر میز وارد می‌کند.)

اگر دستمان را روی کتاب بگذاریم و آن‌را، با نیروی P، به پایین فشار بدهیم نیروی عمودی سطح میز برکتاب هم باید افزایش پیدا کند تا در این حالت برابر با مجموع وزن کتاب و نیروی P شود. اگر P به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به حالتی می‌رسیم که میز دیگر نمی‌تواند نیروی عمودی کافی به طرف بالا تأمین کند، و کتاب میز را می‌شکند.

کشش و نیروی عمود بر سطح نمونه‌هایی از نیروهای تماسی‌اند؛ نیرویی که جسمی که با جسم دیگر در تماس است، از طریق همین تماس، بر آن وارد می‌کند. منشأ این نیروها اتمهای اجسام‌اند، که هر یک نیرویی بر اتم مجاور وارد می‌کند. نیروهای تماسی تا وقتی تأمین می‌شوند که از نیروهای بین اتمی بزرگتر نشوند؛ در غیر این‌صورت پیوند بین اتمها می‌شکنند، و ریسمان پاره می‌شود یا سطح چند تکه می‌شود.

مثال ۵. سورتمه‌ای به جرم $m = \text{۷٫۵kg}$ روی سطحی بدون اصطکاک به‌وسیلهٔ ریسمانی کشیده می‌شود (شکل ۱۵). نیروی ثابت $P = \text{۲۱٫۰N}$ به ریسمان اعمال می‌شود. حرکت را در حالتی که (الف) ریسمان افقی است و (ب) ریسمان با سطح افقی زاویهٔ $\theta = ۱۵°$ می‌سازد، تحلیل کنید.

حل: (الف) نمودار جسم‌ـآزاد با ریسمان افقی در شکل ۱۵ب



شکل۱۵. مثال ۵. (الف) سورتمه‌ای روی سطح افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه در حالت $\theta = ۰°$. (ج) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه در حالت $\theta = ۱۵°$.

آمده است. سطح یک نیروی نیروی عمودی N بر سورتمه وارد می‌کند. نیروها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را به‌کار می‌بریم:

$$\text{مؤلفهٔ } x: \quad \sum F_x = P = ma_x$$

$$\text{مؤلفهٔ } y: \quad \sum F_y = N - mg = ma_y$$

اگر قرار باشد حرکت عمودی‌ای نداشته باشیم، سورتمه روی سطح می‌ماند و $a_y = ۰$ است، بنابراین

$$N = mg = (\text{۷٫۵kg})(\text{۹٫۸۰m/s}^{۲}) = \text{۷۴N}$$

شتاب افقی برابر است با

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{\text{۲۱٫۰N}}{\text{۷٫۵kg}} = \text{۲٫۸۰m/s}^{۲}$$

توجه کنید که اگر سطح واقعاً بدون اصطکاک باشد (چنانکه ما فرض کرده‌ایم)، شخص نمی‌تواند به مدت زیادی این نیرو را به سورتمه اعمال کند. سورتمه، بعد از ۳۰s حرکت با این شتاب، سرعتی برابر با ۸۴m/s یا ۱۸۸mi/h پیدا می‌کند.

(ب) اگر نیروی کشش افقی نباشد، نمودار جسم‌ـآزاد به‌صورت شکل ۱۵ج است، و معادلات مربوط به این حالت، به شکل زیرند:

$$\sum F_x = P \cos\theta = ma_x \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N + P \sin\theta - mg = ma_y \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

فعلاً فرض می‌کنیم که سورتمه روی سطح می‌ماند؛ یعنی $a_y = ۰$ است. پس

$$N = mg - P\sin\theta = ۷۴\text{N} - (۲۱{,}۰\text{N})(\sin ۱۵°)$$
$$= ۶۹\text{N}$$
$$a_x = \frac{P\cos\theta}{m} = \frac{(۲۱{,}۰\text{N})(\cos ۱۵°)}{۷{,}۵\text{kg}} = ۲{,}۷۰\,\text{m/s}^۲$$

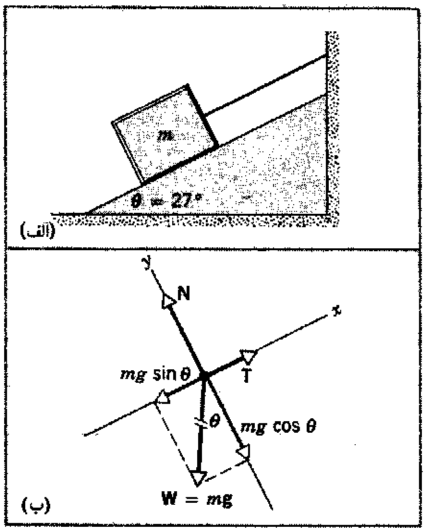
نیروی عمود بر سطح، همواره بر سطح تماس عمود است؛ با مختصاتی که در شکل ۱۵ب انتخاب کرده‌ایم، N باید مثبت باشد. اگر $P\sin\theta$ را زیاد کنیم N کم می‌شود و سرانجام، در نقطه‌ای، صفر می‌شود. در این نقطه سورتمه، تحت تأثیر مؤلفهٔ رو به بالای P، از سطح جدا می‌شود و باید حرکت عمودی آن‌را هم تحلیل کنیم. برای این مقادیر P و θ که ما به کار بردیم، سورتمه روی سطح باقی می‌ماند و $a_y = ۰$ است.

مثال ۶. قطعه‌ای به جرم $m = ۱۸{,}۰\text{kg}$ به کمک ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی که شیب °۲۷ دارد نگه داشته شده است (شکل ۱۶الف). (الف) کشش ریسمان و نیروی عمود بر سطحی را که سطح بر قطعه وارد می‌کند پیدا کنید. (ب) فرض کنید ریسمان پاره می‌شود و حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل: (الف) نمودار جسم‌ـآزاد قطعه در شکل ۱۶ب آمده است. نیروهای مؤثر بر قطعه عبارت‌اند از نیروی عمودی N، وزن $W = mg$ قطعه، و کشش T ریسمان. دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که محور x آن موازی با سطح، و محور y آن عمود بر سطح باشد. با این انتخاب، دو تا از نیروها (T و N) خودبه‌خود به مؤلفه‌هایشان تجزیه شده‌اند، و حرکتی که روی سطح انجام می‌شود هم یک‌بعدی است.

در حالت استاتیک شتابی وجود ندارد و مجموع نیروها باید صفر باشد. وزن به مؤلفه‌های x $(-mg\sin\theta)$ و y $(-mg\cos\theta)$ تجزیه می‌شود و معادلات نیرو چنین‌اند

$$\sum F_x = T - mg\sin\theta = ma_x = ۰ \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y = ۰ \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$



شکل۱۶. مثال ۶. (الف) جرم m به کمک ریسمانی روی سطح شیبداری، در حالت سکون نگه داشته شده است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد m. دقت کنید که دستگاه مختصات xy را مایل گرفته‌ایم تا محور x با سطح موازی باشد. وزن mg را به مؤلفه‌ها تجزیه کرده‌ایم.

این معادلات را امتحان کنید. آیا معقول‌اند؟ در حد $\theta = ۰°$ چه می‌شود؟ به نظر می‌رسد که کشش صفر می‌شود. آیا انتظار دارید که کشش برای قطعه‌ای که روی یک سطح افقی ساکن است صفر باشد؟ در حالت $\theta = ۰°$، نیروی عمود بر سطح چه می‌شود؟ آیا معقول است؟ T و N، در حد $\theta = ۹۰°$ چه می‌شوند؟ باید عادت کنید که، پیش از آغاز عملیات جبری برای حل مسئله، چنین پرسشهایی از خودتان بکنید. اگر اشتباهی شده باشد، حالا بهترین زمانِ یافتن و تصحیح آن است.

معادلات را حل می‌کنیم:

$$T = mg\sin\theta = (۱۸{,}۰\,\text{kg})(۹{,}۸۰\,\text{m/s}^۲)(\sin ۲۷°)$$
$$= ۸۰\text{N}$$
$$N = mg\cos\theta = (۱۸{,}۰\,\text{kg})(۹{,}۸۰\,\text{m/s}^۲)(\cos ۲۷°)$$
$$= ۱۵۷\text{N}$$

(ب) اگر ریسمان پاره شود، کشش از معادلات حذف می‌شود و قطعهٔ دیگر در حالت تعادل نخواهد بود. در این حالت قانون دوم نیوتون می‌گوید که:

$$\sum F_x = -mg\sin\theta = ma_x \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

بریدن ریسمان حرکت در راستای y را تغییر نمی‌دهد (قطعه از سطح به بالا نمی‌پرد!) پس اینجا هم $a_y = ۰$ است، و نیروی عمود بر سطح

هم برابر است با $mg\cos\theta$، یا ۱۵۷N. در جهت x خواهیم داشت

$$a_x = -g\sin\theta = -(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(\sin ۲۷°)$$
$$= -۴٫۴۵\,\mathrm{m/s^۲}$$

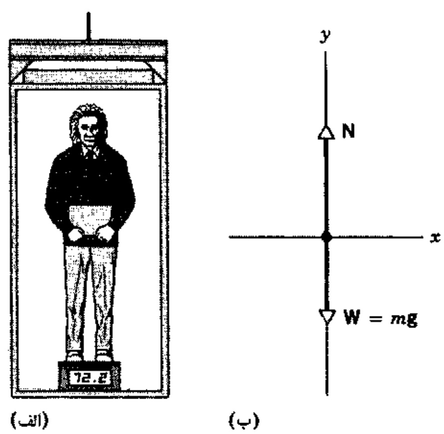
علامت منفی نشان می‌دهد که قطعه در جهت منفی x، یعنی به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند. حالتهای حدی $\theta = ۰°$ و $\theta = ۹۰°$ را بررسی کنید. آیا اینها با انتظارات شما سازگارند؟

مثال ۷. شخصی به جرم ۷۲٫۲kg، در آسانسوری روی یک ترازوی یک‌کفه‌ای ایستاده است شکل (۱۷الف). در حالتی که اتاقک آسانسور (الف) با سرعت ثابت پایین می‌آید و (ب) با شتاب $۳٫۲۰\,\mathrm{m/s^۲}$ بالا می‌رود، ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد؟

حل: ابتدا نتیجه‌ای عام برای مقادیر دلبخواه شتاب عمودی a به‌دست می‌آوریم. چارچوب مرجع لخت خود را خارج از آسانسور می‌گیریم (مثلاً چاه آسانسورِ ساختمان)، زیرا آسانسور شتابدار چارچوب مرجع لختی نیست. هم g و هم a را ناظر می‌سنجد که در این چارچوب خارجی است. شکل ۱۷ ب نمودار جسم‌ـآزاد شخص را نشان می‌دهد. نیروهای دخیل در مسئله عبارت‌اند از نیروی رو به پایین وزن و نیروی رو به بالای عمود بر سطح که ترازو اعمال می‌کند. نیروی عمود بر سطح از طرف ترازو بر شخص وارد می‌شود؛ ترازو نیروی رو به پایینی را نشان می‌دهد که از طرف شخص بر ترازو وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون، اندازهٔ این دو نیرو یکی است. بنابراین، اگر نیروی عمود بر سطح را تعیین کنیم، مقداری که ترازو نشان می‌دهد به‌دست می‌آید.

از نمودار جسم‌ـآزاد داریم

$$\sum F_y = N - mg = ma$$



شکل۱۷. مثال ۱۷. (الف) شخصی در آسانسور روی ترازو ایستاده است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد شخص. اندازهٔ نیروی عمود بر سطح N، که ترازو آن‌را وارد می‌کند، همان مقداری است که ترازو نشان می‌دهد. (ترازوهای تجارتی از این نوع را برحسب کیلوگرم مدرج می‌کنند نه نیوتون.)

یا

$$N = m(g+a)$$

اگر $a = ۰$ باشد، یعنی آسانسور ساکن باشد یا، مثل قسمت (الف)، با سرعت ثابت حرکت کند، نتیجه می‌شود که

$$N = mg = (۷۲٫۲\,\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲}) = ۷۰۸\,\mathrm{N}(= ۱۵۹\,\mathrm{lb})$$

اگر $a = ۳٫۲۰\,\mathrm{m/s^۲}$ باشد، قسمت (ب)، نتیجه می‌شود که

$$N = m(g+a) = (۷۲٫۲\,\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲} + ۳٫۲۰\,\mathrm{m/s^۲})$$
$$= ۹۳۹\,\mathrm{N}(= ۲۱۱\,\mathrm{lb})$$

مقداری که ترازو نشان می‌دهد، یعنی نیروی عمودی کف بر شخص، هنگامی که آسانسور شتاب رو به بالا دارد (a در دستگاه مختصاتی که تعریف کردیم مثبت است) بیشتر می‌شود، و هنگامی که آسانسور شتاب رو به پایین دارد کمتر می‌شود. در سقوط آزاد ($a = -g$) ترازو صفر را نشان می‌دهد (نیروی عمود بر سطح صفر است).

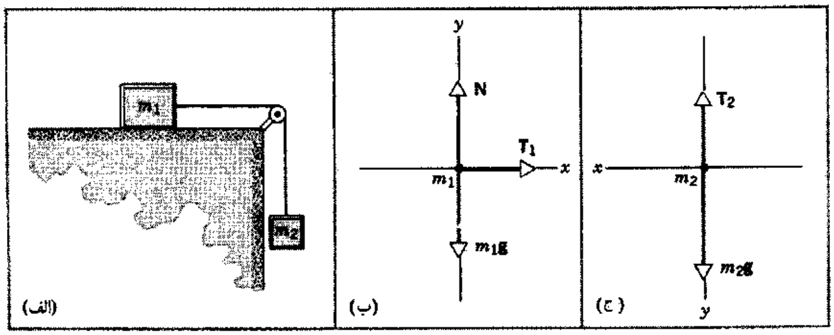
۵ـ۱۱ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

در اینجا چند کاربرد دیگر قوانین نیوتون را بررسی می‌کنیم. در این مثالها چند جسم وجود دارند که باید آنها را تک‌تک تحلیل کرد، اما این اجسام کاملاً مستقل از هم نیستند زیرا حرکت یک جسم مقید به حرکت جسمی دیگر است، مثل حالتی که دو جسم با ریسمانی به طول ثابت به هم بسته شده‌اند. این مثالها را مطالعه کنید، و توجه کنید که برای هر جسم دستگاه مختصات جداگانه‌ای انتخاب شده است.

مثال ۸. شکل ۱۸الف قطعه‌ای به جرم $m_۱$ را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بدون اصطکاکی واقع شده است. این قطعه توسط ریسمانی به جرم ناچیز که به قطعهٔ آویزانی به جرم $m_۲$ متصل است کشیده می‌شود. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد که جرم آن قابل چشمپوشی است و محور آن هم با اصطکاکی ناچیز می‌چرخد. کشش ریسمان و شتاب قطعات را پیدا کنید.

حل: در این مسئله دو جسم دخیل است؛ بر خلاف مسائل قبلی‌ای که در آنها و تنها یک جسم مورد نظر بود. شکلهای ۱۸ب و ۱۸ج نمودار جسم‌ـآزاد این دو جسم مجزا را نشان می‌دهند. لزومی ندارد که برای هر دو جسم دستگاه مختصات یکسانی به‌کار بریم، تا جایی‌که در هر زیرسیستم به‌طور سازگار عمل کنیم، مهم نیست که محورهای مختصات هر بخش را چگونه تعریف می‌کنیم.

نیروهای وارد بر قطعهٔ ۱ عبارت‌اند از نیروی عمودی N، وزن، و کشش ریسمان. چون انتظار داریم که قطعهٔ ۱ به‌طرف راست شتاب بگیرد، این جهت را جهت مثبت x می‌گیریم. همچنین انتظار داریم



شکل۱۸. مثال ۸. (الف) ریسمانی قطعهٔ m_1 را روی سطح افقی صافی می‌کشد. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد و به قطعهٔ m_2 متصل است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد قطعهٔ m_1. (ج) نمودار جسم‌ـآزاد قطعهٔ m_2.

که قطعهٔ ۱ روی سطح افقی باقی بماند؛ بنابراین، مؤلفهٔ y شتاب آن صفر است. به این ترتیب، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون به این شکل در می‌آیند:

$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x} \qquad \text{مؤلفهٔ } x:$$
$$\sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 \qquad \text{مؤلفهٔ } y:$$

برای قطعهٔ ۲، محور y را عمودی و رو به پایین می‌گیریم، یعنی در همان جهتی که انتظار داریم جهت شتابِ قطعهٔ ۲ باشد. برای این قطعه لازم نیست که مؤلفهٔ x را بررسی کنیم، و مؤلفهٔ y قانون دوم نیوتون نتیجه می‌دهد که

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}$$

ریسمان را بی‌جرم فرض کردیم، پس نیروی خالص وارد بر آن باید صفر باشد. کششهای T_1 و T_2 که از ریسمان بر قطعات وارد می‌شوند عکس‌العملهای T_1 و T_2 را دارند، که اندازه‌شان با دو نیروی اول برابر است، و نیروهایی هستند که قطعات بر ریسمان وارد می‌کنند. اگر ریسمان راست می‌بود، صفر شدن نیروی خالص وارد بر آن نتیجه می‌داد که $T_1 = T_2$. وجود قرقره ایده‌آل (بدون جرم و بدون اصطکاک) که جهت کشش ریسمان را عوض می‌کند هم تغییری در این نتیجه نمی‌دهد: اندازهٔ کشش در تمام طول ریسمان ثابت است. این کشش مشترک را با متغیر T نشان می‌دهیم.

اگر ریسمان تغییر طول هم نتواند بدهد (یعنی کشیده نشود)، هر حرکت قطعهٔ ۱ در جهت x دقیقاً متناظر با همان حرکت قطعهٔ ۲ در جهت y است. در نتیجه، شتاب دو قطعه یکی است. این شتاب مشترک را a می‌نامیم. حالا سه معادله داریم:

$$T = m_1 a$$
$$N = m_1 g$$

و

$$m_2 g - T = m_2 a$$

از حل معادلات اول و سوم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (5)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (6)$$

بررسی حالات حدی این نتایج مفیداست. اگر m_1 صفر شود چه می‌شود؟ انتظار داریم که ریسمان شل شود ($T = 0$) و m_2 سقوطِ آزاد می‌کند ($a = g$). معادلات هم، به درستی، همین را پیش‌بینی می‌کنند. اگر m_2 صفر باشد، نیروی افقی‌ای بر قطعهٔ ۱ وارد نمی‌شود و این قطعه شتاب نمی‌گیرد؛ اینجا هم، معادلات ما نتیجهٔ درست می‌دهند.

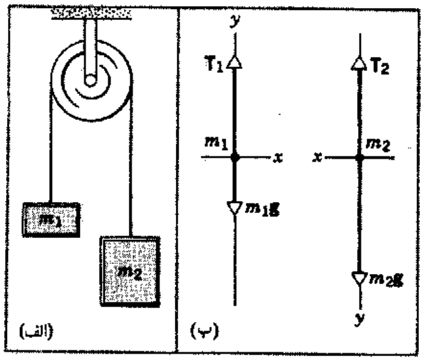
توجه کنید که، همان‌طور که انتظار می‌رود، $a < g$ است. همچنین دقت کنید که T با $m_2 g$ برابر نیست. تنها اگر قطعهٔ ۲ در حالت تعادل آویزان باشد ($a = 0$) است که $T = m_2 g$ می‌شود. اگر قطعهٔ ۲ به‌طرف پایین شتاب داشته باشد، $T < m_2 g$ می‌شود؛ اگر قطعه به طرف بالا شتاب داشته باشد، $T > m_2 g$ می‌شود.

آیا معادلات ۵ و ۶ در حد $g = 0$ هم نتیجهٔ درست می‌دهند؟

مثال ۹. دو جرم نامساوی را در نظر بگیرید که با ریسمانی که از روی قرقره‌ای می‌گذرد به هم متصل‌اند (شکل ۱۹). قرقره ایده‌آل است (جرم آن ناچیز است و با اصطکاک ناچیزی حول محورش می‌چرخد). این دستگاه را ماشین آتوود[1] هم می‌نامند. فرض کنید که m_2 بزرگتر از m_1 باشد. کشش ریسمان و شتاب جرمها را پیدا کنید.

حل: چون پیش‌بینی می‌کنیم که جرمها فقط شتاب عمودی داشته باشند، جهت مثبت y را، برای هر جرم، جهت حرکت آن

۱. جرج آتوود (۱۷۴۵ تا ۱۸۰۷) یک ریاضیدان انگلیسی بود که در سال ۱۷۸۴ این ابزار را برای نمایش قوانین حرکت شتابدار و سنجش g اختراع کرد. او با کوچک کردن اختلاف میان m_1 و m_2 می‌توانست آثار سقوط آزاد را "کند کند" و زمان حرکت وزنهٔ افتان را با یک ساعت آونگ‌دار اندازه بگیرد؛ ساعت آونگ‌دار دقیقترین ابزاری بود که آتوود در آن زمان برای سنجش بازه‌های زمانی در اختیار داشت.



شکل۱۹. مثال ۹. (الف) نمودار ماشین آتوود، شامل دو جرم آویزان که با ریسمانی به هم متصل‌اند که از روی قرقره‌ای می‌گذرد. (ب) نمایش جسم‌ـآزاد $m_۱$ و $m_۲$.

می‌گیریم. کافی است که مؤلفه‌های y را بررسی کنیم. شکل ۱۹ب نمودارهای جسم‌ـآزاد را نشان می‌دهد. معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\sum F_y = T_۱ - m_۱ g = m_۱ a_۱ \qquad \text{قطعهٔ ۱:}$$

$$\sum F_y = m_۲ g - T_۲ = m_۲ a_۲ \qquad \text{قطعهٔ ۲:}$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، به‌ترتیب، شتاب $m_۱$ و شتاب $m_۲$اند. در اینجا هم، مثل مثال قبلی، اگر ریسمان بی‌جرم باشد و کشیده نشود، و قرقره هم بی‌جرم و بدون اصطکاک باشد، $T_۱ = T_۲ = T$ و $a_۱ = a_۲ = a$ است. (فرض می‌کنیم که این قرقرهٔ ایده‌آل اندازهٔ کشش یا شتاب را در طول ریسمان تغییر نمی‌دهد؛ کارش فقط این است که جهت کشش و شتاب را عوض کند.) حالا اگر دو معادلهٔ بالا را، پس از جایگذاری مقادیر مشترک حل کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_۲ - m_۱}{m_۲ + m_۱} g \qquad (۷)$$

$$T = \frac{۲ m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} g \qquad (۸)$$

حالتهای حدی $m_۱ = ۰$، $m_۲ = ۰$، $g = ۰$، و $m_۱ = m_۲$ را بررسی کنید. توجه کنید که $m_۱ g < T < m_۲ g$، و مطمئن شوید که علت آن‌را درک کرده‌اید.

مثال ۱۰. دستگاه مکانیکی شکل ۲۰الف را در نظر بگیرید؛ $m_۱ = ۹{,}۵\text{kg}$، $m_۲ = ۲{,}۶\text{kg}$، و $\theta = ۳۴°$ است. سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم، حرکت را توصیف کنید.

حل: شکلهای ۲۰ب و ۲۰ج نمودارجسم‌ـآزاد قطعات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. دستگاههای مختصات را طبق شکل گرفته‌ایم تا برای هر جسم، یک محور مختصات موازی با شتابی باشد که برای جسم پیش‌بینی می‌کنیم. در اینجا هم، مثل مثالهای قبلی، انتظار داریم که مقدار کشش در همه جا یکسان باشد، و اندازهٔ شتاب حرکت عمودی $m_۲$ با حرکت $m_۱$ روی صفحه یکی باشد. فرض می‌کنیم که $m_۱$ در جهت مثبت x حرکت می‌کند (اگر فرضمان غلط باشد، a منفی در می‌آید). معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای $m_۱$ عبارت است از

$$\sum F_x = T - m_۱ g \sin\theta = m_۱ a \qquad \text{مؤلفهٔ } x\text{:}$$

$$\sum F_y = N - m_۱ g \cos\theta = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } y\text{:}$$

و برای $m_۲$ به‌صورت زیر است

$$\sum F_y = m_۲ g - T = m_۲ a$$

از حل همزمان این معادلات نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_۲ - m_۱ \sin\theta}{m_۱ + m_۲} g \qquad (۹)$$

و

$$T = \frac{m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} g (۱ + \sin\theta) \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که این نتایج، به‌ازای $\theta = ۰$ (یعنی حرکت قطعهٔ ۱ افقی است) به همان نتایج مثال ۸ تبدیل می‌شوند و به‌ازای $\theta = ۹۰°$ (یعنی حرکت قطعهٔ ۲ عمودی است) به نتایج مثال ۹.

با جانشانی مقادیر عددی معلوم می‌شود که

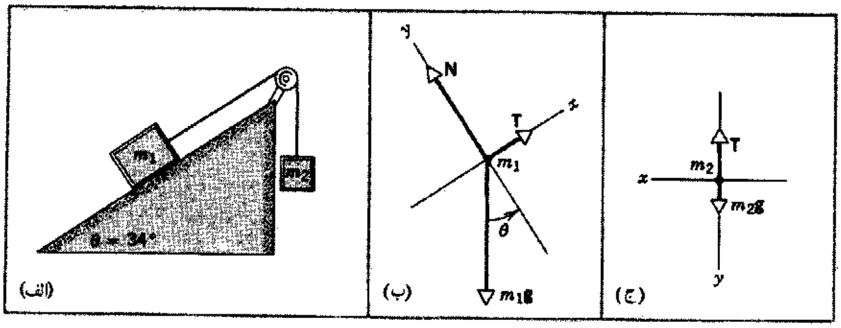
$$a = \frac{۲{,}۶\text{kg} - (۹{,}۵\text{kg})(\sin ۳۴°)}{۹{,}۵\text{kg} + ۲{,}۶\text{kg}} (۹{,}۸۰\,\text{m/s}^۲) = -۲{,}۲\,\text{m/s}^۲$$

شتاب منفی درآمده است، که نشان می‌دهد حدس اولیهٔ ما دربارهٔ جهت حرکت غلط بوده است. قطعهٔ ۱ به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، و قطعهٔ ۲ به‌بالا می‌رود. چون معادلات دینامیکی شامل نیروهایی نبودند که به جهت حرکت بستگی داشته باشند، این حدس اولیهٔ غلط اثری بر معادلات ندارد و می‌شود پذیرفت که مقدار حاصل برای a درست است. در حالت کلی، اگر نیروهای اصطکاکی را هم، که در خلاف جهت حرکت‌اند، در نظر بگیریم، دیگر چنین نخواهد بود.

کشش ریسمان برابر است با

$$T = \frac{(۹{,}۵\text{kg})(۲{,}۶\text{kg})}{۹{,}۵\text{kg} + ۲{,}۶\text{kg}} (۹{,}۸۰\,\text{m/s}^۲)(۱ + \sin ۳۴°) = ۳۱\text{N}$$

این مقدار بیشتر از وزن $m_۲$ $(m_۲ g = ۲۶\text{N})$ است، و این با روبه بالا بودن شتاب $m_۲$ سازگار است.

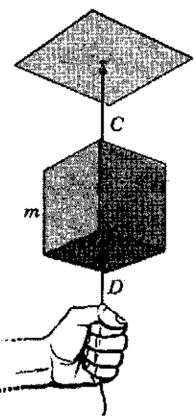


شکل ۲۰. مثال ۱۰. (الف) قطعهٔ m_1 روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد. قطعهٔ m_2 از ریسمانی، که به m_1 متصل است، آویزان است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد m_1. (ج) نمودار جسم‌ـآزاد m_2.

پرسشها

۱. چرا زمانی که اتوبوس ترمز کند تا بایستد به جلو می‌افتید، و زمانی که از حالت سکون شتاب می‌گیرد به عقب؟ مسافران سرپایی قطار زیرزمینی اغلب به‌این نتیجه می‌رسند که بهتر است موقع شروع حرکت یا شروع توقف، به طرف پنجره‌های جانبی بایستند، و موقع حرکت با سرعت ثابت، به طرف جلو یا عقب. چرا؟

۲. قطعه‌ای به جرم m با ریسمان C از سقف آویزان است، و ریسمان مشابه D هم به ته آن متصل است (شکل ۲۱). اگر D را به سرعت بکشید، خود آن پاره می‌شود، اما اگر D را به آهستگی بکشید، C پاره می‌شود. چرا؟



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. اغلب می‌گویند، جرم هر جسم "مقدار مادهٔ" موجود در آن است. این عبارت را نقد کنید.

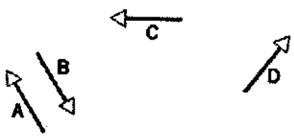
۴. اگر نیرو، طول، و زمان را کمیتهای بنیادی بگیریم، بعد جرم چه خواهد بود؟

۵. آیا می‌شود قانون اول نیوتون را فقط حالت خاص $g = 0$ قانون دوم دانست؟ اگر چنین باشد، آیا واقعاً نیازی به قانون اول هست؛ توضیح بدهید.

۶. آیا رابطه‌ای بین نیروی وارد بر یک جسم و جهت حرکت آن جسم وجود دارد؟ اگر دارد چه رابطه‌ای؟

۷. فرض کنید جسمی تحت تأثیر دو نیرو شتاب گرفته است. آیا می‌شود نتیجه گرفت که (الف) اندازهٔ سرعت جسم نمی‌تواند ثابت باشد؛ (ب) سرعت هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر شود؛ (ج) مجموع دو نیرو نمی‌تواند صفر باشد؛ (د) دو نیرو باید همراستا باشند؟

۸. شکل ۲۲ چهار نیرو با اندازهٔ یکسان را نشان می‌دهد. چه ترکیبی از سه تا از این نیروها، اگر بر جسمی اثر کنند، آن‌را در حالت تعادل نگه می‌دارد؟



شکل ۲۲. پرسش ۸

۹. اسبی را وادار می‌کنند که ارابه‌ای را بکشد. اسب از این کار امتناع می‌کند و در دفاع از خودش قانون سوم نیوتون را دلیل می‌آورد: کشش اسب بر ارابه هم‌اندازه و در خلاف جهت کشش ارابه بر اسب است. "حالا اگر من هیچ‌گاه نتوانم نیرویی بیش از آنچه ارابه بر من وارد می‌کند بر آن وارد کنم، چطور می‌توانم ارابه را به حرکت در بیاورم؟" لطفاً پاسخ این اسب را بدهید.

۱۰. کدام‌یک از این زوجها زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند؟ (الف) زمین آجری را جذب می‌کند؛ آجر زمین را جذب می‌کند. (ب) یک هواپیمای ملخی هوا را به طرف دم خود می‌راند؛ هوا هواپیما را به جلو می‌راند. (ج) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد و آن‌را به حرکت در می‌آورد؛ گاری اسب را به عقب می‌کشد. (د) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن‌را حرکت نمی‌دهد؛ گاری اسب را به عقب می‌کشد. (ه) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن‌را حرکت نمی‌دهد؛ زمین نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت بر گاری وارد می‌کند. (و) زمین گاری را به پایین می‌کشد؛ سطح زمین گاری را، با نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت، به بالا می‌راند.

۱۱. عبارت زیر درست است؛ آن‌را توضیح بدهید. در مسابقهٔ طناب‌کشی، تیمی برنده می‌شود که زمین را (در راستای افقی) بیشتر هل بدهد.

۱۲. دو نفر می‌خواهند طنابی را پاره کنند، ابتدا هرکدام یک سر طناب را می‌گیرند و به طرف خودشان می‌کشند، اما موفق نمی‌شوند. بعد یک

سر طناب را به دیوار می‌بندند و سر دیگر را با هم می‌کشند. آیا این روش بهتر از روش اول است؟ توضیح بدهید.

۱۳. جرم شما برحسب اسلاگ چقدر است؟ وزن شما برحسب نیوتون چقدر است؟

۱۴. شخصی موقع پرکردن فرم مشخصات خود، در جلوی کلمهٔ وزن می‌نویسد ۷۸kg، اما وزن نیرو است و کیلوگرم یکای جرم. وقتی یکاهای جرم را برای بیان وزن به‌کار می‌بریم، منظورمان چیست؟ چرا وزن را برحسب نیوتون بیان نمی‌کنیم؟ وزن این شخص چند نیوتون است؟ چند پاوند است؟

۱۵. عبارتهای زیر دربارهٔ جرم و وزن از ورقه‌های امتحانی گرفته شده‌اند. نظرتان دربارهٔ آنها چیست؟ (الف) جرم و وزن کمیت فیزیکی واحدی هستند که برحسب یکاهای متفاوتی بیان شده‌اند. (ب) جرم خاصیت یک جسم به تنهایی است، اما وزن ناشی از برهم‌کنش دو جسم است. (ج) وزن اجسام متناسب با جرمشان است. (د) با تغییر وزن اجسام در نقاط مختلف، جرم آنها هم تغییر می‌کند.

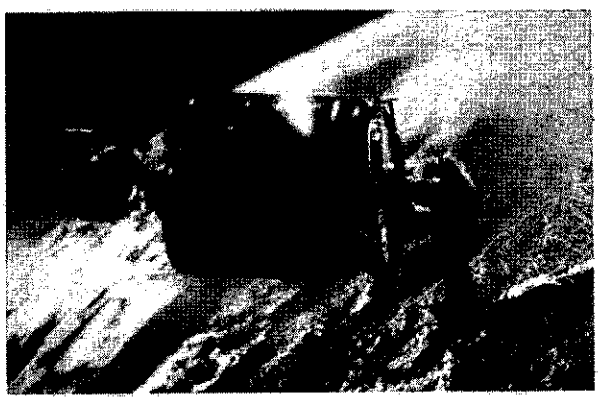
۱۶. یک نیروی افقی بر جسمی اثر می‌کند که می‌تواند آزادانه حرکت کند. آیا این نیرو، اگر کمتر از وزن جسم باشد، می‌تواند به جسم شتاب بدهد؟

۱۷. چرا شتاب اجسامی که سقوطِ آزاد می‌کنند مستقل از وزنشان است؟

۱۸. برای تجربه کردن بی‌وزنی، حتی اگر به مدت خیلی کوتاهی باشد، چه راههایی به نظرتان می‌رسد؟

۱۹. در چه اوضاع و احوالی وزن شما صفر می‌شود؟ آیا پاسخ به چارچوب مرجع بستگی دارد؟

۲۰. "بازوی مکانیکی" فضاپیمای شاتل، در حالتی که ۱۲m دراز شده باشد، می‌تواند ماهواره‌ای به جرم ۲۲۰۰kg را جابه‌جا کند (شکل ۲۳). اما روی زمین، همین سیستم "دستکاری از دور" وزن خودش را هم نمی‌تواند تحمل کند. در شرایط "بی‌وزنی" شاتل در مدار، اصولاً چرا لازم است که RMS بتواند نیرو وارد کند؟



شکل ۲۳. پرسشهای ۲۰ و ۲۶

۲۱. در کتابچهٔ راهنمای اتومبیلی آمده است که کمربند ایمنی را باید چنان تنظیم کرد که "کیپ بسته شود"، و تکیه‌گاه سر در صندلیهای جلو نباید درست پشت گردن قرار بگیرد بلکه باید آنها را چنان تنظیم کرد که سطح بالایشان با بالای گوشها هم‌تراز شود. قوانین نیوتون چگونه این توصیه‌های ایمنی را توجیه می‌کنند؟

۲۲. پیکانی را از کمان رها می‌کنید و مسیر سهموی آن‌را در هوا، تا نقطهٔ برخورد به‌زمین تعقیب می‌کنید. می‌بینید که پیکان در حین پرواز طوری می‌پیچد که همواره بر مسیر پروازش مماس باشد. چه چیزی باعثِ این می‌شود؟

۲۳. در یک مسابقهٔ طناب‌کشی، سه مرد در نقطهٔ A طناب را به طرف چپ و سه مرد در نقطهٔ B طناب را به طرف راست می‌کشند. اندازهٔ دو نیرو با هم برابر است. یک وزنهٔ ۵lb از وسط طناب به‌طور عمودی آویزان است. (الف) آیا اینها می‌توانند طناب AB را افقی نگه دارند؟ (ب) اگرنمی‌توانند توضیح بدهید چرا. اگر می‌توانند اندازهٔ نیروهای لازم در نقاط A و B را تعیین کنید.

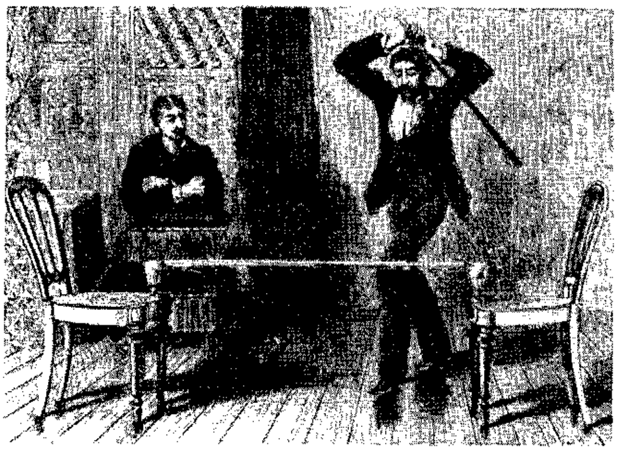
۲۴. پرنده‌ای از روی یک سیم تلگراف کشیده شده بلند می‌شود. آیا این کار کشش سیم را تغییر می‌دهد؟ اگر تغییر می‌دهد، آیا مقدار این تغییر کمتر از وزن پرنده است، با آن برابر است، یا از آن بیشتر است؟

۲۵. ریسمان بی‌جرمی از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته است. میمونی یک سر طناب را گرفته است، و آینه‌ای هم‌وزن میمون، به سر دیگر طناب، در همان ارتفاع میمون، بسته شده است. آیا میمون می‌تواند (الف) با بالارفتن از طناب، (ب) با پایین آمدن از طناب، یا (ج) با رها کردن طناب، از تماشای تصویر خودش معاف شود؟

۲۶. در نوامبر ۱۹۸۴ جوآلن و دیل گاردنر (فضانوردان امریکایی) یک ماهوارهٔ مخابراتی وستار-۶ را، که در مدار نادرستی افتاده بود، گرفتند و در محفظهٔ بار فضاپیمای (دیسکاوری) (شکل ۲۳) قرار دادند. جو آلن در توصیف این تجربه دربارهٔ ماهواره گفته بود "سنگین نیست؛ جرم زیادی دارد." منظورش چه بوده است؟

۲۷. فرض کنید مسافر سفینه‌ای هستید که در مدار قرار گرفته است. درپوش یک ظرف دراز و باریک را که تنها یک زیتون دارد برمی‌دارید. چند راه برای درآوردن زیتون از ظرف، چه راههایی، که در همهٔ آنها از اینرسی زیتون یا اینرسی ظرف استفاده شده باشد، پیشنهاد می‌کنید؟

۲۸. دسته جارویی را در نظر بگیرید که به هر سر آن یک میخ فروکرده‌اند. این چوب را از میخهایش روی دو گیلاس پر گذاشته‌اند (شکل ۲۴). آزمایشگر با میلهٔ سفتی، ضربهٔ سریع و محکمی به دسته جارو می‌زند. دسته جارو می‌شکند و به زمین می‌افتد، اما گیلاسها سالم می‌مانند و مایع درون آنها هم نمی‌ریزد. این شیرین‌کاری جالب، در اواخر قرن گذشته خیلی رواج داشت. فیزیکِ این قضیه چیست؟ (اگر خواستید امتحان کنید، اول با قوطیهای خالی نوشابه تمرین کنید. می‌توانید از مدرستان خواهش کنید که با این شیرین‌کاری، یک نمایش درسی در کلاس ترتیب بدهد!)



شکل ۲۴. پرسش ۲۸

۲۹. آسانسوری متکی به یک تک کابل است و وزنهٔ مقابل هم ندارد. مسافران در طبقهٔ هم‌کف سوار می‌شوند، به طبقهٔ آخر می‌روند، و پیاده می‌شوند و آنجا مسافران جدیدی سوار می‌شوند و به طبقهٔ همکف می‌آیند. طی این رفت و برگشت، چه موقع کشش کابل برابر با وزن آسانسور به‌علاوهٔ وزن مسافران است؟ چه موقع از آن بیشتر است؟ چه موقع از آن کمتر است؟

۳۰. در عرشهٔ فضاپیمای دیسکاوری در مدار هستید و شخصی دو توپ چوبی به ظاهر کاملاً یکسان به‌شما می‌دهد. یکی از این توپها یک هستهٔ سربی دارد و دیگری ندارد چند راه برای تشخیص توپها از هم پیشنهاد می‌کنید.

۳۱. روی سکوی یک ترازوی فنری بایستید و وزن خودتان را بخوانید. بعد روی آن یک قدم بردارید. خواهید دید که در ابتدای گام، ترازو وزن کمتری نشان می‌دهد و در پایان گام وزن بیشتری، چرا؟

۳۲. آیا می‌توانید خودتان را با ترازویی وزن کنید که حداکثر وزنی که می‌تواند نشان بدهد کمتر از وزن شماست؟ اگر می‌توانید، چگونه؟

۳۳. وزنه‌ای با ریسمانی از سقف آسانسوری آویزان است. در کدام‌یک از حالات زیر، ریسمان بیشترین کشش را دارد؟ در کدام‌یک کمترین کشش را؟ (الف) آسانسور در حال سکون است؛ (ب) آسانسور با سرعت ثابت بالا می‌رود؛ (ج) آسانسوری با سرعت کم‌شونده پایین می‌آید؛ (د) آسانسور با سرعت زیادشونده پایین می‌آید.

۳۴. شخصی در آسانسوری روی یک ترازوی فنری ایستاده است. در کدام‌یک از حالات زیر، ترازو کمترین وزن را نشان می‌دهد؟ در کدام‌یک بیشترین وزن را؟ (الف) آسانسور ساکن است؛ (ب) آسانسور کابلش بریده است و دارد سقوط آزاد می‌کند؛ (ج) آسانسور به طرف بالا شتاب دارد؛ (د) آسانسور به طرف پایین شتاب دارد؛ (هـ) آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۳۵. دو جرم نامساوی که توسط نخی از دو طرف قرقره‌ای آویزان‌اند، در آسانسوری در حالت تعادل‌اند؛ یعنی، قرقره تمایلی به چرخیدن ندارد. کسی که فیزیک بلد باشد چه نتیجه‌ای از این مشاهده می‌گیرد؟

۳۶. شکل ۲۵ دنباله‌دار کوهوتک را نشان می‌دهد که در سال ۱۹۷۳ ظاهر شد. این دنباله‌دار هم، مثل همهٔ دنباله‌دارهای دیگر، در اثر جاذبهٔ گرانشی خورشید به دور خورشید می‌گردد. هستهٔ دنباله‌دار، تودهٔ نسبتاً پرجرمی است که در نقطهٔ P شکل قرار دارد. دم دنباله‌دار در اثر بادهای خورشیدی تشکیل می‌شود. باد خورشیدی انبوهی از ذرات باردار است که از خورشید به بیرون فوران می‌کنند. آیا می‌توانید چیزی دربارهٔ جهت نیرویی که بر هستهٔ دنباله‌دار وارد می‌شود بگویید؟ اگر می‌توانید چه چیز؟ دربارهٔ جهت شتاب هسته چطور؟ دربارهٔ جهت حرکت آن چطور؟

شکل ۲۵. پرسشهای ۳۶ و ۳۷

۳۷. دنباله‌دارها عموماً یک دم غبار دارند (شکل ۲۵) که متشکل است از ذرات غباری که در اثر فشار نور خورشید، به طرف مخالف خورشید رانده می‌شوند. چرا این دم اغلب خمیده است.

۳۸. آیا می‌توانید یک پدیدهٔ فیزیکی مثال بزنید که زمین در آن دخیل باشد ولی نتوانیم در تحلیل این پدیده زمین را "ذره" در نظر بگیریم؟

مسئله‌ها

بخش ۵ـ۵ قانون دوم نیوتون

۱. فرض کنید نیروی گرانشی خورشید ناگهان قطع شود، چنانکه زمین دیگر در قید خورشید نباشد و از مدار آن رها شود. در این‌صورت چقدر طول می‌کشد تا زمین به فاصلهٔ مدار فعلی پلوتون از خورشید برسد؟ (راهنمایی: بعضی از داده‌های مورد نیازتان را می‌توانید از پیوست ج به‌دست بیاورید.)

۲. قطعه‌ای به جرم ۵٫۵kg را که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حالت سکون است با نیروی افقی ثابت ۳٫۸N می‌کشیم. (الف) شتاب آن چقدر می‌شود؟ (ب) چه مدتی باید آن‌را بکشید تا سرعت آن ۵٫۲m/s شود؟ (ج) دراین مدت، قطعه چه مسافتی را می‌پیماید؟

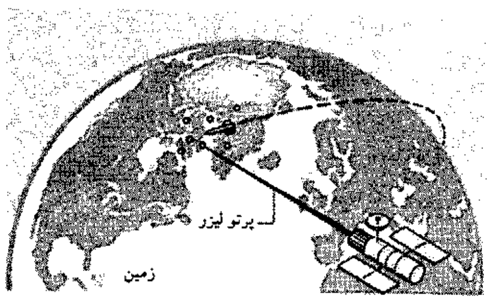
۳. الکترونی در خط مستقیم از کاتد یک لامپ خلأ به آند آن می‌رود.

فاصلهٔ آند از کاتد ۱٫۵cm است. الکترون با سرعت صفر شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $۵٫۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$ به آند می‌رسد. (الف) با این فرض که شتاب ثابت است، نیروی وارد بر الکترون را محاسبه کنید. جرم الکترون $۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}$ است. این نیرو منشأ الکتریکی دارد. (ب) نیروی گرانشی وارد بر الکترون را حساب کنید.

۴. نوترونی با سرعت $۱٫۴ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. برد نیروهای هسته‌ای بسیار کوتاه است؛ نیروی هسته‌ای در خارج هسته عملاً صفر است، اما در داخل هسته بسیار قوی است. اگر نوترون را هسته‌ای به قطر $۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۴}\,\mathrm{m}$ به دام بیندازد و به حالت سکون در بیاورد، کمترین مقدار نیروی لازم برای این کار، چقدر است؟ این نیرو را ثابت فرض کنید. جرم نوترون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$ است.

۵. در نوع تغییر شکل یافته‌ای از بازی "طناب‌کشی" دو نفر، به‌جای طناب، سورتمه‌ای به جرم ۲۵kg را در دو جهت مخالف هم می‌کشند. اگر این دو، سورتمه را با نیروی ۹۰N و ۹۲N به‌طرف خود بکشند، شتاب سورتمه چقدر می‌شود؟

۶. باریکهٔ نورکه از چشمهٔ لیزری ماهواره‌ای گسیل شده، به جسمی که از موشکی رها شده است برخورد می‌کند (شکل ۲۶). این باریکه نیروی $۲٫۷ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{N}$ بر هدف وارد می‌کند. اگر مدت تابش باریکه ۲٫۴s باشد، جسم در این مدت چقدر جابه‌جا می‌شود؟ (الف) فرض کنید جسم سلاحی به جرم ۲۸۰kg است. (ب) فرض کنید جسم یک هدف کاذب به جرم ۲٫۱kg است؟ (این جابه‌جاییها را با مشاهدهٔ باریکهٔ بازتابیده هم می‌شود سنجید.)



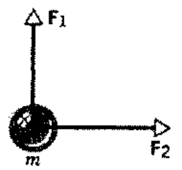
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۶

۷. اتومبیلی با سرعت ۵۳km/h به پایهٔ پلی برخورد می‌کند. یکی از مسافران که بلافاصله پشت یک بالشتک هوا نشسته است، ۶۵cm (نسبت به جاده) حرکت می‌کند تا نهایتاً توسط بالشتک متوقف شود. ضمن این توقف چه نیرویی بر بالاتنهٔ این شخص، که جرم آن ۳۹kg است، وارد می‌شود؟ نیرو را ثابت فرض کنید.

۸. الکترونی به‌طور افقی با سرعت $۱٫۲ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ وارد میدان الکتریکی‌ای می‌شود که به آن نیروی عمودی ثابتی به اندازهٔ $۴٫۵ \times ۱۰^{-۱۶}\,\mathrm{N}$ وارد می‌کند. طی مدتی که الکترون مسافت افقی ۳۳mm را می‌پیماید، در راستای عمودی چقدر منحرف می‌شود؟

۹. "قایق" خورشیدی دیانا برای سفر در منظومهٔ شمسی با استفاده از فشار نور خورشید طراحی شده است. مساحت "بادبان" این قایق $۳٫۱\,\mathrm{km}^{۲}$ و جرم آن ۹۳۰kg است. در نزدیکی سطح زمین، خورشید می‌تواند نیروی ۲۹N بر بادبان وارد کند. (الف) چنین نیرویی چه شتابی به قایق می‌دهد؟ (ب) شتابهای کوچک هم، اگر به مدت کافی به‌طور پیوسته اعمال شوند، می‌توانند آثار بزرگی تولید کنند. اگر این قایق از حالت سکون شروع به حرکت کند، پس از ۱ روز چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ج) سرعت آن چقدر می‌شود؟[1]

۱۰. دو نیروی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ بر جرم m اثر می‌کنند (شکل ۲۷). اگر $m = ۵٫۲\,\mathrm{kg}$، $F_۱ = ۳٫۷\,\mathrm{N}$، و $F_۲ = ۴٫۳\,\mathrm{N}$ باشد، شتاب برداری جسم را به‌دست بیاورید.



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جسمی به جرم ۸٫۵kg با سرعت ۴۲m/s در جهت محور x از مبدأ می‌گذرد. به این جسم نیروی ۱۹N در جهت مثبت محور y وارد می‌شود. حساب کنید که پس از گذشت ۱۵s (الف) سرعت جسم چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

۱۲. نیروی معینی به جسم $m_۱$ شتاب $۱۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد. همین نیرو به جسم $m_۲$ شتاب $۳٫۳۰\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد. این نیرو به جسمی که جرمش برابر با (الف) تفاضل $m_۱$ و $m_۲$ و (ب) مجموع $m_۱$ و $m_۲$ باشد، چه شتابی می‌دهد؟

۱۳. (الف) با چشمپوشی از نیروهای گرانشی، حساب کنید چه نیرویی لازم است تا فضاپیمایی به جرم ۱۲۰۰ تن متریک را طی ۳ روز از حالت سکون به یک دهم سرعت نور برساند. چه نیرویی لازم است تا طی ۲ ماه چنین شود؟ (یک تن متریک برابر با ۱۰۰۰kg است.) (ب) فرض کنید که در این لحظه موتورها خاموش شوند. درهر یک از این دو مورد، چقدر زمان دیگر لازم است تا فضاپیما کلاً مسافت ۵ ماه نوری را بپیماید؟ (۱ ماه را مساوی ۳۰ روز بگیرید.)

بخش ۵ـ۶ قانون سوم نیوتون

۱۴. دو قطعه به جرمهای $m_۱ = ۴٫۶\,\mathrm{kg}$ و $m_۲ = ۳٫۸\,\mathrm{kg}$، توسط ریسمان سبکی، روی میز افقی بدون اصطکاکی، به هم متصل‌اند. در لحظهٔ خاصی که شتاب جرم $m_۲$ برابر با $۲٫۶\,\mathrm{m/s^۲}$ است، (الف) نیروی وارد بر $m_۲$ و (ب) شتاب $m_۱$ چقدر است؟

۱۵. کودکی به جرم ۴۰kg و سورتمه‌ای به جرم ۸٫۴kg روی سطح دریاچهٔ یخزده‌ای به‌فاصلهٔ ۱۵m از هم قرار دارند. کودک با استفاده از طنابی، نیروی ۵٫۲N بر سورتمه وارد می‌کند و آن‌را به طرف خودش می‌کشد. (الف) شتاب سورتمه چقدر است؟ (ب) شتاب کودک چقدر

[1] نگاه کنید به "The Wind from the Sun"، که یک داستان علمی تخیلی جالب از آرتور سی کلارک است.

است؟ (ج) این دو در چه فاصله‌ای از مکان اولیهٔ کودک به هم می‌رسند؟ فرض کنید نیرو ثابت می‌ماند و هیچ اصطکاکی هم وجود ندارد.

بخش ۵ـ۸ وزن و جرم

۱۶. وزن هر یک از اجسام (الف) تا (ج) برحسب نیوتون و جرم آنها برحسب کیلوگرم چقدر است؟ (الف) یک بستهٔ ۵٫۰۰ lb شکر، (ب) یک ورزشکار ۲۴۰ lb، و (ج) یک اتومبیل ۱٫۸۰ ton. (۱ton = ۲۰۰۰ lb).

۱۷. (الف) جرم یک اتومبیل سورتمه‌ای ۱۴۲۰ lb و (ب) وزن یک پمپ گرمایی ۴۱۲ kg چقدر است؟

۱۸. فضانوردی به جرم ۷۵٫۰ kg زمین را ترک می‌کند. حساب کنید که وزن او (الف) در روی زمین، (ب) در مریخ ($g = ۳٫۷۲\ m/s^2$)، و (ج) در فضای بین سیارات چقدر است. (د) در هر مورد جرم او چقدر است؟

۱۹. ذره‌ای در نقطه‌ای که شتاب گرانی $۹٫۸۰\ m/s^2$ است وزنی برابر با ۲۶٫۰ N دارد. (الف) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که شتاب گرانی $۴٫۶۰\ m/s^2$ باشد چقدر است؟ (ب) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که نیروی گرانشی صفر باشد چقدر است؟

۲۰. هواپیمایی به جرم ۱۲۰۰۰ kg با سرعت ۸۷۰ km/h در امتداد افق پرواز می‌کند. نیروی بالابرنده‌ای که از هوا بر هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟

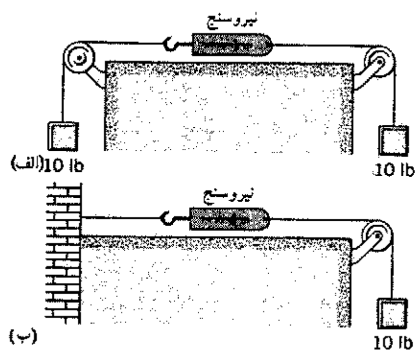
۲۱. نیروی خالص وارد بر اتومبیلی به وزن ۳۹۰۰ lb، که با شتاب $۱۳\ ft/s^2$ حرکت می‌کند. چقدر است؟

۲۲. یک سورتمهٔ موشکی آزمایشی به جرم ۵۲۳ kg، می‌تواند طی ۱۸٫۲ s از سکون به سرعت ۱۶۲۰ km/h برسد، نیروی خالص لازم برای این کار چقدر است؟

۲۳. هواپیمایی قبل از برخاستن از زمین با شتاب $۲٫۳\ m/s^2$ (یعنی $۷٫۵۵\ ft/s^2$) روی باند فرودگاه حرکت می‌کند. این هواپیما دو موتور جت دارد، که هر کدام نیروی $۱٫۴۰ \times ۱۰^۵\ N$ (یعنی ۱۵٫۷ ton) تولید می‌کند. وزن هواپیما چقدر است؟

بخش ۵ـ۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون

۲۴. (الف) دو وزنهٔ ۱۰ lb، طبق شکل ۲۸الف، به یک نیروسنج متصل‌اند. نیروسنج چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) یک وزنهٔ ۱۰ lb به نیروسنجی



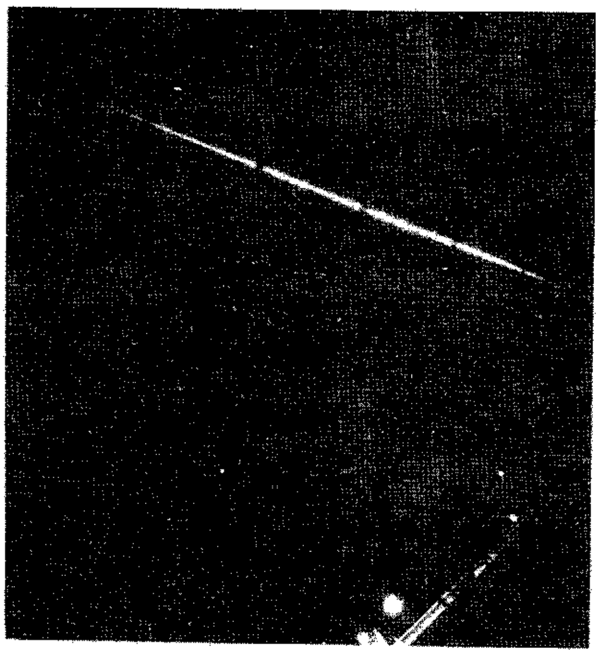
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۴

متصل است، که سر دیگرش به دیوار وصل شده است؛ شکل ۲۸ب. نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد؟ (وزن نیروسنج ناچیز است.)

۲۵. کرهٔ بارداری به جرم $۲٫۸ \times ۱۰^{-۴}\ kg$ از ریسمانی آویزان است. یک نیروی الکتریکی در راستای افقی بر این کره وارد می‌شود، چنانکه ریسمان، در حالت سکون، با راستای قائم زاویهٔ ۳۳° می‌سازد. (الف) اندازهٔ نیروی الکتریکی و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.

۲۶. اتومبیلی به وزن ۳۰۰۰ lb (≃ ۱۳۰۰۰ N) که با سرعت ۵۰ mi/h (≃ ۸۰ km/h) در حرکت است، پس از طی مسافت ۲۰۰ ft (≃ ۶۱ m) متوقف می‌شود. (الف) نیروی ترمز و (ب) زمان لازم برای توقف را به‌دست بیاورید. با همان نیروی ترمز (ج) مسافت و (د) زمان لازم برای توقف از سرعت اولیه ۲۵ mi/h (≃ ۴۰ km/h) را حساب کنید.

۲۷. شهابی به جرم ۰٫۲۵ kg به‌طور عمودی با شتاب $۹٫۲\ m/s^2$ به درون جو زمین سقوط می‌کند. علاوه بر گرانش، نیروی بازدارنده‌ای (ناشی از کشش اصطکاکی جو) هم بر شهاب وارد می‌شود. اندازهٔ این نیروی بازدارنده چقدر است؟ (شکل ۲۹).



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. آسانسوری به وزن ۶۲۰۰ lb با کابلی بالا کشیده می‌شود. شتاب آسانسور $۳٫۸\ ft/s^2$ است. (الف) کشش کابل چقدر است؟ (ب) اگر شتاب آسانسور $۳٫۸\ ft/s^2$ به‌طرف پایین بود، اما همچنان به طرف بالا حرکت می‌کرد، کشش کابل چقدر می‌شد؟

۲۹. مردی به جرم ۸۳ kg (وزن $mg = ۱۸۰\ lb$) از لبهٔ پنجره‌ای به روی یک سکوی بتونی می‌پرد، لبهٔ پنجره ۰٫۴۸ m (یعنی ۱٫۶ ft)

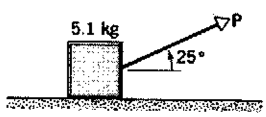
بالاتر از سکو است، مرد فراموش می‌کند زانوهایش را خم کند و پس از برخورد به سکو طی مسافت ۲٫۲cm (یعنی ۰٫۸۷in) متوقف می‌شود. (الف) شتاب متوسط مرد از زمانی که پاهایش به سکو می‌رسد تا زمان توقف کامل چقدر است؟ (ب) در این پرش چه نیروی متوسطی بر استخوانبندی او وارد می‌شود؟

۳۰. قطعه‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود. زاویهٔ سطح شیبدار θ است. (الف) این قطعه تا چه مسافتی روی این سطح بالا می‌رود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟ (ج) سرعت قطعه هنگامی که در برگشت به نقطهٔ اولیه می‌رسد چقدر است؟ مقدار عددی جوابها را به‌ازای $\theta = ۳۵°$ و $v_0 = ۸٫۲\text{ft/s}^۲$ به‌دست بیاورید.

۳۱. لامپی در راستای قائم از ریسمانی آویزان است. ریسمان و لامپ در آسانسوری هستند که به پایین می‌آید. آسانسور، پیش از توقف شتاب کندکنندهٔ ۲٫۴m/s² (یعنی ۷٫۹ft/s²) دارد. (الف) اگر کشش ریسمان ۸۹N (یعنی ۲۰lb) باشد. جرم لامپ چقدر است؟ (ب) اگر آسانسور با شتاب رو به بالای ۲٫۴m/s² (یعنی ۷٫۹ft/s²) به‌طرف بالا حرکت کند، کشش ریسمان چقدر می‌شود؟

۳۲. نخ قلاب ماهیگیری باید چه کششی را تحمل کند تا بتواند یک ماهی ۱۹lb را که با سرعت ۹٫۲ft/s شنا می‌کند، طی مسافت ۴٫۵in متوقف کند؟

۳۳. جسمی به جرم ۵٫۱kg را با ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی می‌کشند. ریسمان نیروی $P = ۱۲\text{N}$ در زاویهٔ $\theta = ۲۵°$ بالاتر از سطح افقی وارد می‌کند؛ (شکل ۳۰). (الف) شتاب جسم چقدر است؟ (ب) نیروی P را به آهستگی زیاد می‌کنیم. مقدار P درست پیش از بلند شدن جسم از سطح چقدر است؟ (ج) شتاب جسم درست پیش از بلند شدن آن از سطح، چقدر است؟

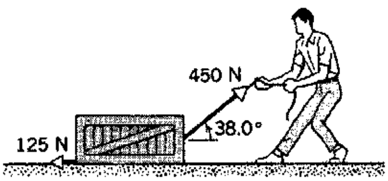


شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. چگونه می‌توانیم جسمی به وزن ۱۰۰lb را با استفاده از طنابی که فقط تحمل ۸۷lb کشش را دارد از بالای بامی به پایین بفرستیم بی‌آنکه طناب پاره بشود؟

۳۵. قطعه‌ای از حالت سکون از بالای سطح شیبداری به طول ۱۶m رها می‌شود، و ۴٫۲s بعد به پایین می‌رسد. در همان لحظه‌ای که قطعهٔ اول رها می‌شود، قطعهٔ دیگری از پایین سطح شیبدار طوری به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود که همزمان با قطعهٔ اول به پایین سطح برگردد. (الف) شتاب هر یک از این قطعات را پیدا کنید. (ب) سرعت اولیهٔ قطعهٔ دوم چقدر بوده است؟ (ج) این قطعه چقدر از سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (د) زاویهٔ سطح شیبدار با سطح افقی چقدر است؟

۳۶. کارگری صندوقی را با طنابی روی کف کارگاه می‌کشد. کارگر نیروی ۴۵۰N به طناب وارد می‌کند، و سر طناب ۳۸° بالاتر از سطح افقی است. کف نیروی بازدارندهٔ افقی‌ای به اندازهٔ ۱۲۵N بر صندوق وارد می‌کند (شکل ۳۱). اگر (الف) جرم صندوق ۹۶٫۰kg باشد و (ب) وزن آن ۹۶٫۰N باشد، شتاب صندوق چقدر است؟



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. جرم آسانسوری با بارش ۱۶۰۰kg است. این آسانسور، که با سرعت ۱۲٫۰m/s به طرف پایین در حرکت است، طی مسافت ۴۲٫۰m متوقف می‌شود. کشش کابل نگهدارنده، طی مدتی که آسانسور متوقف می‌شود چقدر است؟

۳۸. جسمی از یک ترازوی فنری که به سقف آسانسوری متصل شده، آویزان است. وقتی آسانسور ساکن است، ترازو ۶۵N را نشان می‌دهد. (الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت ۷٫۶m/s به طرف بالا حرکت کند، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) وقتی آسانسور با سرعت ۷٫۶m/s با شتاب کندشوندهٔ ۲٫۴m/s² به طرف بالا در حرکت باشد، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟

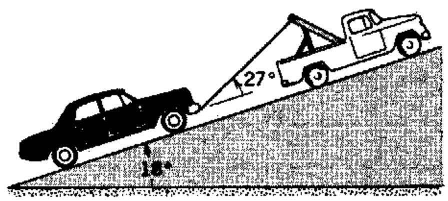
۳۹. وزنهٔ کوچکی توسط قطعه نخی به جرم ناچیز از سقف واگن قطاری آویزان است. چنین شاغولی می‌تواند مانند شتاب‌سنج عمل کند. (الف) نشان بدهید که رابطهٔ شتاب افقی واگن با زاویهٔ θ، که ریسمان با راستای قائم می‌سازد، $a = g\tan\theta$ است. (ب) a را به‌ازای $\theta = ۲۰°$ حساب کنید. (ج) θ را به‌ازای $a = ۵٫۰\text{ft/s}^۲$ حساب کنید.

۴۰. یک موتور جت به جرم ۱۴۰۰kg با سه بست به بدنهٔ یک هواپیمای مسافری متصل است (در عمل هم همین‌طور است، شکل ۳۲). فرض کنید که هر بست یک سوم بار را تحمل می‌کند. (الف) نیروی وارد بر هر بست را، در حالتی که هواپیما منتظر خالی شدن باند است تا شروع به حرکت کند، حساب کنید. (ب) طی پرواز، هواپیما ناگهان به جریان متلاطمی برمی‌خورد که به آن شتاب ۲٫۶۰m/s² به‌طرف بالا می‌دهد. نیروی وارد بر هر بست، در این شرایط چقدر است؟ چرا فقط از سه بست استفاده می‌شود؟

شکل ۳۲. مسئلهٔ ۴۰

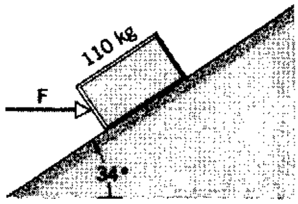
۴۱. چند کارگر در طبقهٔ بالای ساختمانی وسایل و دستگاههایی را در یک آسانسور باری می‌گذارند تا به طبقهٔ پایین بفرستند، اما کابل کهنهٔ آسانسور تحمل این همه بار را ندارد و پاره می‌شود. جرم آسانسور با بار، در لحظهٔ حادثه ۱۶۰۰kg است. هنگام سقوط آسانسور، ریلهای هدایت‌کنندهٔ آن نیروی بازدارندهٔ ثابتی به اندازهٔ ۳۷۰۰N بر اتاقک وارد می‌کنند. آسانسور با چه سرعتی به کف محفظه‌اش برخورد می‌کند؟ کف‌محفظه ۷۲m از طبقهٔ بالا پایین‌تر است.

۴۲. اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰kg را با طنابی که به پشت کامیونی بسته شده است به بالای سطح شیبداری با زاویهٔ °۱۸ یدک می‌کشند. زاویهٔ طناب با سطح شیبدار °۲۷ است (شکل ۳۳). اگر طناب بتواند کشش ۴٫۶kN را تحمل کند، اتومبیل را طی مدت ۷٫۵s، از حالت سکون، حداکثر تا چه مسافتی می‌شود یدک کشید؟ نیروهای بازدارندهٔ وارد بر اتومبیل را در نظر نگیرید.



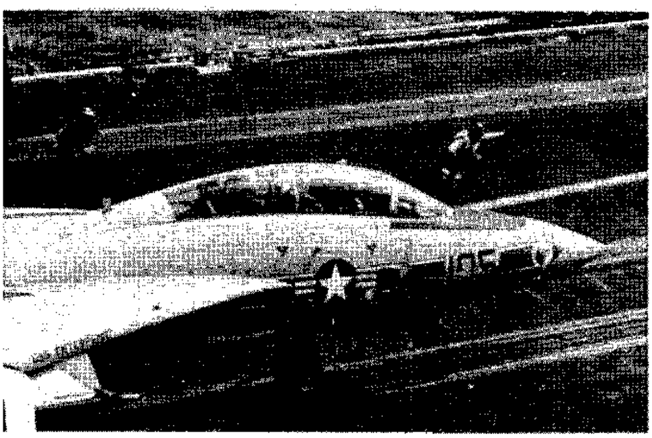
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. صندوقی به جرم ۱۱۰kg را با سرعت ثابت روی سطحی به شیب °۳۴ هل می‌دهیم؛ (شکل ۳۴). (الف) نیروی افقی لازم برای این کار (F) چقدر است؟ (ب) نیرویی که سطح شیبدار بر صندوق وارد می‌کند چقدر است؟



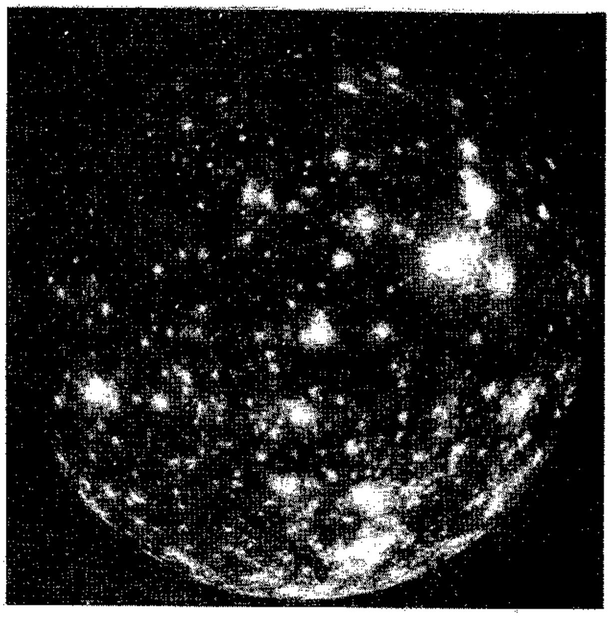
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۳

۴۴. یک جت نظامی (شکل ۳۵) به جرم ۲۶ton، باید به سرعت ۲۸۰ft/s نسبت به هوا برسد تا بتواند شروع به پرواز کند. موتور خودِ جت نیروی ۲۴۰۰۰lb تولید می‌کند. این جت باید از ناو هواپیمابری که طول عرشهٔ پرواز آن ۳۰۰ft است به هوا بلند شود. پرتاب‌کنندهٔ ناو چه نیرویی باید بر هواپیما اعمال کند؟ فرض کنید که هم پرتاب‌کننده و هم موتور، در تمام مسافت ۳۰۰ft، نیروی ثابتی اعمال می‌کنند.



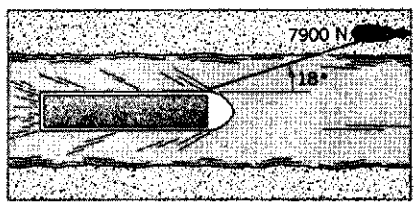
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. موشک سیاره‌نشینی به سطح کالیستو، یکی از اقمار سیارهٔ مشتری، نزدیک می‌شود (شکل ۳۶). اگر موتور موشک نیروی رو به بالای ۳۲۶۰N تولید کند، سیاره‌نشین با سرعت ثابت فرود می‌آید. کالیستو جوّ ندارد. اگر نیروی رو به بالا ۲۲۰۰N باشد، سیاره‌نشین با شتاب $۰٫۳۹۰ m/s^2$ به‌طرف پایین می‌آید. (الف) وزن سیاره‌نشین در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم سیاره‌نشین چقدر است؟ (ج) شتاب گرانشی در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۵

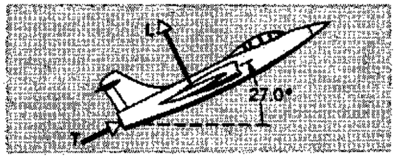
۴۶. روزگاری کرجیها را با اسب می‌کشیدند و در کانال جلو می‌بردند (شکل ۳۷). فرض کنید اسب نیروی ۷۹۰۰N، با زاویهٔ ۱۸° نسبت به جهت حرکت در کانال، بر کرجی وارد کند. جرم کرجی ۹۵۰۰kg و شتاب آن ۰٫۱۲ m/s^2 است. آب چه نیرویی بر کرجی وارد می‌کند؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۶

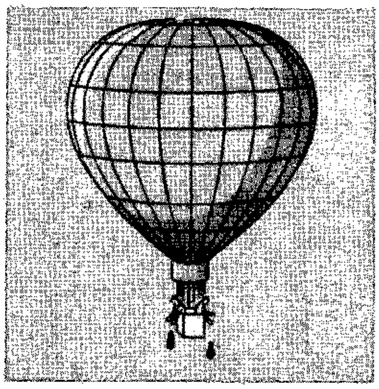
۴۷. موشکی با بارش ۵۱۰۰۰kg جرم دارد. نیروی پیشران موشک در حالتی که موشک (الف) بلافاصله پس از روشن شدن روی سکوی پرتاب به حالت "شناور" درآمده است و (ب) با شتاب ۱۸ m/s^2 به طرف بالا، حرکت می‌کند چقدر است؟

۴۸. جت جنگنده‌ای با زاویهٔ ۲۷٫۰° نسبت به سطح افقی، و با شتاب ۲٫۶۲ m/s^2 از زمین جدا می‌شود (شکل ۳۸). (الف) نیروی پیشران T موتور هواپیما و (ب) نیروی بالابرندهٔ L را که ناشی از هوا و عمود بر بالهای هواپیماست به‌دست بیاورید.



شکل ۳۸. مسئلهٔ ۴۸

۴۹. یک بالون پژوهشی به جرم M با شتاب رو به پایین در راستای قائم پایین می‌آید (شکل ۳۹). چقدر بار باید از بالون بیرون ریخت تا بالون شتاب رو به بالای a پیدا کند؟ فرض کنید نیروی بالابرندهٔ بالون تغییری نمی‌کند.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۴۹

۵۰. موشکی به جرم ۳۰۳۰kg از زمین با زاویهٔ فراز ۵۸٫۰° آتش می‌شود. موتور موشک به مدت ۴۸٫۰s یک نیروی پیشران به مقدار ۶۱٫۲kN در زاویهٔ ثابت ۵۸٫۰° با سطح افقی تولید می‌کند و بعد خاموش می‌شود. از جرم سوخت مصرف شده و از مقاومت هوا صرفنظر کنید. (الف) ارتفاع موشک در نقطهٔ خاموش شدن موتور و (ب) کل فاصلهٔ میان نقطهٔ پرتاب و نقطهٔ برخورد موشک به زمین را پیدا کنید.

۵۱. مکعبی به جرم m روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که در آسانسوری واقع شده است به پایین می‌لغزد. زاویهٔ سطح نسبت به کف آسانسور θ است. شتاب این مکعب نسبت به سطح شیبدار را در حالتهای زیر پیدا کنید. (الف) آسانسور با سرعت ثابت v پایین می‌آید. (ب) آسانسور با سرعت ثابت v بالا می‌رود. (ج) آسانسور با شتاب ثابت تندکنندهٔ a پایین می‌آید. (د) آسانسور با شتاب ثابت کندکنندهٔ a پایین می‌آید. (ه) کابل آسانسور پاره می‌شود. (و) در قسمت (ج) سطح شیبدار چه نیرویی بر مکعب وارد می‌کند؟

بخش ۵ـ۱۱ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

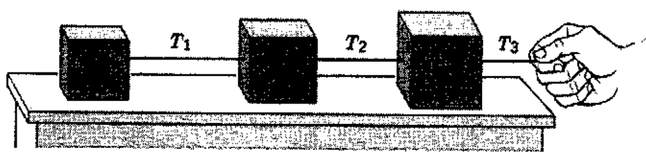
۵۲. در شکل ۱۸، فرض کنید که $m_1 = ۴٫۳۰\,kg$ و $m_2 = ۱٫۸۰\,kg$

است. (الف) شتاب دو قطعه و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.

۵۳. مردی به جرم ۱۱۰kg با گرفتن طنابی خودش را از ارتفاع ۱۲m به سطح زمین می‌رساند. طناب از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته و سر دیگرش به کیسهٔ شنی به جرم ۷۴kg بسته شده است. (الف) مرد با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) آیا راهی هست که با سرعت کمتری به زمین بخورد؟

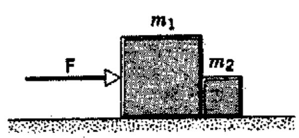
۵۴. میمونی به جرم ۱۱kg از طنابی بسیار سبک بالا می‌رود. طناب (بدون اصطکاک!) از روی شاخهٔ درختی گذشته است و به باری به جرم ۱۵kg متصل است. (الف) میمون حداقل با چه شتابی باید از طناب بالا برود تا بتواند بار را از زمین بلند کند؟ (ب) اگر پس از بلند شدن بار از زمین، میمون بالا رفتن خود را متوقف کند و از طناب آویزان بماند، (ب) شتاب میمون و (ج) کشش طناب چقدر می‌شود؟

۵۵. سه جسم روی میز افقی بدون اصطکاکی به هم بسته شده‌اند، و با نیروی T_3 = ۶٫۵N به طرف راست کشیده می‌شوند (شکل ۴۰). اگر m_1 = ۱٫۲kg، m_2 = ۲٫۴kg و m_3 = ۳٫۱kg باشد، (الف) شتاب سیستم و (ب) کششهای T_1 و T_2 را به‌دست بیاورید. تبادل نیرو بین اجسامی که به دنبال هم کشیده می‌شوند، مثلاً واگنهای قطار که لکوموتیو آنها را می‌کشد، مثل همین سیستم است.



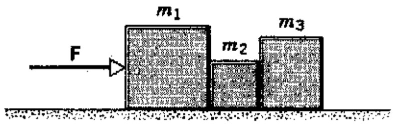
شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۵

۵۶. دو جسم روی میز بدون اصطکاکی با هم در تماس‌اند. نیرویی افقی F به یکی از آنها اعمال می‌شود (شکل ۴۱). (الف) اگر m_1 = ۲٫۳kg، m_2 = ۱٫۲kg و F = ۳٫۲N باشد، نیروی تماسی بین دو جسم را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که اگر همین نیروی خارجی را، به‌جای m_1، به m_2 وارد کنیم، نیروی تماسی بین اجسام ۲٫۱N می‌شود، که با مقدار حاصل از قسمت (الف) فرق می‌کند. چرا چنین است؟



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۵۶

۵۷. شکل ۴۲ سه صندوق به جرمهای m_1 = ۴۵٫۲kg، m_2 = ۲۲٫۸kg و m_3 = ۳۴٫۳kg را روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشان می‌دهد. (الف) چه نیروی افقی‌ای (F) لازم است تا کل مجموعه را با شتاب ۱٫۳۲m/s² به طرف راست براند؟ در این حالت (ب) m_2 بر m_3 و (ج) m_1 بر m_2 چه نیرویی وارد می‌کند؟

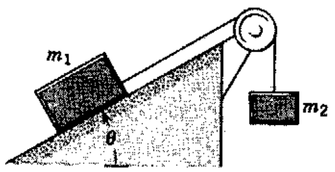


شکل ۴۲. مسئلهٔ ۵۷

۵۸. زنجیری شامل ۵ حلقه، هر یک به جرم ۱۰۰g، را با شتاب ثابت ۲٫۵۰m/s² در راستای قائم بالا می‌بریم (شکل ۴۳). (الف) نیرویی که حلقه‌های مجاور بر هم وارد می‌کنند، (ب) نیروی F که عامل خارجی بر حلقهٔ بالایی وارد می‌کند، و (ج) نیروی خالص وارد بر هر حلقه را حساب کنید.

شکل ۴۳. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. جسمی به جرم m_1 = ۳٫۷۰kg روی سطح شیبداری به زاویهٔ θ = ۲۸٫۰۰° واقع شده و با ریسمانی که از قرقرهٔ کوچک بی‌جرم و بدون اصطکاکی عبورکرده، به جسم دیگری به جرم m_2 = ۱٫۸۶kg متصل شده است. m_2 به‌طور قائم از ریسمان آویزان است (شکل ۴۴). (الف) شتاب هر جسم چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟

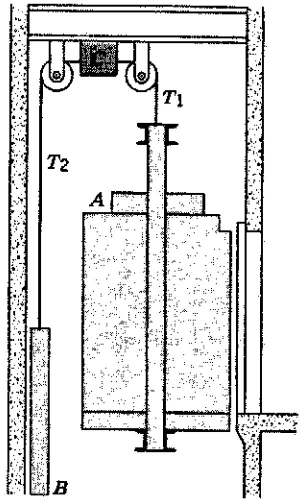


شکل ۴۴. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. چتربازی به جرم ۷۷kg، کمی پس از باز شدن چترش با شتاب رو به پایین ۲٫۵m/s² سقوط می‌کند. جرم چتر ۵٫۲kg است. (الف) نیروی رو به بالای هوا بر چتر چقدر است؟ (ب) نیروی رو به پایینی که شخص بر چتر وارد می‌کند چقدر است؟

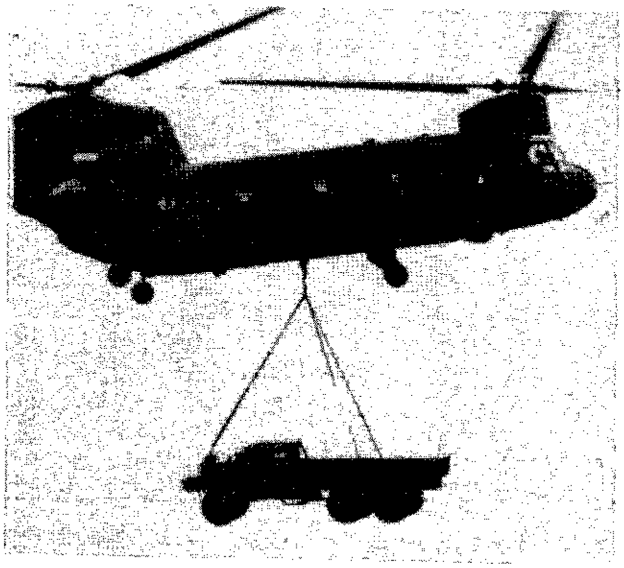
۶۱. آسانسوری شامل اتاقک (A)، وزنهٔ مقابل (B)، موتور (C)، وکابل و قرقره است (شکل ۴۵). جرم اتاقک ۱۰۰۰kg و جرم وزنهٔ مقابل ۱۴۰۰kg است. اصطکاک و جرم کابل و قرقره‌ها را به‌حساب نیاورید. آسانسور با شتاب تندکنندهٔ ۲٫۳۰m/s² به بالا می‌رود و وزنهٔ مقابل هم با همین شتاب به پایین می‌آید. (الف) کشش T_1 و (ب) کشش

T_2 در کابل چقدر است و (ج) موتور چه نیرویی به کابل وارد می‌کند؟

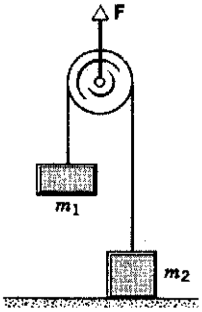


شکل ۴۵. مسئلهٔ ۶۱

۶۲. هلی‌کوپتری به جرم ۱۵۰۰۰kg اتومبیلی به جرم ۴۵۰۰kg را، با شتاب ۱٫۴m/s² را از زمین بلند می‌کند. (الف) نیروی عمودی‌ای را که هوا بر پروانه‌های هلی‌کوپتر وارد می‌کند و (ب) کشش بخش بالایی کابل نگهدارنده را پیدا کنید (شکل ۴۶).


شکل ۴۶. مسئلهٔ ۶۲

۶۳. محور قرقرهٔ شکل ۴۷ با نیروی F به بالا کشیده می‌شود. فرض کنید قرقره و ریسمان بی‌جرم‌اند و محور هم بدون اصطکاک است. دو جسم، m_1 به جرم ۱٫۲kg و m_2 به جرم ۱٫۹kg، به دو سر ریسمانی بسته شده‌اند که از روی قرقره می‌گذرد. جسم m_2 روی زمین است. (الف) نیروی F از چه مقداری بیشتر نباشد تا m_2 روی زمین بماند؟ (ب) اگر F برابر با ۱۱۰N باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) با کشش حاصل از قسمت (ب)، شتاب m_1 چقدر است؟

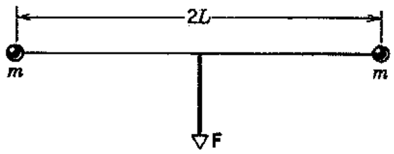


شکل ۴۷. مسئلهٔ ۶۳

۶۴. دو ذره، هر یک به جرم m، با ریسمان سبکی به طول $2L$ به‌هم متصل‌اند (شکل ۴۸). نیروی ثابت F در نقطهٔ میانی ریسمان $(x = 0)$ در جهت عمود بر راستای اولیهٔ ریسمان بر آن وارد می‌شود. نشان بدهید که شتاب هر جرم در راستای عمود بر F برابر است با

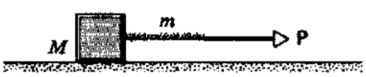
$$a_x = \frac{F}{2m}\,\frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

که در آن، x فاصلهٔ عمودی هر جرم از خط اثر F است. وضعیت را در حالت $x = L$ بررسی کنید.



شکل ۴۸. مسئلهٔ ۶۴

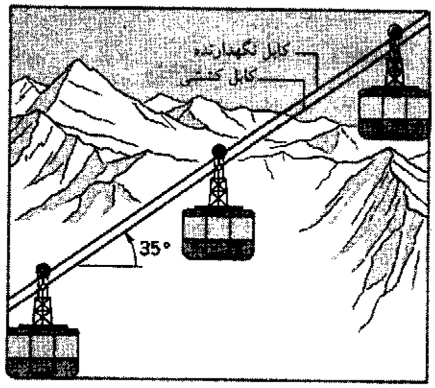
۶۵. جسمی به جرم M روی سطح افقی بدون اصطکاکی با طنابی به جرم m کشیده می‌شود (شکل ۴۹). نیروی افقی $\mathbf{P}$ بر انتهای طناب وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که طناب، هر چقدر ناچیز، به هر حال باید "شکم بدهد". حالا با فرض ناچیز بودن مقدار خمیدگی طناب، (ب) شتاب طناب و جسم، (ج) نیرویی که طناب بر جسم وارد می‌کند، و (د) کشش طناب در وسط آن را حساب کنید.



شکل ۴۹. مسئلهٔ ۶۵

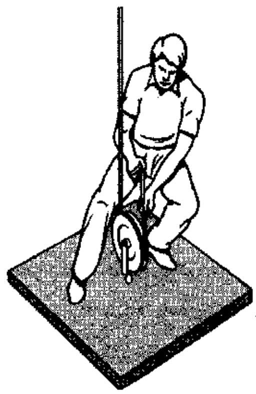
۶۶. شکل ۵۰ بخشی از یک دستگاه "تله‌کابین" را نشان می‌دهد. بیشترین جرم مجاز هر اتاقک با محتویاتش ۲۸۰۰kg است. اتاقکها به یک کابل نگهدارنده سوارند و با کابل دیگری که به دکلها متصل است کشیده می‌شوند. اگر اتاقکها با شتاب ۰٫۸۱m/s² در امتداد

شیب 35° به بالا کشیده شوند، اختلاف کشش دو قسمت مجاور کابل کشش (در دو طرف اتاقک) چقدر است؟



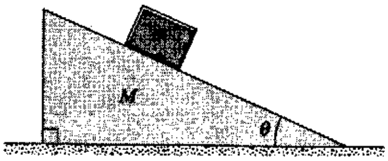
شکل ۵۰. مسئلهٔ ۶۶

۶۷. در شکل ۵۱، وزن شخص ۱۸۰lb است؛ وزن سکو و قرقره قرقرهٔ متصل به آن هم کلاً ۴۳lb است. وزن طناب ناچیز است. شخص باید با چه نیرویی طناب را بکشد تا بتواند خودش سکو را با شتاب $1/2 ft/s^2$ به‌بالا حرکت بدهد؟



شکل ۵۱. مسئلهٔ ۶۷

۶۸. جسمی به جرم m روی گوهٔ قائم‌الزاویه‌ای به جرم M و زاویهٔ شیب θ واقع شده است. گوه روی یک میز افقی قرار دارد (شکل ۵۲). (الف) M باید چه شتابی (a) نسبت به میز داشته باشد تا m نسبت به گوه ساکن بماند؟ تماس گوه و جسم را بدون اصطکاک فرض کنید. (ب) چه نیروی افقی $\mathbf{F}$ باید به این سیستم وارد کرد تا نتیجهٔ (الف) حاصل شود؟ سطح میز را هم بدون اصطکاک فرض کنید. (ج) فرض کنید نیرویی به M وارد نمی‌کنیم و همهٔ سطوح را هم بدون اصطکاک بگیرید. حالا حرکت حاصل را توصیف کنید.



شکل ۵۲. مسئلهٔ ۶۸

۶

دینامیک ذرات

در فصل ۵ قوانین نیوتون را معرفی کردیم و مثالهایی از کاربردهایشان ارائه دادیم. این مثالها را مخصوصاً ساده کرده بودیم تا کاربرد قوانین را نشان بدهیم. اما در این روند ساده‌سازی بیش از حد، بخشبی از دید فیزیکی از دست می‌رود. مثلاً یکی از مسائل مهم مکانیک، که به ویژه در طراحی سیستمهای مکانیکی وارد می‌شود، مسئلهٔ اصطکاک است. در تمام مثالهای فصل ۵ فرض شده بود اصطکاک حضور ندارد.

در این فصل بررسی کاربردهای قوانین نیوتون را ادامه می‌دهیم؛ نیروهای اصطکاک را معرفی، و آثارشان را مطالعه می‌کنیم. نیروهای متغیر را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلات حرکت وابسته به چنین نیروهایی را حل کرد. سرانجام، نشان می‌دهیم که استفاده از چارچوبهای مرجع نالخت موجب بروز آثاری می‌شود که می‌توان آنها را با وارد کردن نیروهای لختی یا شبه نیروها تحلیل کرد. این نیروها، بر خلاف آنهایی که در فصل ۵ بررسی کردیم، ناشی از جسم خاصی در محیط ذره نیستند.

۶ـ۱ قوانین نیرو

پیش از اینکه به کاربرد قوانین نیوتون برگردیم، باید مختصری از ماهیت خود نیروها صحبت کنیم. تا اینجا معادلات حرکت را برای تحلیل و محاسبهٔ آثار نیروها به‌کار برده‌ایم، اما این معادلات چیزی دربارهٔ علت نیرو نمی‌گویند. برای اینکه بفهمیم که نیرو ناشی از چیست باید درک میکروسکوپی مفصلی از برهم‌کنش اجسام با محیطشان داشته باشیم. به‌نظر می‌رسد که طبیعت، در بنیادی‌ترین سطح خود، از طریق عدهٔ کمی نیروی بنیادی عمل می‌کند. فیزیکدانها به‌طور معمول از چهار نیرو به عنوان نیروهای بنیادی نام می‌برند: ۱. نیروی گرانشی، که ناشی از حضور ماده است (یا، اگر بخواهیم با نظریهٔ نسبیت عام سازگارتر باشیم، منشأ آن ماده و انرژی است)؛ ۲. نیروی الکترومغناطیسی، که شامل برهم‌کنشهای پایه‌ای الکتریکی و مغناطیسی است و پیوند میان اتمها، و ساختار جامدات از آثار آن است؛ ۳. نیروی هسته‌ای ضعیف، که موجب بعضی از فرایندهای واپاشی پرتوزا، و بعضی از واکنشهای میان ذرات بنیادی می‌شود؛ و ۴. نیروی قوی، که بین ذرات بنیادی عمل می‌کند و اجزای هسته را به هم پیوند می‌دهد.

در میکروسکوپیک‌ترین مقیاس، مثلاً برای دو پروتونی که درست در کنار هم واقع شده باشند، قدرت نسبی این نیروها به ترتیب عبارت است از: قوی (قدرت نسبی = ۱)؛ الکترومغناطیسی (10^{-2})؛ ضعیف (10^{-7})؛ گرانشی (10^{-38}). در مقیاسهای بنیادی، گرانشی فوق‌العاده ضعیف است و آثار آن قابل چشمپوشی است. با چند آزمایش ساده و معمولی می‌توانید متوجه ضعیف بودن گرانش بشوید ـــ مثلاً با بلند کردن چند تکه کاغذ به‌وسیلهٔ شانهٔ باردار، یا بلند کردن چند سوزن یا گیرهٔ کاغذ به‌وسیلهٔ یک آهنربای کوچک. نیروی مغناطیسی آهنربای کوچکی می‌تواند برنیروی گرانشی‌ای که کل زمین بر این اجسام وارد می‌کند غلبه کند!

برای هر چه ساده‌تر کردن این تصویر، فیزیکدانها کوشیده‌اند عدهٔ نیروها را از چهار هم کمتر کنند. در سال ۱۹۶۷، نظریه‌ای مطرح شد که طبق آن می‌شود نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف را اجزای یک نیروی واحد، نیروی الکتروضعیف، در نظر گرفت. ترکیب یا وحدت این دو نیرو شبیه است به وحدت نیروهای مجزای الکتریکی و مغناطیسی در قرن نوزدهم، که به نیروی واحد الکترومغناطیسی منجر شد. نظریه‌های جدید دیگری موسوم به نظریه‌های وحدت بزرگ هم ارائه شده‌اند که نیروهای قوی و الکتروضعیف را در یک چارچوب واحد ترکیب می‌کنند، و حتی "نظریه‌های همه‌چیز"ی وجود دارند که می‌خواهند گرانش را هم در این وحدت بگنجانند.

یکی از پیش‌بینیهای چنین نظریه‌هایی آن است که پروتون (ذرهٔ هسته‌ای که بار مثبت دارد) پایدار نیست بلکه در مدتی بسیار زیاد، شاید 10^{32} سال، وامی‌پاشد. (این زمانِ خیلی خیلی زیادی است؛ مقایسه کنید با سن عالم که فقط 10^{10} سال است). یکی از راههای آزمودن این نظریه آن است که مجموعه‌ای از 10^{33} پروتون (معادل با مکعبی از آب به ضلع تقریباً ۱۷ متر) را به مدت یک سال مشاهده

کنیم و ببینیم که آیا یکی از پروتونهای آن وامی‌پاشد یا خیر. برای آزمودن چنین نظریه‌های غریبی، این آزمایشها ضروری‌اند، آزمایشهایی که بی‌شباهت به‌جستجوی یک سوزن در کاهدان نیست. در فصل ۵۶ نسخهٔ طولانی‌تر همین کتاب، در مورد چنین تأملاتی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

خوشبختانه برای تحلیل سیستمهای مکانیکی نیازی به استفاده از چنین نظریه‌هایی نداریم. درواقع، هرآنچه دربارهٔ سیستمهای مکانیکی معمولی مطالعه می‌کنیم فقط به دو نیرو مربوط می‌شود: گرانش و الکترومغناطیس. نیروی گرانشی به‌طور عمده در جاذبهٔ زمین براجسام ظاهر می‌شود، جاذبه‌ای که موجب وزن اجسام می‌شود. جاذبهٔ گرانشی اجسام آزمایشگاهی بر یکدیگر، بسیار ضعیفتر است و تقریباً همیشه می‌توان از آن صرفنظر کرد.

همهٔ نیروهای دیگری که معمولاً بررسی‌شان می‌کنیم در نهایت منشأ الکترومغناطیسی دارند: نیروهای تماسی، مثلاً نیروی عمودی که از فشار آوردن جسمی به جسم دیگر ناشی می‌شود و نیروی اصطکاک ناشی از کشیده شدن سطوح اجسام روی یکدیگر است؛ نیروهای چسبندگی، مثلاً مقاومت هوا؛ نیروهای کششی، مثلاً کشش نخ یا طناب؛ نیروهای کشسانی، مثلاً نیروی فنر؛ بسیاری نمونه‌های دیگر، همه از این نوع‌اند. خوشبختانه، در بررسی سیستمهای مکانیکی معمولی می‌توانیم اساس میکروسکوپی را نادیده بگیریم و به جای این زیرساختارهای پیچیده، یک نیروی مؤثر با اندازه و جهت معین اختیار کنیم.

۶ـ۲ نیروی اصطکاک[1]

اگر جسمی به جرم m را با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ روی میزی افقی رها کنیم، سرانجام خواهد ایستاد. این یعنی که جسم در طی حرکتش یک شتاب متوسط $\bar{\mathbf{a}}$ دارد که در خلاف جهت حرکت است. هر وقت (در چارچوبهای لخت) ببینیم که جسمی شتاب دارد، نیرویی به حرکت جسم وابسته می‌کنیم، که طبق قانون دوم نیوتون تعریف می‌شود. در مورد بالا می‌گوییم که میز، بر جسمی که بر آن می‌لغزد، یک نیروی اصطکاک وارد می‌کند که متوسط آن $m\bar{\mathbf{a}}$ است. عموماً منظورمان از اصطکاک، یک برهم‌کنش تماسی بین جامدات است. آثار شبیه به اصطکاکی را که در مایعات و گازها ایجاد می‌شوند با اصطلاحات دیگری توصیف می‌کنیم (بخش ۶ـ۷).

درواقع، هرگاه که سطح جسمی بر سطح جسم دیگری بلغزد، هر جسم یک نیروی اصطکاک به دیگری وارد می‌کند. نیروی اصطکاک وارد بر هر جسم در جهت خلاف حرکت آن نسبت به جسم دیگر است. نیروی اصطکاک، خود به خود با این حرکت نسبی مقابله می‌کند و هیچ‌گاه به آن کمک نمی‌کند. حتی اگر هیچ حرکت نسبی‌ای هم درکار نباشد، ممکن است بین سطوح نیروی اصطکاک وجود داشته باشد.

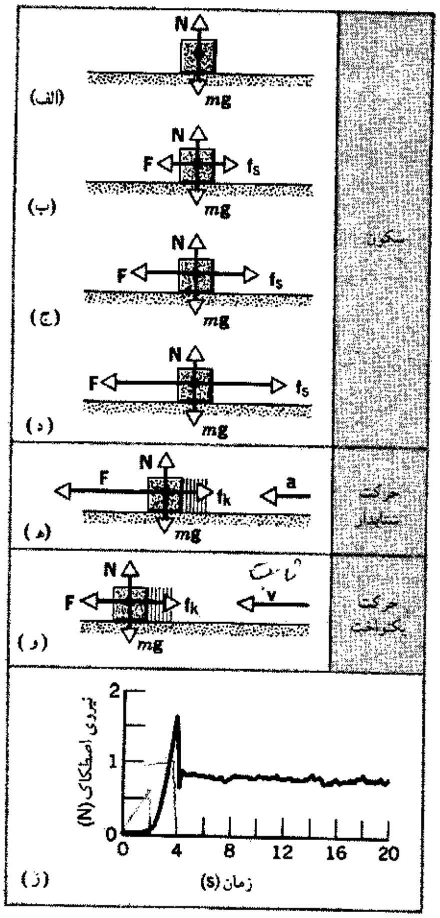
تا کنون از آثار نیروی اصطکاک چشم پوشیده‌ایم، اما اصطکاک در زندگی روزمره بسیار مهم است. اگر فقط نیروی اصطکاک درکار باشد، هر محور چرخنده‌ای سرانجام خواهد ایستاد. در اتومبیل، حدود ۲۰٪ توان موتور صرف مقابله با اصطکاک می‌شود. اصطکاک موجب خوردگی و گرفتگی قطعات متحرک می‌شود، و مهندسان تلاش زیادی برای کاهش آن می‌کنند. از طرف دیگر، بدون اصطکاک نمی‌شود راه رفت، نمی‌شود مدادی به‌دست گرفت، و تازه اگر بشود هم، اصلاً نمی‌شود نوشت؛ حمل و نقل با وسایل چرخدار هم، چنانکه می‌دانیم، غیرممکن می‌شود.

حالا می‌خواهیم که نیروی اصطکاک را برحسب خواص جسم و محیط توصیف کنیم؛ یعنی می‌خواهیم قانون نیروی اصطکاک را بدانیم. درآنچه می‌آید، لغزش (نه غلتش) یک سطح خشک (روغنکاری نشده) را بر سطحی دیگر بررسی می‌کنیم. چنانکه بعداً خواهیم دید، اصطکاک در سطح میکروسکوپیک پدیده‌ای بسیار پیچیده است. قوانین نیروی اصطکاک لغزشی خشک، ماهیت تجربی دارند و نتایجشان هم تقریبی است. در این قوانین سادگی، دقت، و زیبایی قانون نیروی گرانشی (فصل ۱۶) یا قانون نیروی الکتروستاتیک (فصل ۲۷) وجود ندارد. اما جالب است که از بررسی سطوح بیشماری معلوم می‌شود که بسیاری از ویژگیهای اصطکاک را به‌طور کیفی می‌توان براساس چند سازوکار ساده فهمید.[1]

جسمی را در نظر بگیرید که روی میزی افقی ساکن است (شکل ۱الف) فنری به این جسم می‌بندیم که نیروی افقی $\mathbf{F}$ لازم برای به حرکت درآوردن آن‌را بسنجد. اگر نیروی کوچکی به جسم وارد کنیم، خواهیم دید که جسم حرکت نمی‌کند (شکل ۱ب) در این‌صورت، می‌گوییم که میز هم نیروی اصطکاک مقاوم $\mathbf{f}$ را بر جسم وارد می‌کند؛ این نیرو در راستای سطح تماس است. با افزایش نیرویی که اعمال می‌کنیم (شکلهای ۱ج و ۱د) خواهیم دید که نیروی معینی وجود دارد که در آن، جسم از سطح "کنده می‌شود" و شتاب می‌گیرد (شکل ۱هـ). پس از شروع حرکت، با کاهش مقدار نیرو خواهیم دید که می‌توان جسم را در حالت حرکتِ یکنواخت نگه داشت (شکل ۱و). شکل ۱ از نتایج یکی از آزمایشهای سنجش نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. در حدود $t = 2\mathrm{s}$، اعمال نیرو شروع می‌شود و این نیرو به‌تدریج افزایش می‌یابد. در این مدت، نیروی اصطکاک هم همراه با F زیاد می‌شود و جسم هنوز ساکن است. در $t = 4\mathrm{s}$، جسم یکباره شروع به حرکت می‌کند و از آن پس نیروی اصطکاک، مستقل از نیرویی که اعمال می‌شود، ثابت می‌ماند.

نیروی اصطکاک بین سطوحی که نسبت به هم ساکن‌اند، نیروی اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی (متناظر با قلهٔ $t = 4\mathrm{s}$ در شکل ۱ز) برابر است با کمترین مقدار نیروی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند. با شروع حرکت، نیروی اصطکاک بین سطوح معمولاً کم می‌شود، یعنی نیروی کمتری لازم است تا حرکت یکنواخت را حفظ کند (متناظر با نیروی تقریباً

۱. یک مرجع عمومی خوب برای اصطکاک، مقاله‌ای است که در دایرة‌المعارف بریتانیکا، ویراست چهاردهم، در این باره آمده است.



شکل۱. (الف تا د) نیروی خارجی **F** که به جسم ساکنی اعمال می‌شود؛ با نیروی اصطکاک **f** خنثی می‌شود. **f** با **F** هم‌اندازه، و در خلاف جهت آن است. با افزایش **F**، **f** هم زیاد می‌شود، تا وقتی که به حداکثر معینی برسد. (ه) در این حالت، جسم "کَنده می‌شود" و به طرف چپ شتاب می‌گیرد. (و) اگر بخواهیم که جسم با سرعت ثابت حرکت کند، باید نیروی **F** را از مقداری که درست پیش از به حرکت درآمدن جسم داشت کمتر کنیم. (ز) نتایج تجربی: نیروی **F** را، از حدود $t = ۲\mathrm{s}$، از مقدار صفر زیاد می‌کنیم، و حرکت تقریباً در زمان $t = ۴\mathrm{s}$ ناگهان شروع می‌شود[۱].

ثابت در $t > ۴\mathrm{s}$ در شکل ۱ز). نیروی اصطکاک بین سطوح متحرک نسبت به یکدیگر را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند.

برای بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بین هرزوج سطح خشک روغنکاری نشده، دو قانون تجربی داریم: ۱. این مقدار، در گستره‌ای وسیع تقریباً مستقل از مساحت ناحیهٔ تماس است و ۲. این مقدار، متناسب با نیروی عمود بر سطح است.[۲] نیروی عمود برسطح (که گاهی آن‌را نیروی باز می‌نامند) از خواص کشسانی اجسام در حال تماس با هم ناشی می‌شود (فصل ۱۴). چنین اجسامی هرگز به‌طور کامل صلب نیستند؛ اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و جسم نتواند در جهت نیرو حرکت کند، تغییر شکل می‌دهد (فشرده

و با نیروی وارد مقابله می‌کند. برای جسمی که روی یک میز افقی ساکن است یا می‌لغزد، اندازهٔ نیروی عمود بر سطح برابر با وزن جسم است. چون جسم شتاب عمودی ندارد، میز باید نیرویی بر آن وارد کرده باشد که به طرف بالاست و اندازهٔ آن با کشش رو به پایین زمین بر جسم، یعنی وزن جسم، برابر است.

نسبت بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی به اندازهٔ نیروی عمودی میان دو سطح را ضریب اصطکاک ایستایی آن سطوح می‌نامند. اگر f_s اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی باشد، می‌شود نوشت

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (۱)$$

که در آن، μ_s ضریب اصطکاک ایستایی و N اندازهٔ نیروی عمودی است. تساوی فقط وقتی برقرار است که f_s بیشترین مقدارش را داشته باشد.

در مورد نیروی اصطکاک جنبشی f_k بین سطوح خشک و روغنکاری نشده هم، دو قانون مشابه برقرار است. ۱. نیروی اصطکاک جنبشی، در گسترهٔ وسیعی، تقریباً مستقل از مساحت ناحیهٔ تماس دو سطح است. ۲. نیروی اصطکاک جنبشی متناسب با نیروی عمودی است. نیروی اصطکاک جنبشی، تا حدود زیادی از سرعت نسبی سطوح هم مستقل است.

نسبت اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی به اندازهٔ نیروی عمود بر سطح را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامند. اگر f_k نمایندهٔ اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی باشد، داریم

$$f_k = \mu_k N \qquad (۲)$$

که در آن، μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است.

μ_s و μ_k، هر دو ثابتِ بدون بعدند، زیرا نسبت (اندازهٔ) دو نیرو هستند. برای هر زوج سطح، معمولاً $\mu_s > \mu_k$ است. مقادیر واقعی μ_s و μ_k به چگونگی سطوح تماس بستگی دارد. در اغلب موارد می‌توان این دو مقدار را (برای یک زوج سطح معین) درگسترهٔ وسیعی از نیروها و سرعتهایی که با آنها سروکار داریم، ثابت فرض کرد. هم μ_s و هم μ_k می‌توانند بزرگتر از یک باشند، گرچه معمولاً کوچکتر از یک‌اند. در جدول ۱ مقادیر نوعی μ_s و μ_k برای بعضی مواد آمده است.

دقت کنید که روابط ۱ و ۲ فقط بین اندازه نیروی عمودی و نیروی اصطکاک برقرارند. نیروی اصطکاک و نیروی عمود بر سطح، همواره بر هم عمودند.

---

۱. برای آشنایی با جزئیات این آزمایش، رجوع کنید به "Undergraduate Computer-Interfacing Projects," Joseph Priest and John Snyder, *The Physics Teacher*, May 1987, p. 303.

۲. این دو قانون اصطکاک را ابتدا لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ تا ۱۵۱۹) به‌طور تجربی کشف کرد. بیان لئوناردو از این دو قانون، با توجه به اینکه دو قرن پیش از پرداخت مفهوم نیرو توسط نیوتون بود، کار بسیار مهمی بود. عبارتهای ریاضی قوانین اصطکاک و مفهوم ضریب اصطکاک را بعداً شارل اوگوستین کولن (۱۷۳۶ تا ۱۸۰۶) معرفی کرد. شهرت کولن بیشتر به خاطر مطالعاتش دربارهٔ الکتروستاتیک است (فصل ۲۲).

جدول ۱. ضرایب اصطکاک*.

سطوح	μ_s	μ_k
چوب بر چوب	۰٫۲۵ – ۰٫۵	۰٫۲
شیشه برشیشه	۰٫۹ – ۱٫۰	۰٫۴
فولاد بر فولاد، برای سطوح تمیز	۰٫۶	۰٫۶
فولاد بر فولاد، برای سطوح روغنکاری شده	۰٫۰۹	۰٫۰۵
لاستیک بر بتون خشک	۱٫۰	۰٫۸
چوب اسکی موم‌زده بر برف خشک	۰٫۰۴	۰٫۰۴
تفلون بر تفلون	۰٫۰۴	۰٫۰۴

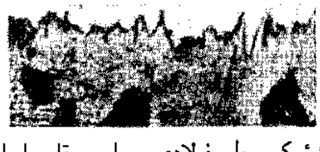
* مقادیر این جدول تقریبی‌اند و فقط برای تخمین مناسب‌اند. مقدار واقعی ضریب اصطکاک هر زوج سطح بستگی به شرایطی از قبیل تمیز بودن سطوح، دما، و رطوبت دارد.

اساس میکروسکوپی اصطکاک (اختیاری)

در مقیاس اتمی، صیقلی‌ترین سطوح هم خیلی با صفحه فرق دارند. مثلاً، شکل ۲ یک نمایهٔ واقعی از سطح فولاد فوق‌العاده صیقلی است، که البته، برای وضوح، خیلی‌خیلی درشت شده است. به‌راحتی می‌توان قبول کرد که وقتی دو جسم با هم در تماس باشند، مساحت میکروسکوپی واقعی ناحیهٔ تماس خیلی کمتر از مساحت واقعی سطوح است؛ در مواردی نسبت این دو مساحت می‌تواند حتی یک بر ده هزار باشد.

مساحت (میکروسکوپی) واقعی ناحیهٔ تماس با نیروی عمود بر سطح متناسب است، زیرا نقاط تماس، تحت تنشهای شدیدی که در این نقاط ایجاد می‌شود، مثل مواد پلاستیکی تغییر شکل می‌دهند. در واقع بسیاری از نقاط تماس با هم "جوشِ سرد" می‌خورند. علت این پدیده، چسبندگی سطحی است: در نقاط تماس مولکولهای دو طرف چنان به هم نزدیک می‌شوند که می‌توانند نیروهای قوی بین مولکولی بر هم وارد کنند.

وقتی جسمی (مثلاً فلزی) روی جسم دیگری کشیده می‌شود، دائماً هزاران جوش کوچک شکسته می‌شود و تماسهای جدیدی برقرار می‌شود (شکل ۳)، و همین پدیده است که موجب مقاومت اصطکاکی می‌شود. آزمایش با ردیابهای پرتوزایی نشان داده است که در این عمل شکستن جوشها، مقادیر کوچکی از یک سطح فلزی می‌توانند کنده شود و به سطح دیگر بچسبند. اگر سرعت نسبی سطوح به‌قدر کافی



شکل ۲. نمایهٔ بزرگ‌شدهٔ یک سطح فولادی بسیار صیقلی. ابعاد قائم بی‌نظمیهای سطح، چند هزار برابر قطر اتم است. برش طوری مایل انجام گرفته که مقیاس عمودی ۱۰ برابر مقیاس افقی بزرگ شده است.

زیاد باشد، ممکن است فلز در محل بعضی از نقاطِ تماس ذوب شود، اگرچه خودِ سطح در کل فقط کمی گرم می‌شود. همین رویدادهای "چسبیدن و لغزیدن" اند که موقع مالش سطوح بر یکدیگر تولید صدا می‌کنند؛ مثل جیرجیر گچ روی تخته سیاه.[۱]

ضریب اصطکاک به متغیرهای زیادی بستگی دارد، از جمله جنس مواد، پرداخت سطوح، لایه‌های سطحی، دما، و میزان ناخالصی. مثلاً، اگر دو سطح فلزی بسیار تمیز را در اتاقکی با خلأ شدید بگذاریم تا لایهٔ سطحی اکسید نتواند تشکیل شود، ضریب اصطکاک بسیار زیاد می‌شود و دو سطح در واقع محکم به هم "جوش می‌خورند". اگر کمی هوا وارد اتاقک کنیم، روی سطوح لایهٔ اکسید تشکیل می‌شود و ضریب اصطکاک کم می‌شود و به مقدار "عادی" اش می‌رسد.

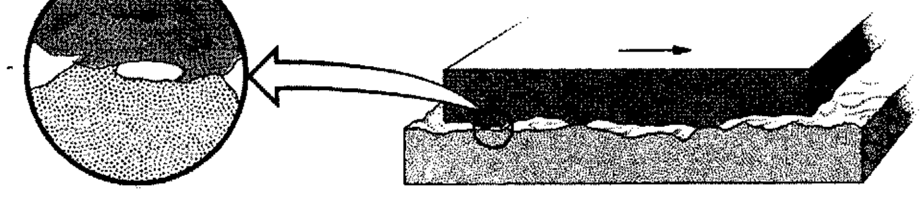
نیروی اصطکاکی که مانع غلتیدن اجسام بر هم می‌شود، خیلی کمتر از اصطکاک لغزشی است؛ همین است که موجب مزیت چرخ بر سورتمه می‌شود. علت عمدهٔ کاهشِ اصطکاک این است که در غلتش، جوشهای سطحی میکروسکوپیک از هم کنده و برداشته می‌شوند، در حالی‌که در لغزش، جوشها کشیده و بریده می‌شوند. چنین است که نیروی اصطکاک غلتشی چندین بار کوچکتر است.

مقاومت اصطکاکی در اصطکاک لغزشی خشک را با روغنکاری می‌توان به مقدار قابل‌توجهی کم کرد. یک نقاشی بر دیوار غاری در مصر، که زمان آن در حدود ۱۹۰۰ پیش از میلاد است، مجسمهٔ سنگی بزرگی را نشان می‌دهد که روی سورتمه‌ای کشیده می‌شود، و مردی در جلوی آن، روی مسیر روغن می‌ریزد. روش مؤثرتری هم وجود دارد و آن اینکه لایه‌ای از گاز بین سطوح لغزنده قرار بدهند. ریل هوایی آزمایشگاه و یاتاقان سوار بر "بالشتک گاز" دو نمونه از موارد استفادهٔ این روش‌اند. با معلق نگهداشتن اجسام به کمک نیروهای مغناطیسی، اصطکاک را از این هم می‌شود کمتر کرد. قطارهایی که (اخیراً ساخته می‌شوند) با استفاده از میدان مغناطیسی به حالت تعلیق در می‌آیند، قابلیت حرکت بسیار سریع و تقریباً بدون اصطکاک را دارند.

مثال ۱. جسمی روی سطح شیبداری که با سطح افقی زاویهٔ θ می‌سازد ساکن است (شکل ۴الف). با زیاد کردن زاویهٔ شیب، درمی‌یابیم که درست در $\theta_s = ۱۵°$ لغزش شروع می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیبدار چقدر است؟

حل: نیروهای وارد بر جسم، که آن‌را ذره در نظر می‌گیریم، در شکل ۴ب نشان داده شده است. وزن جسم mg، نیروی عمودی وارد بر جسم از سطح شیبدار $\mathbf{N}$، و نیروی اصطکاک وارد بر جسم از سطح شیبدار $\mathbf{f}_s$ است. توجه کنید که نیروی برایند وارد بر جسم از سطح شیبدار، $\mathbf{N} + \mathbf{f}_s$، دیگر بر سطح تماس عمود نیست (برخلاف حالتی که سطح بدون اصطکاک بود). چون جسم ساکن است، از قانون دوم

۱. می‌توانید رجوع کنید به
"Stick and Slip," Ernest Rabinowicz in *Scientific American*, May 1956, p. 109.



شکل۳. سازوکار اصطکاک لغزشی. (الف) سطح رویی، در این نمای بزرگ، روی سطح زیری به طرف راست می‌لغزد. (ب) تصویر بزرگ شده‌ای که دو نقطهٔ جوش سرد را نشان می‌دهد. برای شکستن این جوشها و ادامهٔ حرکت، نیرو لازم است.

نیوتون نتیجه می‌شود که $\sum \mathbf{F} = ۰$. نیروها را به مؤلفه‌های x و y (به‌ترتیب، در راستای سطح شیبدار و عمود بر آن) تجزیه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که

برای مؤلفهٔ x: $\sum F_x = f_s - mg\sin\theta = ۰$ یا

$f_s = mg\sin\theta$

برای مؤلفهٔ y: $\sum F_y = N - mg\cos\theta = ۰$ یا

$N = mg\cos\theta$

در زاویهٔ θ_s، که لغزش شروع می‌شود، f_s بیشترین مقدارش را دارد و برابر است با $\mu_s N$. مقادیر بالا را به‌ازای θ_s به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg\sin\theta_s}{mg\cos\theta_s} = \tan\theta_s$$

یا

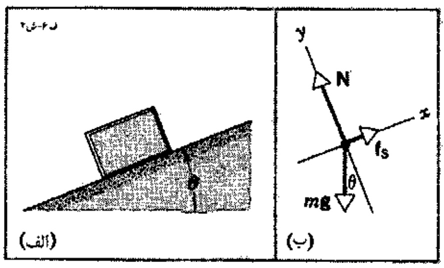
$$\mu_s = \tan\theta_s = \tan ۱۵° = ۰٫۲۷$$

بنابراین، سنجش زاویه‌ای که لغزش از آن آغاز می‌شود، روش تجربی ساده‌ای برای تعیین ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح است. توجه کنید که نتیجهٔ کار مستقل از وزن جسم است.

با استدلال مشابهی می‌توانید نشان بدهید که زاویهٔ سطح شیبدار θ_k، که به‌ازای آن جسم (که قبلاً با ضربهٔ کوچکی به‌راه افتاده است) با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_k = \tan\theta_k$$

که $\theta_k < \theta_s$ است. به کمک خط‌کش می‌شود تانژانت زاویهٔ شیب را اندازه گرفت؛ به این ترتیب، می‌توانید μ_s و μ_k را برای سکه‌ای که از روی کتابتان به پایین می‌لغزد تعیین کنید.



شکل۴. مثال ۱. (الف) جسمی که روی سطح شیبدار ناهمواری ساکن است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد این جسم.

مثال ۲. اتومبیلی با سرعت v_0 روی جادهٔ افقی مستقیمی حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک و جاده μ_s باشد، کمترین مسافت لازم برای توقف اتومبیل چقدر است؟

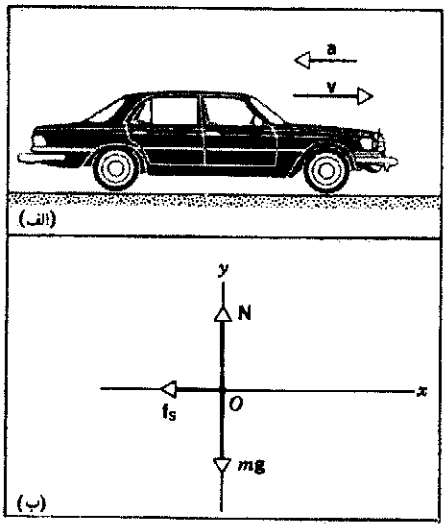
حل: شکل ۵ نیروهای وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم اتومبیل در جهت مثبت x حرکت می‌کند. اگر f_s را ثابت بگیریم، حرکت با شتاب ثابت کند می‌شود.

از رابطهٔ

$$v^۲ = v_0^۲ + ۲a(x - x_0)$$

با انتخاب مکان اولیهٔ $x_0 = ۰$ و سرعت نهایی $v = ۰$، نتیجه می‌شود که

$$x = -\frac{v_0^۲}{۲a}$$



شکل۵. مثال ۲. (الف) اتومبیلی با شتاب کندکننده. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد اتومبیل با شتاب کندکننده، که به عنوان ذره در نظر گرفته می‌شود. برای سادگی، نقطهٔ اثر همهٔ نیروها را در یک جا می‌گیریم: در واقع، سه نیرویی که در شکل مشخص شده‌اند، مجموع نیروهایی هستند که بر هر یک از چهار چرخ اتومبیل وارد می‌شوند.

x مسافت توقف است، که طی آن سرعت از $v_\circ$ به $\circ$ می‌رسد. چون a منفی است، x، چنان که انتظار می‌رود، مثبت است.

برای تعیین a، قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های شکل ۵ب به‌کار می‌بریم:

$$\text{مؤلفهٔ } x: \quad \sum F_x = -f_s = ma \quad \text{یا} \quad a = -f_s/m$$
$$\text{مؤلفهٔ } y: \quad \sum F_y = N - mg = \circ \quad \text{یا} \quad N = mg$$

بنابراین

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$$

این مقادیر را در عبارت a جایگذاری می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g$$

به‌این ترتیب، مسافت توقف برابر است با

$$x = -\frac{v_\circ^۲}{۲a} = \frac{v_\circ^۲}{۲\mu_s g}$$

هر چه سرعت اولیه بیشتر باشد، مسافت بیشتری برای توقف لازم است؛ در واقع، این مسافت با مجذور سرعت اولیه متناسب است. همچنین، هرچه ضریب اصطکاک میان سطوح بیشتر باشد، مسافت کمتری برای توقف لازم است.

در این مثال ضریب اصطکاک ایستایی را به‌کار بردیم نه ضریب اصطکاک جنبشی را، زیرا فرض کرده‌ایم که لاستیکها روی جاده نمی‌لغزند. به‌علاوه، فرض کرده‌ایم که بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی ($f_s = \mu_s N$) وارد می‌شود، زیرا می‌خواسته‌ایم کمترین مسافت توقف را پیدا کنیم. اگر نیروی اصطکاک ایستایی کوچکتر باشد، روشن است که مسافت توقف بیشتر می‌شود. روش صحیح ترمز کردن برای توقف در کمترین مسافت، آن است که حرکت اتومبیل را درست در آستانهٔ لغزش نگه داریم. (اتومبیلهای مجهز به سیستم ضد قفلِ ترمز، خود به‌خود چنین وضعیتی را فراهم می‌کنند.) اگر سطح جاده صاف باشد و پدال ترمز را تا ته فشار بدهیم، ممکن است لغزش رخ بدهد. در این حالت، μ_k جانشین μ_s می‌شود و مسافت لازم برای توقف بیشتر می‌شود، زیرا μ_k از μ_s کوچکتر است.

به عنوان مثالی مشخص، اگر $v_\circ = ۶۰\,\mathrm{mi/h} = ۲۷\,\mathrm{m/s}$، و $\mu_s = ۰٫۶۰$ باشد (که معمولاً هم در همین حدود است) نتیجه می‌شود

$$x = \frac{v_\circ^۲}{۲\mu_s g} = \frac{(۲۷\,\mathrm{m/s})^۲}{۲(۰٫۶۰)(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})} = ۶۲\,\mathrm{m}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم اتومبیل است. در اتومبیلهایی که موتورشان در جلوست ولی نیرو را به چرخ عقب منتقل می‌کنند، هنگام رانندگی در جاده‌های برفی اغلب سعی می‌کنند "چرخهای عقب را سنگین‌تر کنند"، یعنی مثلاً صندوق عقب را بار می‌کنند تا ایمنی رانندگی بیشتر شود. این تجربه را چگونه می‌توان با نتیجهٔ ما ــ مبنی بر مستقل از جرم بودنِ مسافت توقف ــ سازگار کرد؟ (راهنمایی: مسئلهٔ ۲ را ببینید.)

مثال ۳. مثال ۱۰ فصل ۵ را تکرار کنید، اما این بار نیروی اصطکاک میان جسم ۱ و سطح شیبدار را هم در نظر بگیرید. مقادیر $\mu_s = ۰٫۲۴$ و $\mu_k = ۰٫۱۵$ را به‌کار ببرید.

حل: اگر فرض کنیم، چنانکه در مثال ۱۰ فصل ۵ دیدیم، جسم ۱ از سطح شیبدار به پایین می‌لغزد، نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیبدار است. شکل ۶ نمودار جسم‌ـآزاد $m_۱$ را نشان می‌دهد. در این حالت، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای $m_۱$ عبارت‌اند از

$$\text{مؤلفهٔ } x: \quad \sum F_x = T + f - m_۱ g \sin\theta = m_۱ a_{۱x} = -m_۱ a$$
$$\text{مؤلفهٔ } y: \quad \sum F_y = N - m_۱ g \cos\theta = m_۱ a_{۱y} = \circ$$

در اینجا صریحاً این انتظار را که $a_۱$ باید در جهت منفی x باشد (یعنی $a_{۱x} = -a$)، وارد کرده‌ایم. در معادلهٔ مربوط به $m_۲$ هم تغییر مشابهی می‌دهیم:

$$\sum F_y = m_۲ g - T = m_۲ a_{۲y} = -m_۲ a$$

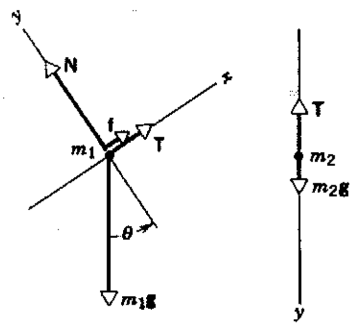
گذاشته‌ایم $a_{۲y} = -a$، زیرا انتظار داریم جسم ۲ در جهت منفی y حرکت کند.

با استفاده از $f = \mu_k N = \mu_k m_۱ g \cos\theta$، از مؤلفهٔ x معادلهٔ $m_۱$ نتیجه می‌شود که

$$T + \mu_k m_۱ g \cos\theta - m_۱ g \sin\theta = -m_۱ a$$

دو معادلهٔ اخیر را با هم حل می‌کنیم، و مجهولهای a و T را به‌دست می‌آوریم:

$$a = -g\frac{m_۲ - m_۱(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}{m_۱ + m_۲} \qquad (۳)$$
$$T = \frac{m_۱ m_۲ g}{m_۱ + m_۲}(۱ + \sin\theta - \mu_k \cos\theta) \qquad (۴)$$



شکل۶. مثال ۳. نمودارهای جسم‌ـآزاد شکل ۲۰ فصل ۵، با در نظر گرفتن اصطکاک در راستای سطح شیبدار.

توجه کنید که در حد $\mu_k \to ۰$، معادلات ۳ و ۴ به معادلات ۹ و ۱۰ مثال ۱۰ فصل ۵ تبدیل می‌شوند (تنها علامت a فرق می‌کند زیرا در این مورد آن‌را در خلاف جهت قبلی گرفته‌ایم).

مقدار عددی a و T را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a &= (-۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲}) \\ &\quad \times \frac{۲٫۶\mathrm{kg} - ۹٫۵\mathrm{kg}(\sin ۳۴^\circ - ۰٫۱۵ \cos ۳۴^\circ)}{۲٫۶\mathrm{kg} + ۹٫۵\mathrm{kg}} \\ &= ۱٫۲\,\mathrm{m/s^۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{(۹٫۵\mathrm{kg})(۲٫۶\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})}{۹٫۵\mathrm{kg} + ۲٫۶\mathrm{kg}} \\ &\quad \times (۱ + \sin ۳۴^\circ - ۰٫۱۵ \cos ۳۴^\circ) \\ &= ۲۹\mathrm{N} \end{aligned}$$

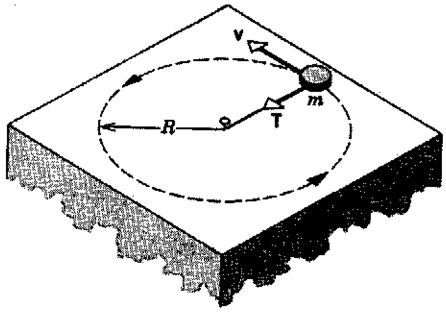
مثبت بودن a با طرح اولیهٔ ما برای معادلات سازگار است؛ جسم به طرف پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند، همان‌طور که در مثال ۱۰ فصل ۵ حرکت می‌کرد، اما شتاب آن از شتاب حالت بدون اصطکاک (که $۲٫۲\,\mathrm{m/s^۲}$ بود) کمتر است.

کشش ریسمان کمتر از حالت بدون اصطکاک (۳۱N) است. جسم ۱، در حضور اصطکاک با شتاب کمتری به پایین سطح شیبدار می‌رود؛ بنابراین، ریسمان متصل به جرم ۲ را با شدت کمتری می‌کشد.

پرسش دیگری که باید پاسخ بدهیم این است که اصولاً آیا سیستم حرکت می‌کند یا خیر. یعنی، آیا نیروی کافی برای غلبه بر اصطکاک ایستایی و شروع حرکت وجود دارد؟ اگر سیستم ابتدا در حالت سکون باشد، کشش ریسمان برابر با وزن $m_۲$، یعنی $(۲٫۶\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s^۲}) = ۲۶\mathrm{N}$ است. بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی، که با تمایل جسم ۱ برای حرکت به پایین سطح شیبدار مخالفت می‌کند، $\mu_s N = \mu_s m_۱ g \cos\,\theta = ۱۹\mathrm{N}$ است. مؤلفهٔ وزن $m_۱$ در جهت پایین سطح شیبدار $m_۱ g \sin\,\theta = ۵۲\mathrm{N}$ است. بنابراین، مؤلفهٔ وزن درجهت پایین سطح شیبدار (۵۲N) بیش از مقدار لازم برای غلبه بر مجموع نیروهای کشش و اصطکاک ایستایی $(۲۶\mathrm{N} + ۱۹\mathrm{N} = ۴۵\mathrm{N})$ است، و سیستم واقعاً حرکت می‌کند. خودتان باید بتوانید نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک ایستایی از ۰٫۳۴ بیشتر باشد، حرکتی در کار نخواهد بود.

۶ـ۳ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

در بخش ۴ـ۴ دیدیم جسمی که با سرعت ثابت v روی دایره یا کمانی به شعاع r حرکت می‌کند، شتاب مرکزگرای $\mathbf{a}$ دارد که اندازهٔ آن $v^۲/r$ است. $\mathbf{a}$ همواره در راستای شعاع و جهت آن به‌طرف مرکز دایره است. بنابراین، $\mathbf{a}$ یک بردار متغیر است، زیرا، اگرچه اندازهٔ آن ثابت است،



شکل ۷. قرصی به جرم m با سرعت ثابت در مسیری دایره‌ای بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. تنها نیروی افقی وارد بر قرص کشش $\mathbf{T}$ است که ریسمان با آن قرص را می‌کشد؛ $\mathbf{T}$ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای است. نیروهای عمودی ($m\mathbf{g}$ و $\mathbf{N}$) را در شکل نشان نداده‌ایم.

جهتش مدام تغییر می‌کند. می‌توانید به شکل ۱۱ فصل ۴ برگردید؛ این شکل رابطهٔ برداری بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ در حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را نشان می‌دهد.

طبق قانون دوم نیوتون ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) بر هر جسم شتابداری باید نیروی خالصی اثر کند. بنابراین (با فرض اینکه در یک چارچوب لخت قرار داریم)، اگر مشاهده کنیم که جسمی حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، می‌توانیم مطمئن باشیم که اندازهٔ نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر آن از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$\left|\sum \mathbf{F}\right| = ma = \frac{mv^۲}{r} \qquad (۵)$$

این جسم در حالت تعادل نیست زیرا نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست. جهت نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ در هر لحظه، باید با جهت $\mathbf{a}$ در همان لحظه یکی باشد؛ یعنی شعاعی و مرکزگرا. این نیرو را عامل (یا عوامل) خارجی، که در محیط جرم m واقع شده است، بر آن وارد می‌کند.

اگر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد قرصی باشد که به سر ریسمانی بسته شده است و روی میزی افقی و بدون اصطکاک حرکت می‌کند (شکل ۷)، نیروی خالص وارد بر قرص را کشش $\mathbf{T}$ ریسمان تأمین می‌کند. این نیرو به قرص شتاب می‌دهد و جهت سرعت آن‌را به‌طور پیوسته تغییر می‌دهد. به‌این ترتیب است که قرص می‌تواند روی دایره حرکت کند. جهت $\mathbf{T}$ همواره به طرف میخی است که در مرکز دایره است، و اندازهٔ آن باید برابر با $mv^۲/R$ باشد.

اگر ریسمان را قطع کنیم، دیگر نیروی خالصی وجود ندارد که بر قرص اثر کند. در این صورت، قرص با سرعت ثابت روی یک خط راست، در جهت مماس بر دایره در نقطه‌ای که از قید ریسمان رها شده است، حرکت خواهد کرد. این قرص در راستای شعاع از مرکز دور نمی‌شود، روی مسیر خمیده‌ای هم پیش نمی‌رود، بلکه دقیقاً روی خط راستی در جهت $\mathbf{v}$ در لحظهٔ بریدن ریسمان، حرکت می‌کند.

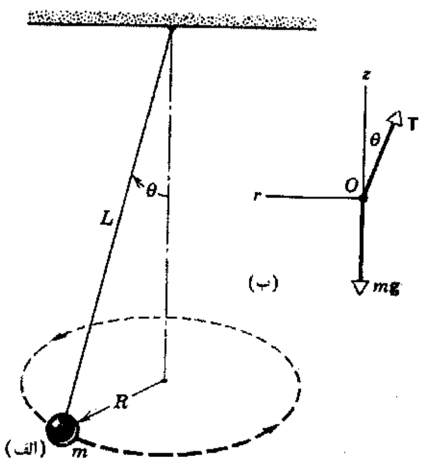
بنابراین، برای اینکه قرص روی دایره حرکت کند، باید نیرویی باشد تا آن‌را به طرف مرکز دایره، بکشد. نیرویی را که موجب حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌شود نیروی مرکزگرا می‌نامند، زیرا جهت این نیرو "به‌طرف مرکز" دایرهٔ حرکت است؛ اما باید توجه داشت که نام "مرکزگرا" برای نیرو، تنها به این معنی است که جهت آن شعاعی و به طرف داخل است؛ این اسم، هیچ چیز دربارهٔ ماهیت نیرو یا جسمی که آن‌را وارد می‌کند نمی‌گوید: در مورد قرصِ گردان شکل ۷، نیروی مرکزگرا یک نیرویی کششی است که ریسمانْ آن‌را فراهم می‌کند؛ در مورد ماه که به دور زمین می‌گردد، نیروی مرکزگرا کشش گرانشی زمین بر ماه است؛ در مورد الکترونی که به دور هستهٔ اتم می‌گردد، نیروی مرکزگرا از نوع الکتروستاتیک است. نیروی مرکزگرا نوع جدیدی از نیرو نیست، بلکه عبارتی برای توصیف رفتار زمانی بعضی نیروهاست، که همهٔ آنها را می‌توان به اجسام معینی در محیط جسم منسوب کرد. نیرو می‌تواند مرکزگرا و اصطکاکی، مرکزگرا و گرانشی، مرکزگرا و الکتروستاتیک، یا مرکزگرا و هر نوع دیگری باشد.

حالا چند نمونه از نیروهایی را که مرکزگرا عمل می‌کنند بررسی می‌کنیم.

آونگ مخروطی

شکل ۸ جسم کوچکی به جرم m را نشان می‌دهد که به سر ریسمانی به طول L بسته شده است و با سرعت ثابت v روی دایره‌ای افقی می‌گردد. با حرکت جسم، ریسمان سطح جانبی یک مخروط فرضی را می‌روبد. این وسیله را آونگ مخروطی می‌نامند. می‌خواهیم زمان یک دورگردش کامل جسم را به‌دست بیاوریم.

اگر زاویهٔ ریسمان با راستای عمودی θ باشد، شعاع مسیر دایره‌ای $R = L\sin\theta$ است. نیروهای وارد بر جسم عبارت‌اند از وزن جسم $m\mathbf{g}$ و کشش ریسمان $\mathbf{T}$ (شکل ۸ب). به این ترتیب، قانون دوم نیوتون



شکل۸. آونگ مخروطی (الف) جسمی به جرم m، که از ریسمانی به طول L آویزان است، روی دایره حرکت می‌کند؛ ریسمان مخروط قائمی با نیم‌زاویهٔ θ می‌سازد. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد جسم.

نتیجه می‌دهد که

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

روشن است که نیروی خالص وارد بر جسم مخالف صفر است، و باید هم این‌طور باشد زیرا نیرویی لازم است تا جسم بتواند با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند.

$\mathbf{T}$ را، در هر لحظه، به دو مؤلفهٔ شعاعی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$T_z = T\cos\theta \quad \text{و} \quad T_r = -T\sin\theta$$

اگر جهت شعاعی مثبت را به طرف خارج محور تعریف کنیم، مؤلفهٔ شعاعی منفی می‌شود.

چون جسم شتاب عمودی ندارد، مؤلفهٔ z قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_z = T_z - mg = 0$$

یا

$$T\cos\theta = mg$$

شتاب شعاعی $a_r = -v^2/R$ است؛ علامت منفی به‌خاطر آن است که شتاب به‌طرف داخل است (یعنی در خلاف جهت $\mathbf{r}$، که به عنوان جهت شعاعی مثبت گرفته‌ایم). این شتاب را T_r (مؤلفهٔ شعاعی $\mathbf{T}$) تأمین می‌کند، که همان نیروی مرکزگرای وارد بر m است. بنابراین، از مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_r = T_r = ma_r$$

یا

$$-T\sin\theta = -mv^2/R$$

از تقسیم معادلات مؤلفه‌های شعاعی و z برهم، نتیجه می‌شود که

$$\frac{-T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

v را از این معادله به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

از این رابطه، سرعت ثابت جسم به‌دست می‌آید. t را زمان یک گردش کامل جسم می‌گیریم، نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

یا

$$t = \frac{۲\pi R}{v} = \frac{۲\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = ۲\pi\sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}$$

اما $R = L \sin \theta$ است، پس

$$t = ۲\pi\sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} \qquad (۶)$$

این معادله، رابطهٔ بین t، L، و θ را به‌دست می‌دهد. توجه کنید که t، که دورهٔ تناوب حرکت نامیده می‌شود، به m بستگی ندارد.

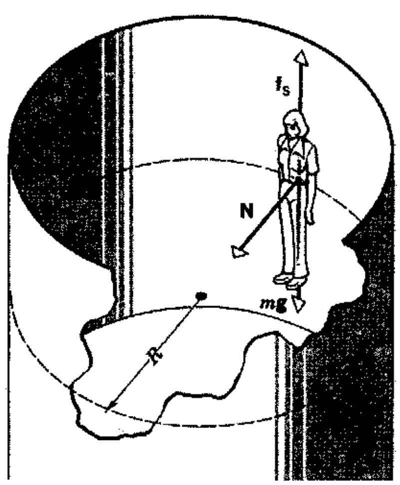
اگر $L = ۱٫۲\mathrm{m}$ و $\theta = ۲۵^\circ$ باشد، دوره یا زمان تناوب حرکت چقدر می‌شود؟ از رابطهٔ بالا داریم

$$t = ۲\pi\sqrt{\frac{(۱٫۲\mathrm{m})(\cos ۲۵^\circ)}{۹٫۸\mathrm{m/s^۲}}} = ۲٫۱\mathrm{s}$$

گردونه

در بسیاری از پارکهای تفریحی وسیله‌ای به نام گردونه وجود دارد. گردونه فضای استوانه‌ای توخالی‌ای است که می‌شود آن‌را حول محور قائم مرکزی استوانه به چرخش درآورد. شخص وارد گردونه می‌شود، در را می‌بندد، و کنار دیواره می‌ایستد. گردونه شروع به چرخیدن می‌کند، و به‌تدریج سرعتش زیاد می‌شود. در یک سرعت معین، "کف" زیرپای شخص به پایین می‌رود و حفرهٔ عمیقی زیرپای او ظاهر می‌شود. این شخص البته نمی‌افتد، بلکه "میخکوب" به دیوارهٔ گردونه باقی می‌ماند. کمترین سرعت گردونه که می‌تواند شخص را میخکوب نگه دارد چقدر است؟

شکل ۹ نیروهای وارد بر شخص را نشان می‌دهد. وزن شخص $m\mathbf{g}$ است، نیروی اصطکاک ایستایی میان شخص و دیوارهٔ گردونه $\mathbf{f}_s$ است، و $\mathbf{N}$ نیروی عمود بر سطحی است که دیواره برشخص وارد می‌کند. (خواهیم دید که همین نیرو، نیروی مرکزگرای لازم است.) اینجا



شکل۹. گردونه. نیروهای وارد بر شخص مشخص شده‌اند.

هم، مانند محاسبهٔ قبل، نیروها را به مؤلفه‌های شعاعی و قائم تجزیه می‌کنیم. جهت مثبت محور z را رو به بالا می‌گیریم؛ اگر قرار باشد شخص نیفتد، در راستای z نباید شتابی داشته باشیم. از مؤلفهٔ z قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = ۰$$

شعاع گردونه را R و سرعت مماسی شخص را v می‌گیریم. شتاب شعاعی شخص $-v^۲/R$ است؛ بنابراین، مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^۲}{R}$$

توجه کنید که، در این مورد، N همان نیروی مرکزگراست. اگر μ_s ضریب اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره باشد، برای اینکه درست در آستانهٔ لغزش باشیم، باید $f_s = \mu_s N$ باشد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s m v^۲}{R}$$

یا

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} \qquad (۷)$$

این معادله، ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغزش را به سرعت مماسی جسمی که واقع بر دیواره است مربوط می‌کند. توجه کنید که این نتیجه بستگی به وزن شخص ندارد.

عملاً، ضریب اصطکاک بین پارچهٔ لباس شخص و دیوارهٔ گردونه (با روکشی از جنس کرباس) در حدود ۰٫۴۰ است. شعاع گردونه هم، نوعاً $۲٫۰\mathrm{m}$ است؛ بنابراین، v باید حداقل در حدود $۷٫۰\mathrm{m/s}$ باشد. محیط مسیر دایره‌ای $۲\pi R = ۱۲٫۶\mathrm{m}$ است؛ با سرعت $۷٫۰\mathrm{m/s}$، طی یک دورکامل $t = ۱۲٫۶\mathrm{m}/(۷٫۰\mathrm{m/s}) = ۱٫۸۰\mathrm{s}$ طول می‌کشد. بنابراین، آهنگ دوران گردونه باید $۱/۱٫۸۰\mathrm{s} = ۰٫۵۶$ دور/s، یا در حدود ۳۳rpm، باشد، که همان سرعت چرخش گرامافونهای معمولی است.

پیچ با شیب عرضی

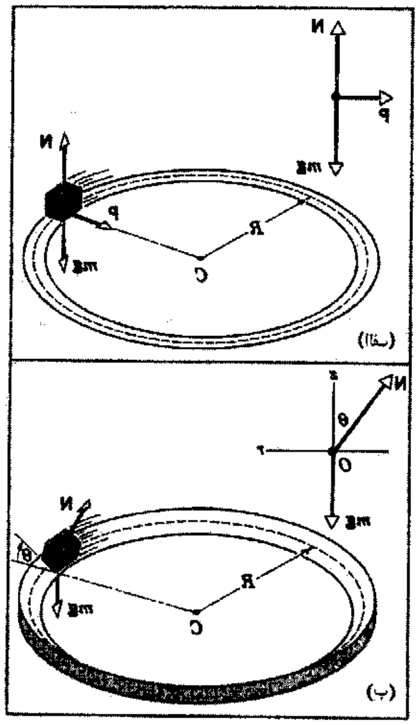
فرض کنید که جسم شکل ۱۰الف اتومبیل یا قطاری است که با سرعت ثابت v در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند و درپیچی به شعاع خمش R می‌پیچد. علاوه بر دو نیروی قائم، یعنی وزن $m\mathbf{g}$ و نیروی عمودی $\mathbf{N}$، یک نیروی افقی $\mathbf{P}$ هم باید بر اتومبیل وارد شود. نیروی $\mathbf{P}$ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت بر دایره است. در مورد اتومبیل، این نیرو از اصطکاک جانبی‌ای که جاده بر چرخها اعمال می‌کند تأمین می‌شود؛ در مورد قطار، نیرو را ریل برلبه‌های درونی چرخها وارد می‌کند. در هر یک از این دو نیرو، نمی‌شود اطمینان داشت که همیشه

و از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$\tan\theta = v^2/Rg \qquad (8)$$

توجه کنید که زاویهٔ مناسب شیب بستگی به سرعت اتومبیل و خمش جاده دارد و مستقل از جرم اتومبیل است؛ یعنی در یک شیب مناسب برای یک سرعت معین، انواع اتومبیلها می‌توانند با ایمنی حرکت کنند. شیب عرضی جاده را، برای یک خمش معین، براساس سرعت متوسطی که انتظار می‌رود طرح می‌کنند. معمولاً سر هر پیچ علامتی وجود دارد که سرعت مناسب، یعنی سرعتی را که شیب عرضی برای آن طرح شده است، مشخص می‌کند. اگر سرعت اتومبیل از این مقدار بیشتر شود، نیروی مرکزگرای اضافی را باید اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین کند تا بتوان پیچ را به‌سلامت طی کرد.

فرمول شیب عرضی را در حالتهای حدی $v = 0$، $R \to \infty$، v بزرگ، و R کوچک بررسی کنید. به این هم توجه کنید که اگر معادلهٔ ۸ را برای v حل کنیم، همان نتیجه‌ای حاصل می‌شود که برای سرعت وزنهٔ آونگ مخروطی به‌دست آمد. شکلهای ۸ و ۱۰ را با هم مقایسه کنید و به شباهتهایشان توجه کنید.



شکل ۱۰. (الف) جادهٔ افقی. نمودار جسم‌ـآزاد یک جسم متحرک در طرف چپ شکل آمده است. نیروی مرکزگرا باید از اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین شود. (ب) جادهٔ با شیب عرضی. برای پیچیدن ایمن در پیچ، اصطکاک ضرورتی ندارد.

مقدارشان کافی است، و هر دو نیرو هم باعث فرسایش غیر ضروری لاستیکها یا چرخها می‌شوند. به همین دلیل، مسیر را در پیچها با شیب عرضی می‌سازند؛ (شکل ۱۰ب). در این صورت، نیروی عمودی $\mathbf{N}$، هم مثل حالت قبل یک مؤلفهٔ عمودی دارد، و هم یک مؤلفهٔ افقی که نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین می‌کند. به این ترتیب، در مسیرهایی که به‌طور مناسب برای عبور وسایل نقلیه با سرعت معین طراحی شده باشند، نیروی جانبی دیگری لازم نیست.

برای محاسبهٔ زاویهٔ مناسب θ، در غیاب اصطکاک، می‌توانیم چنین عمل کنیم: طبق معمول، با قانون دوم نیوتون شروع می‌کنیم و به نمودار جسم‌ـآزاد شکل ۱۰ب برمی‌گردیم. شتاب قائم نداریم؛ بنابراین برای مؤلفهٔ قائم نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = N\cos\theta - mg = ma_z = 0$$

مؤلفهٔ شعاعی نیروی عمود بر سطح $-N\cos\theta$ است، و مؤلفهٔ شعاعی شتاب $-v^2/R$. بنابراین، از مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\sum F_r = -N\sin\theta = ma_r = -mv^2/R$$

۴ـ۶ معادلات حرکت: نیروهای ثابت و متغیر[1]

بیایید، به‌طور خلاصه، پیشرفتهایمان را در مطالعهٔ دینامیک و سینماتیک مرور کنیم. هدف نهایی آن است که حرکت ذره‌ای را که تحت تأثیر چند نیروست توصیف کنیم، طرح این تحلیل را (در یک‌بعد) می‌توان چنین نشان داد:

$$\sum F \to a \to x(t), v(t)$$

منظور این است که با استفاده از قوانین نیوتون (که در فصل ۵ بررسی شد)، شتاب هر ذره را از نیروی خالص وارد برآن به‌دست می‌آوریم. مرحلهٔ بعد، مرحله‌ای ریاضی است که در آن مکان و سرعت را (در هر زمان t) از مکان و سرعت اولیه و شتاب محاسبه می‌کنیم.

به‌استثنای حرکت دایره‌ای که در بخش قبلی مطالعه شد، تا به حال فقط نیروهای ثابت را بررسی کرده‌ایم (یعنی نیروهایی که مستقل از زمان، سرعت، یا مکان‌اند). اگر نیرو ثابت باشد، شتاب هم ثابت است، و در حالت شتاب ثابت در یک‌بعد، $x(t)$ و $v(t)$ به‌راحتی به‌دست می‌آیند؛ همان‌طور که در بخش ۲ـ۶ دیدیم. به این ترتیب، نیروهای ثابت را به‌طور کامل تحلیل کردیم.

اگر نیرو ثابت نباشد، باز هم می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون شتاب را به‌دست بیاوریم اما دیگر نمی‌توانیم فرمولهای شتاب ثابت بخش ۲ـ۶ را برای محاسبهٔ $v(t)$ و $x(t)$ به‌کار ببریم. در این مورد باید از روشهایی شامل حساب انتگرال استفاده کنیم.

۱. بخشهای ۶ـ۴ تا ۶ـ۷ شامل مقدماتی از حساب انتگرال‌اند. مطالب این بخشها را می‌توان حذف کرد، یا، تا زمانی که دانشجو آشنایی بیشتری با روشهای انتگرال‌گیری پیدا کند، به تعویق انداخت.

پیش از تحلیل نیروهای متغیر، حساب انتگرال را برای نیروی ثابت به‌کار می‌بریم و همان نتایج بخش ۲ـ۶ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم شتاب a را (از قوانین نیوتون) داریم و می‌خواهیم $v(t)$ و $x(t)$ را پیدا کنیم. از اینجا شروع می‌کنیم که $a = dv/dt$. به‌این ترتیب،

$$dv = a\ dt \qquad (۹)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم. در طرف چپ، متغیر انتگرال‌گیری سرعت است، و حدود انتگرال‌گیری از v_0 در زمان ۰ تا v در زمان t، در طرف راست، روی زمان و از ۰ تا t انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt \qquad (۱۰)$$

وقتی شتاب ثابت باشد، a از انتگرال طرف راست بیرون می‌آید و نتیجه می‌شود که

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \qquad (۱۱)$$

یا

$$v(t) = v_0 + at \qquad (۱۲)$$

که همان معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ است.

در ادامه، با استفاده از $v = dx/dt$ و با یک انتگرال‌گیری دیگر، $x(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$dx = v\ dt = (v_0 + at)dt = v_0\, dt + at\ dt \qquad (۱۳)$$

حدود انتگرال از مکان x_0 در زمان ۰ تا مکان x در زمان t است:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0\, dt + \int_0^t at\ dt \qquad (۱۴)$$

چون a ثابت است باز هم آن‌را از انتگرال بیرون می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t\ dt \\ &= v_0 t + a\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (۱۵) \end{aligned}$$

این معادله، همان معادلهٔ ۱۹ فصل ۲ است.

اگر شتاب ثابت نباشد، انتگرال‌گیریها مشکلتر می‌شود. گرفتن انتگرال ۱۰ و انتگرال ۱۴ و به‌دست آوردن توابع صریح $v(t)$ و $x(t)$، روش تحلیلی حل مسئله است. روش دیگر، روش عددی است، که در آن به کمک کامپیوتر انتگرالها را محاسبه می‌کنیم و [illegible] توابع تحلیلی $v(t)$ و $x(t)$، مقادیر عددی v و x را در هر زمان t به‌دست می‌آوریم. این کار را با هر میزان دقت که لازم باشد می‌شود انجام داد.

نیروی ثابت کاربرد قوانین نیوتون را نشان می‌دهد، و البته کارکردن با نیروهای ثابت ساده‌تر از کارکردن با نیروهای متغیر است. خوشبختانه در اغلب مسائل عملی نیروهایی وجود دارند که در شرایط بسیاری می‌توان به تقریب ثابت فرضشان کرد؛ مثلاً گرانش درنزدیکی سطح زمین، نیروی اصطکاک، نیروی کشش ریسمان، و مانند آن. اما خیلی از شرایط فیزیکی هم هستند که نمی‌توان با نیروی ثابت به خوبی توصیفشان کرد. در این موارد برای حل مسئله یا باید روشهای تحلیلی به‌کار برد یا روشهای عددی. چند مثال از این نیروها می‌آوریم:

۱. نیروهای وابسته به زمان. در فصل ۲، اتومبیل را پس از ترمز کردن، با فرض اینکه شتاب آن ثابت باشد، تحلیل کردیم. در عمل، به‌ندرت چنین اتفاقی می‌افتد. در بسیاری از موارد، به ویژه در سرعتهای زیاد،معمولاً راننده در ابتدا آرام ترمز می‌گیرد و سپس، با کند شدن حرکت، پدال را به‌تدریج شدیدتر فشار می‌دهد. بنابراین، نیروی ترمز، طی مدتی که حرکت اتومبیل کند می‌شود، بستگی به زمان دارد؛ تابع $a(t)$ بستگی به جزئیات ترمز کردن دارد.

مثال دیگر نیروهای وابسته زمان، نیروی مربوط به موجی است‌که از محیطی می‌گذرد. موج صوتی را در هوا در نظر بگیرید؛ در هر نقطه، موج به‌طور سینوسی با زمان تغییر می‌کند. بنابراین، نیروی وارد بر تک تک مولکولهای هوا هم در زمان به‌طور سینوسی، و با همان فرکانس موج، تغییر می‌کند. بستگی زمانی شتاب ذره نیز مثل بستگی زمانی نیروست.

۲. نیروهای وابسته به سرعت. نمونهٔ آشنای نیروهای وابسته به سرعت، نیروی مقاومتی است که بر اجسام متحرک در محیط شاره، مثل هوا یا آب، وارد می‌شود. این نیروی اصطکاکی، با افزایش سرعت زیاد می‌شود. شاید خود شما هم، هنگام راه‌رفتن در استخر، به این پدیده برخورده باشید. اگر آرام راه بروید، نیروی مقاوم کمی احساس خواهید کرد، اما وقتی به‌سرعت حرکت می‌کنید، نیروی مقاوم وارد بر پاهایتان می‌تواند بسیار بزرگ باشد. هر چه تندتر حرکت‌کنید، نیروی مقاوم بیشتر می‌شود.

حرکت پرتابی هم به‌شدت تحت تأثیر نیروی اصطکاک شاره‌هاست، هر چند، در تحلیل اجسام افتان و پرتابه‌ها در فصلهای ۲ و ۴ این نیروها را نديده گرفتیم. برد پرتابه‌ای مثل توپ بیسبال، به‌ازای سرعت اولیهٔ معین، ممکن است حدود نصف مقداری باشد که از تحلیل بخش ۴ـ۳ به‌دست می‌آید. جسمی که مسافتی طولانی را سقوط کند، دیگر از معادلات سقوط آزاد بخش ۲ـ۷ پیروی نخواهد کرد؛ طبق این معادلات، سرعت جسم می‌تواند به‌طور نامحدود زیاد شود. برعکس، هر چه سرعت بزرگتر شود، نیروی اصطکاک هم بزرگتر می‌شود، و این نیرو می‌خواهد که جلوی افزایش بیشتر سرعت را بگیرد. در واقع، چنان‌که در بخش ۶ـ۷ خواهیم دید، سرعت به حدی (سرعت حد) می‌گراید که نمی‌تواند از آن بیشتر شود. (برای بیشتر اجسام، این پدیده در سرعتهای [illegible] متناظر با مسافتهای سقوط از مرتبهٔ ۱۰۰ m است.

برای ۱ یا ۲ متر سقوط در آزمایشگاه، این پدیده قابل چشمپوشی است و می‌توان معادلات بخش ۲ـ۷ را با اطمینان به‌کار برد.)

۳. نیروهای وابسته به مکان. مثال آشنای نیروهای وابسته به مکان، نیروی بازگرداننده فنری است که به اندازهٔ x از حالت تعادلش کشیده شده است؛ این فنر نیروی $F = -kx$ وارد می‌کند. شتاب جسمی به جرم m که به فنر بسته شده است، $a = F/m = -kx/m$ است. اگر جسم را به فاصلهٔ x جابه‌جا کنیم، نیرویی بر آن وارد می‌شود که می‌خواهد آن‌را به‌طرف نقطهٔ تعادل بکشد. اگر جسم را رها کنیم، به طرف نقطهٔ تعادل حرکت خواهد کرد؛ در بازگشت به طرف تعادل، جابه‌جایی x کم می‌شود و شتاب هم همین‌طور. هنگامی که جسم از نقطهٔ تعادل می‌گذرد، شتاب آن به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود، اما پس از آن جسم از $x = ۰$ هم رد می‌شود و اندازهٔ شتاب دوباره بزرگ می‌شود.

ساده‌ترین راه تحلیل نیروهای وابسته به مکان، استفاده از روشهای کار و انرژی است، که در فصل ۷ و ۸ به آنها خواهیم پرداخت. در بخشهای بعدی این فصل چند روشِ تحلیل نیروهای وابسته به زمان یا سرعت را، با استفاده از قوانین نیوتون، بررسی می‌کنیم.

۵ـ۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای تحلیلی

با استفاده از قوانین نیوتون به شکل معمول، برای نیروهای وابسته به زمان، یک شتاب $a(t)$ به‌دست می‌آید که به زمان بستگی دارد. در این موارد می‌توانیم درست مثل بخش ۶ـ۴ عمل کنیم و سرعت را با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست بیاوریم. $a = dv/dt$ را به‌صورت $dv = a(t)dt$ می‌نویسیم و از $t = ۰$ (سرعت اولیهٔ $v_۰$) تا t (سرعت اولیهٔ v) انتگرال می‌گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که حرکت یک‌بعدی است، اما تعمیم نتایج به سه‌بعد هم سرراست است. داریم

$$\int_{v_۰}^{v} dv = \int_۰^t a(t)dt$$

$$v - v_۰ = \int_۰^t a(t)dt$$

$$v(t) = v_۰ + \int_۰^t a(t)dt \qquad (۱۶)$$

معادلات بالا را با معادلات ۱۰ تا ۱۲ مقایسه کنید؛ تنها تفاوتشان در این است که a در داخل انتگرال باقی می‌ماند.

وقتی $v(t)$ به‌دست آمد، می‌شود این روش را تکرار کردو $x(t)$ را به‌دست آورد. از $v = dx/dt$ داریم $dx = v(t)dt$، و با انتگرال‌گیری مشابهی از $t = ۰$ (مکان اولیهٔ $x_۰$) تا t (مکان x) نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_۰}^{x} dx = \int_۰^t v(t)dt$$

$$x - x_۰ = \int_۰^t v(t)dt$$

$$x(t) = x_۰ + \int_۰^t v(t)dt \qquad (۱۷)$$

این را هم با معادلات ۱۴ و ۱۵ مقایسه کنید و ببینید که اگر a ثابت باشد، معادلهٔ ۱۷ به معادلهٔ ۱۵ تبدیل می‌شود.

مثال ۴. اتومبیلی با سرعت ۱۰۵km/h (در حدود ۶۵mi/h یا $۲۹{,}۲\text{m/s}$) حرکت می‌کند. راننده ناگهان ترمز می‌کند، اما با نیروی افزایش‌یابنده، طوری که شتاب کندکننده متناسب با زمان به‌صورت $a(t) = ct$ زیاد می‌شود، که در آن $c = -۲{,}۶۷\text{m/s}^۳$ است. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا اتومبیل متوقف شود؟ (ب) در این مدت اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) باید عبارتی برای $v(t)$ پیدا کنیم تا بتوانیم زمانی را که $v = ۰$ می‌شود به‌دست بیاوریم. با استفاده از معادلهٔ ۱۶، با $a(t) = ct$، نتیجه می‌شود که

$$v(t) = v_۰ + \int_۰^t ct\, dt = v_۰ + \frac{۱}{۲}ct^۲$$

به‌جای $v(t)$ صفر می‌گذاریم و زمان $t_۱$ را، که در آن اتومبیل ساکن می‌شود، به‌دست می‌آوریم:

$$۰ = v_۰ + \frac{۱}{۲}ct_۱^۲$$

$$t_۱ = \sqrt{\frac{-۲v_۰}{c}} = \sqrt{\frac{-۲(۲۹{,}۲\text{m/s})}{-۲{,}۶۷\text{m/s}^۳}} = ۴{,}۶۸\text{s}$$

$۴{,}۶۸\text{s}$ طول می‌کشد تا اتومبیل بایستد.

(ب) برای اینکه ببینیم اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید، باید عبارتی برای $x(t)$ به‌دست بیاوریم. به‌این منظور، باید طبق معادلهٔ ۱۷ از $v(t)$ انتگرال بگیریم:

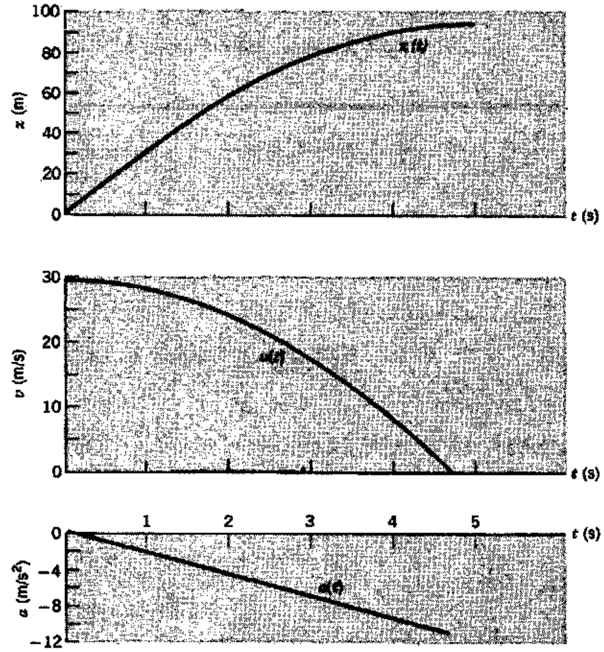
$$x(t) = x_۰ + \int_۰^t (v_۰ + \frac{۱}{۲}ct^۲)dt = x_۰ + v_۰t + \frac{۱}{۶}ct^۳$$

به‌ازای $t = t_۱ = ۴{,}۶۸\text{s}$، مسافت پیموده شده (با $x_۰ = ۰$) برابراست با

$$x(t_۱) = ۰ + (۲۹{,}۲\text{m/s})(۴{,}۶۸\text{s}) + \frac{۱}{۶}(-۲{,}۶۷\text{m/s}^۳)(۴{,}۶۸\text{s})^۳ = ۹۱{,}۰\text{m}$$

شکل ۱۱ بستگی زمانی x، v، و a را نشان می‌دهد. برخلاف حالتِ شتاب ثابت، $v(t)$ خط راست نیست.

با این روشِ ترمز کردن، بیشترین تغییر سرعت در حوالی پایان حرکت انجام می‌شود. تغییر سرعت در نخستین ثانیهٔ پس از ترمز کردن،تنها $۱{,}۳\text{m/s}$ (در حدود ۳mi/h) است؛ اما در آخرین ثانیهٔ حرکت، سرعت $۱۱{,}۲\text{m/s}$ (در حدود ۲۵mi/h) تغییر می‌کند. (به یاد دارید که در حالت شتاب ثابت، تغییرسرعت در بازه‌های زمانی



شکل۱۱. مثال ۴ $x(t)$ و $v(t)$ حاصل از $a(t)$، که به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند.

مساوی یکسان بود.) فکر می‌کنید که این روش ترمزکردن فایده‌ای هم دارد؟ ضرر چطور؟

۶ـ۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای عددی (اختیاری)

با روش تحلیلی بخش قبلی، علی‌الاصول با داشتن $a(t)$ می‌شود $x(t)$ و $v(t)$ را به‌دست آورد. اما خیلی وقتها این روش عملی یا مطلوب نیست. مثلاً ممکن است انتگرالها شکل تحلیلی نداشته باشند، یا شاید شکل آنها آنقدر پیچیده باشد که جوابهای حاصل کمکی به بصیرت فیزیکی ما از مسئله نکنند. استفاده از روشهای عددی راه مناسب دیگری درکنار روشهای تحلیلی است، و البته روشهای عددی بخصوص وقتی مفیدند که روشهای تحلیلی قابل استفاده نباشند.

در روش عددی مسئله را به این ترتیب تقریب می‌زنیم؛ بازهٔ زمان مورد نظر را به تعداد زیادی بازهٔ کوچک تقسیم می‌کنیم، و در هر بازه معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار می‌بریم. اما این مقدارِ "ثابت" از یک بازه به بازهٔ دیگر تغییر می‌کند. یک انتخاب مناسب برای شتاب ثابت هر بازه، شتاب متوسط آن بازه است.

هرچه بازه‌ها راکوچکترکنیم، روش بهترکار می‌کند و جواب دقیقتری به‌دست می‌آید؛ هر چه بازه‌ها کوچکتر باشد، شتاب متوسط (ثابت) بهتر شتاب واقعی را تقریب می‌کند. از طرف دیگر، هر چه بازه‌ها کوچکتر بشوند تعداد آنها زیادتر می‌شود، و به این ترتیب باید محاسبات تکرارشوندهٔ متعددی انجام بدهیم. این درست همان نوع کاری است

که کامپیوتر به‌خوبی انجام می‌دهد. بنابراین، روش حل عددی مسئله را، با کامپیوتر، می‌توان با دقت دلخواه به‌کار گرفت.

شکل ۱۲ طرح کلی این روش را، در حالت شتاب متغیر مثال ۴ نشان می‌دهد. ناحیهٔ بین $t = ۰$ و $t = ۵s$ به ۱۰ بازهٔ کوچک، هر یک به‌اندازهٔ $\delta t = ۰٫۵s$، تقسیم شده است. تابع $a(t)$ را در هر بازه با یک مقدار ثابت (شتاب متوسط، که در این حالتِ خطی، برابر با a در وسط بازه هم هست) تقریب زده‌ایم. در بازهٔ اول، شتاب متوسط از مقادیر a در $t = ۰$ و $t = ۰٫۵s$ به‌دست می‌آید:

$$\overline{a}_۱ = \frac{۱}{۲}[a(۰) + a(۰٫۵s)] = \frac{۱}{۲}[۰ + (-۲٫۶۷m/s^۳)(۰٫۵s)]$$
$$= -۰٫۶۷m/s^۲$$

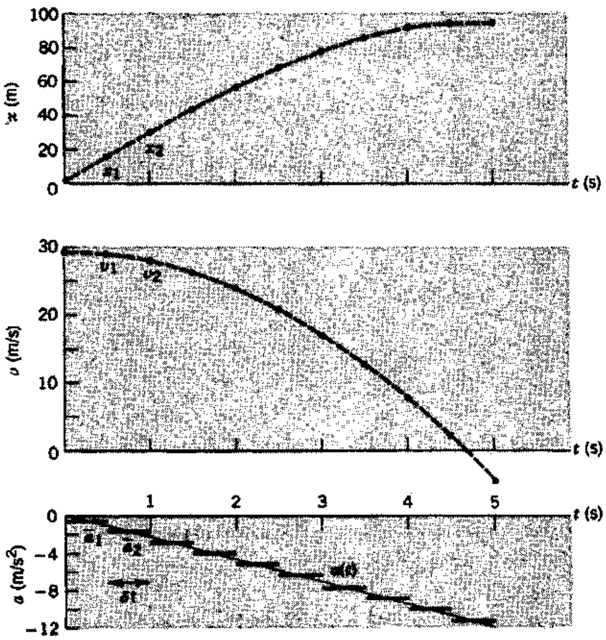
تغییر سرعت در بازهٔ اول، $\delta v_۱$، تقریباً برابر است با

$$\delta v_۱ = \overline{a}_۱ \delta t = (-۰٫۶۷m/s^۲)(۰٫۵s) = -۰٫۳۴m/s$$

بنابراین، سرعت در $t = ۰٫۵s$ عبارت است از

$$v_۱ = v_۰ + \delta v_۱ = ۲۹٫۲m/s - ۰٫۳۴m/s = ۲۸٫۹m/s$$

برای یافتن جابه‌جایی طی بازهٔ اول، ابتدا سرعت متوسط را در این بازه



شکل۱۲. جواب عددی (نقاط نشان داده شده در شکل) مثال ۴؛ این جواب را با جواب تحلیلی مقایسه کنید (شکل ۱۱ و منحنیهای خط‌چین). در هر یک از بازه‌های ۰٫۵s، شتاب را ثابت فرض می‌کنیم، و مکان و سرعت را در نقطهٔ پایانی بازه حساب می‌کنیم، که نقاط رسم شده در شکل را به‌دست می‌دهند. هر چه بازه‌های بیشتر (و کوچکتر)ی بگیریم. نقاط بیشتر منحنیهای پیوسته‌ای $x(t)$ و $v(t)$ به‌دست می‌آید.

به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) = \frac{1}{2}(29{,}2\,\mathrm{m/s} + 28{,}9\,\mathrm{m/s}) = 29{,}1\,\mathrm{m/s}$$

جابه‌جایی δx_1 در این بازه، تقریباً برابر است با

$$\delta x_1 = \overline{v}_1 \delta t = (29{,}1\,\mathrm{m/s})(0{,}5\,\mathrm{s}) = 14{,}6\,\mathrm{m}$$

اگر نقطهٔ شروع را $x_0 = 0$ بگیریم، مکان در پایان بازهٔ اول چنین به‌دست می‌آید

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14{,}6\,\mathrm{m} = 14{,}6\,\mathrm{m}$$

مقادیر v_1 و x_1 در $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$، در شکل ۱۲ رسم شده‌اند.

اکنون به بازهٔ دوم می‌رویم و همین روش را تکرار می‌کنیم. در اینجا شتاب متوسط برابر است با

$$\overline{a}_2 = \frac{1}{2}[a(0{,}5\,\mathrm{s}) + a(1{,}0\,\mathrm{s})] = \frac{1}{2}[(-2{,}67\,\mathrm{m/s^3})(0{,}5\,\mathrm{s}) + (-2{,}67\,\mathrm{m/s^3})(1{,}0\,\mathrm{s})] = -2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$$

با ادامهٔ کار، به همان روش بازهٔ اول، نتیجه می‌شود که

$$\delta v_2 = \overline{a}_2 \delta t = (-2{,}00\,\mathrm{m/s^2})(0{,}5\,\mathrm{s}) = -1{,}0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_2 = v_1 + \delta v_2 = 28{,}9\,\mathrm{m/s} - 1{,}0\,\mathrm{m/s} = 27{,}9\,\mathrm{m/s}$$

و

$$\overline{v}_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(28{,}9\,\mathrm{m/s} + 27{,}9\,\mathrm{m/s}) = 28{,}4\,\mathrm{m/s}$$
$$\delta x_2 = \overline{v}_2 \delta t = (28{,}4\,\mathrm{m/s})(0{,}5\,\mathrm{s}) = 14{,}2\,\mathrm{m}$$
$$x_2 = x_1 + \delta x_2 = 14{,}6\,\mathrm{m} + 14{,}2\,\mathrm{m} = 28{,}8\,\mathrm{m}$$

مقادیر v_2 و x_2 سرعت و مکان در پایان بازهٔ دوم‌اند، که در شکل ۱۲ در $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ رسم شده‌اند.

با تکرار روش در هر ۱۰ بازه، نقاط باقی‌ماندهٔ شکل ۱۲ به‌دست می‌آید.

از مقایسهٔ شکلهای ۱۱ و ۱۲، می‌توان دید که توافق جواب عددی با جواب تحلیلی چقدر خوب است، حتی در اینجا که فقط ۱۰ بازه به کار برده‌ایم. کامپیوتر می‌تواند به سادگی ~~این محاسبات~~ را برای ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ بازه انجام بدهد، و در چنین حالتی نقاط رسم شده برای x و v بسیار نزدیک به یک منحنی هموار می‌شوند.

از درونیابی سرعت بین نقاط پایانی بازهٔ آخر، نتیجه می‌شود که اتومبیل در حدود زمان ۴٫۷s متوقف می‌شود؛ درست همان مقداری که در جواب تحلیلی به‌دست آمده بود. از شکل ۱۲ مسافت پیموده شده را تخمین می‌زنیم؛ این مسافت در حدود ۹۱m است، که باز هم با مقدار تحلیلی سازگار است.

البته مقدار منفی v در پایان بازهٔ دهم، در این مسئله بی‌معنی است: شرایط دینامیکی مسئله چنان است که سرعت نمی‌تواند منفی شود، زیرا با ترمز کردن نمی‌توان اتومبیل را واداشت که به عقب حرکت کند. اما ادامهٔ محاسبهٔ عددی تا این نقطه از آن جهت مفید است که به تحلیل بازهٔ آخر کمک می‌کند.

در پیوست ب، یک برنامهٔ کامپیوتری (به‌زبان بیسیک) آمده است که می‌تواند این محاسبه را انجام بدهد. با تغییرات کوچکی در این برنامه، می‌شود همین محاسبات را برای هر شکلی از $a(t)$ انجام داد.

۶ـ۷ اصطکاک شاره‌ها و حرکت پرتابی

قطره‌های باران از ابرهایی سقوط می‌کنند که ارتفاع (h) آنها از سطح زمین در حدود ۲km است. با استفاده از معادلهٔ سقوط آزاد اجسام (معادلهٔ ۲۵ فصل ۲)، انتظار داریم که این قطره‌ها با سرعت $v = \sqrt{2gh} \approx 200\,\mathrm{m/s}$، یا در حدود $440\,\mathrm{mi/h}$ به زمین برخورد کنند. برخورد پرتابه‌ای چنین سریع با آدمیزاد، حتی اگر این پرتابه قطرهٔ باران باشد، مرگ‌آور است؛ پس قطره‌های باران خیلی کندتر از اینها حرکت می‌کنند، و معلوم است که در جایی از محاسبات خطا کرده‌ایم.

اشکال کار اینجاست که اثر نیروی مقاومت هوا بر قطرهٔ افتان را نادیده گرفته‌ایم. این نیرو، نیروی اصطکاک شاره است که بر اجسامی که درآن حرکت می‌کنند وارد می‌شود. چنین نیروهایی، در موارد گوناگون، آثار مهمی دارند؛ مثلاً در اثر این نیرو توپ بیسبال به مقدار قابل‌ملاحظه‌ای از مسیر ایده‌آل بدون اصطکاک منحرف می‌شود؛ این نیرو سرعت اسکی‌باز را هم کم می‌کند و اسکی‌باز بدن خودش را در چنان حالتی قرارمی‌دهد که اثر آن‌را کم کند؛ در طراحی هواپیما و کشتی هم باید اثر این نیروها را در نظر گرفت. از دید اجسام افتان، از قطرهٔ باران گرفته تا چترباز، نیروی اصطکاک شاره‌ها نمی‌گذارد که سرعت به طور نامحدود زیاد شود، بلکه یک سرعت بیشینه، یا حد، تعیین می‌کند که جسم در حال سقوط نمی‌تواند از آن تندتر حرکت کند.

یکی از ویژگیهای خاص نیروی اصطکاک شاره‌ها آن است که این نیرو به سرعت بستگی دارد: هرچه جسم سریعتر حرکت کند، نیروی اصطکاک هم بیشتر می‌شود. بنابراین، برای تحلیل سینماتیک مسئله باید از روشهای انتگرال استفاده کرد.

اگر نیرو، و در نتیجه شتاب، تابع سرعت باشد، روشهای بخش ۶ـ۵ برای نیروهای وابسته به زمان را باید قدری تغییر داد. چنانکه در معادلهٔ ۱۶ دیدیم، از $a = dv/dt$ شروع می‌کنیم، اما در اینجا a تابع سرعت،

یعنی $a(v)$ است:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

از این رابطه می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت:

$$\int_{v_\circ}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{\circ}^{t} dt = t \qquad (۱۸)$$

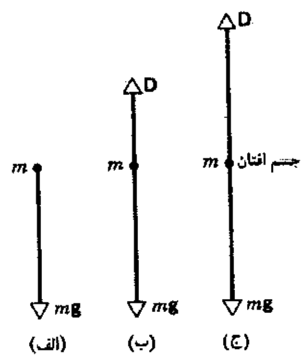
طرف چپ معادلهٔ ۱۸ تابعی از v است؛ پس معادلهٔ ۱۸ عملاً t را به‌صورت تابعی از v، $t(v)$، به‌دست می‌دهد. البته اغلب می‌توانیم نتیجه را "معکوس" کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم که عموماً برای محاسبات مفیدتر است.

مثال ۵. فرض کنید جسمی به جرم m در هوا سقوط می‌کند و نیروی مقاومت D وارد بر آن به‌طور خطی با سرعت زیاد می‌شود

$$D = bv$$

و این نیرو همواره در خلاف جهت حرکت سرعت جسم است. ثابت b به خواص جسم (مثلاً اندازه و شکل آن) و همچنین به خواص شاره (بویژه چگالی آن) بستگی دارد. با این فرض که جرم m از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت آن برحسب زمان، یعنی $v(t)$ را پیدا کنید.

حل: شکل ۱۳ نمودار جسم‌ـآزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با گذشت زمان عوض می‌شود زیرا D همراه با v تغییر می‌کند. هنگامی که جسم رها می‌شود D صفر است (زیرا v صفر است)؛ با افزایش v، D هم زیاد می‌شود. در نقطهٔ خاصی از حرکت که $D = mg$ باشد، نیروی خالصی برجسم اثر نمی‌کند و شتاب جسم صفر می‌شود (شکل ۱۳ج). از این لحظه سرعت ثابت می‌ماند. جواب ریاضی ما هم باید همین خاصیت را نشان بدهد.



شکل۱۳. نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند. (الف) در لحظه‌ای که جسم رها می‌شود، $v = \circ$ است و نیروی اصطکاکی وجود ندارد. (ب) با سرعت گرفتن جسم نیروی اصطکاک هم زیاد می‌شود. (ج) سرانجام نیروی اصطکاک با وزن برابر می‌شود؛ از آن پس این نیرو ثابت می‌ماند و جسم با سرعت ثابت، برابر با سرعت حد، سقوط می‌کند.

قانون دوم نیوتون در مورد این مسئله چنین عبارت است از

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{D} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

محور y را رو به پایین می‌گیریم؛ به این ترتیب مؤلفهٔ قائم به‌صورت زیر است

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

یا

$$a = g - \frac{b}{m}v$$

از این عبارت دیده می‌شود که با افزایش v، سرانجام به جایی می‌رسیم که طرف راست صفر می‌شود، و این رویداد در زمانی است که $bv/m = g$ بشود. در این نقطه $a = \circ$ می‌شود و از آن پس هم صفر می‌ماند. پس، از اینجا به بعد سرعت ثابت می‌ماند. این همان سرعت حد، $v_{\mathrm{T}} = mg/b$ است.

برای محاسبهٔ $v(t)$، معادلهٔ ۱۸ را با $v_\circ = \circ$ به‌کار می‌بریم:

$$\int_{\circ}^{v} \frac{dv}{g - (b/m)v} = t$$

انتگرال را می‌توان چنین نوشت

$$-\frac{m}{b}\int_{\circ}^{v} \frac{-b\,dv}{mg - bv}$$

که به شکل $\int du/u = \ln u$ است (با $u = mg - bv$). پس

$$-\frac{m}{b}\int_{\circ}^{v} \frac{-b\,dv}{mg - bv} = -\frac{m}{b}\ln(mg - bv)\Big|_{\circ}^{v}$$
$$= -\frac{m}{b}\ln(mg - bv) + \frac{m}{b}\ln(mg)$$
$$= -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = t$$

این عبارت، رابطه‌ای کاملاً قابل قبول بین v و t است، اما برای آسانتر شدن تعبیر و کاربرد آن، بهتر است رابطه را معکوس کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم:

$$\ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = -\frac{bt}{m}$$
$$\frac{mg - bv}{mg} = e^{-bt/m}$$

سرانجام خواهیم داشت

$$v(t) = \frac{mg}{b}(۱ - e^{-bt/m}) \qquad (۱۹)$$

اگر t کوچک باشد (در زمانهای ابتدایی سقوط جسم)، می‌توان تابع نمایی را به شکل $e^x \approx ۱ + x$ برای xهای کوچک ($x \ll ۱$) تقریب کرد. به این ترتیب،

$$v(t) \approx \frac{mg}{b}\left[۱-\left(۱-\frac{bt}{m}\right)\right] = gt \qquad \text{(برای } t \text{های کوچک)}$$

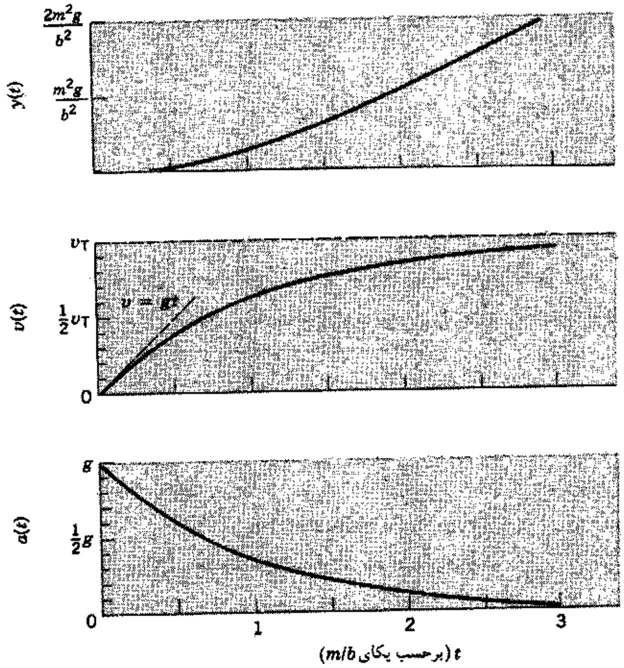
در ابتدای حرکت، پیش از آنکه نیروی اصطکاک قابل‌ملاحظه شده باشد، حرکت جسم کاملاً نزدیک به سقوط آزاد با شتاب g است.

در tهای بزرگ، تابع نمایی به‌صفر می‌گراید(در حد $x \to \infty$، $e^{-x} \to ۰$). در این حالت سرعت به مقدار حدی‌اش، v_T، می‌گراید.

$$v_T = \frac{mg}{b} \qquad (۲۰)$$

با داشتن عبارت $v(t)$، می‌توان از آن مشتق گرفت و $a(t)$ را به‌دست آورد، یا از آن انتگرال گرفت و $g(t)$ را به‌دست آورد. انجام این محاسبات و بررسی نتایج در tهای کوچک و tهای بزرگ را به عنوان تمرین به عهدهٔ دانشجویان گذاشته‌ایم (مسئلهٔ ۶۶). شکل ۱۴ بستگی زمانی a، v، و y را نشان می‌دهد.

این مثال، یک رهیافت برای تحلیل نیروی اصطکاک شاره‌ها را نشان می‌دهد. رهیافتی دیگر، D را به‌جای v، متناسب با $v^۲$ فرض می‌کنند. در این مورد هم از همان محاسباتی که به‌کار بردیم استفاده می‌شود، اما ریاضیات مسئله قدری پیچیده‌تر است. اینجا هم یک سرعت حد به‌دست می‌آید، اگرچه شکل ریاضی این سرعت با آنچه قبلاً به‌دست آوردیم متفاوت است.



شکل۱۴. مثال ۵. مکان، سرعت، و شتاب یک جسم افتان که تحت اثر نیروی مقاومت هواست. توجه کنید که شتاب از g شروع می‌شود و به صفر می‌گراید، و سرعت از صفر شروع می‌شود و به v_T می‌گراید.

جدول ۲. چند سرعت حد در هوا.

جسم	سرعت حد (m/s)	مسافت ٪۹۵ (m)[۱]
گلولهٔ ۱۶ پاوندی	۱۴۵	۲۵۰۰
چترباز در حال سقوط آزاد (نوعی)	۶۰	۴۳۰
توپ بیسبال	۴۲	۲۱۰
توپ تنیس	۳۱	۱۱۵
توپ بسکتبال	۲۰	۴۷
توپ پینگ‌پنگ	۹	۱۰
قطرهٔ باران (به شعاع ۱٫۵mm)	۷	۶
چترباز (نوعی)	۵	۳

۱. مسافتی که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به ٪۹۵ سرعت حد خود برسد.

مرجع:

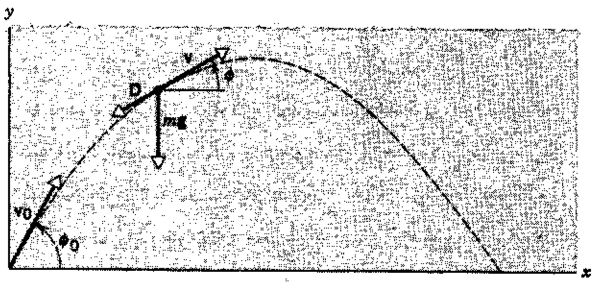
Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon & Schuster Inc., New York, 1984.

جدول ۲ فهرستی از مقادیر نوعی است که برای سرعت حد اجسام متفاوت در هوا اندازه‌گیری شده است.

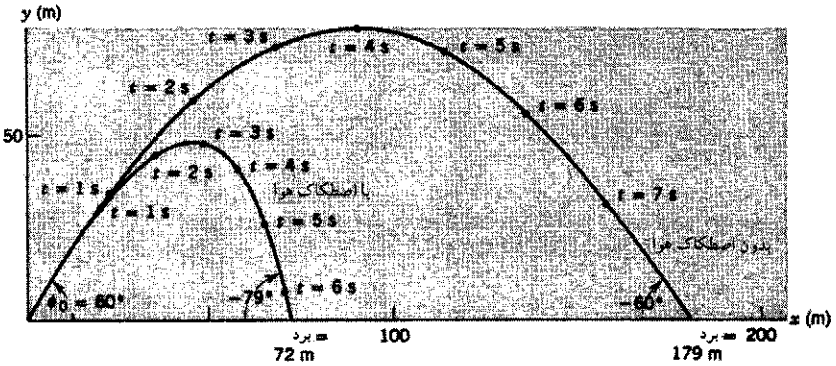
حرکت پرتابی با مقاومت هوا (اختیاری)

محاسبات نیروی مقاومت اصطکاکی برای حرکت پرتابی دوبعدی هم مهم است. مثلاً، توپ بیسبال با سرعت حدوداً ۱۰۰mi/h یا ۴۵m/s از "چوب" جدا می‌شود. این مقدار از سرعت حدی توپ در هوا بیشتر است (جدول ۲). نیروی اصطکاک هوا، $D = bv$، را می‌توان از جواب مثال ۵ تخمین زد. از معادلهٔ ۲۰ نتیجه می‌شود که ثابت b برابر است با وزن mg توپ بیسبال (در حدود ۱٫۴N، متناظر با جرم ۰٫۱۴kg) تقسیم بر سرعت حد توپ، ۴۲m/s. پس $b = ۰٫۰۳۳\text{N/(m/s)}$ است، اگر توپ با سرعت ۴۵m/s حرکت کند، نیروی مقاومتی (bv) در حدود ۱٫۵N بر آن وارد می‌شود، که از وزن توپ بیشتر است و بنابراین اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر حرکت آن می‌گذارد.

شکل ۱۵ نمودار جسم‌ـآزاد را در نقطهٔ معینی از حرکت نشان



شکل۱۵. پرتابه‌ای در حال حرکت. پرتابه با سرعت $v_۰$ در زاویهٔ $\phi_۰$ نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. در نقطهٔ معینی، سرعت آن v با زاویهٔ ϕ است. وزن و نیروی اصطکاک هوا (که همواره در خلاف جهت v است) در نقطهٔ مورد نظر نشان داده شده است.



شکل ۱۶. حرکت پرتابی با نیروی اصطکاک هوا و بدون آن. محاسبه برای $v_\circ = ۴۵\text{m/s}$ و $\phi_\circ = ۶۰^\circ$ انجام شده است.

می‌دهد. $\mathbf{D}$، مثل همهٔ نیروی اصطکاکی دیگر، در خلاف جهت $\mathbf{v}$ است، و فرض می‌کنیم که باد نمی‌وزد. اگر بگیریم $\mathbf{D} = -b\mathbf{v}$، می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون یک جواب تحلیلی برای مسیر به‌دست بیاوریم، که نمونه‌ای از آن‌را در شکل ۱۶ نشان داده‌ایم. مقاومت هوا باعث می‌شود که برد پرتابه از ۱۷۹m به ۷۲m، و ارتفاع اوج از ۷۸m به ۴۸m کاهش بیابد. همچنین توجه کنید که مسیر دیگر نسبت به محور قائمی که از نقطهٔ اوج می‌گذرد متقارن نیست؛ شیب مسیر در هنگام سقوط خیلی تندتر است تا در مرحلهٔ صعود. اگر $\phi_\circ = ۶۰^\circ$ باشد، پرتابه با زاویهٔ -۷۹° به‌زمین می‌خورد، در حالی که در غیاب اصطکاک با زاویهٔ $-\phi_\circ$ به‌زمین برخورد می‌کرد.

نیروی مقاومت هوا به سرعت پرتابه در هوای ساکن بستگی دارد. اگر باد بوزد، محاسبات را باید تغییر داد، و نتیجه هم تغییر می‌کند.

اگر بخواهیم عبارتهایی دیگر (و واقعی‌تری) برای نیروی مقاومت $\mathbf{D}$ به‌کار ببریم باید محاسبات را به شکل عددی انجام بدهیم.[1]

۶ـ۸ چارچوبهای نالخت و شبه نیرو (اختیاری)

در بررسی مکانیک کلاسیک تا اینجا فرض کردیم که اندازه‌گیری و مشاهده در یک چارچوب مرجع لخت انجام می‌شود؛ یعنی در یکی از چارچوبهای مرجعی که با قانون اول نیوتون تعریف می‌شوند، چارچوبهایی که در آنها اگر محیطی نباشد که به جسم مورد نظر نیرو وارد کند ($\sum \mathbf{F} = \circ$)، این جسم شتاب نمی‌گیرد ($\mathbf{a} = \circ$). انتخاب چارچوب مرجع همیشه با خودمان است؛ یعنی اگر فقط چارچوبهای لخت را هم به‌کار ببریم، هیچ محدودیتی روی پدیده‌های طبیعی‌ای که می‌شود با مکانیک کلاسیک بررسی کرد نمی‌گذاریم.

با وجود این، در مواردی که مناسب بدانیم، می‌توانیم مکانیک کلاسیک را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت هم به‌کار ببریم، یعنی از دید چارچوبهای متصل به جسمی که، از دید چارچوبهای لخت، شتابدار است. چارچوبهای متصل به یک اتومبیل شتابدار یا چرخ و فلک چرخان، نمونه‌هایی از چارچوب نالخت‌اند.

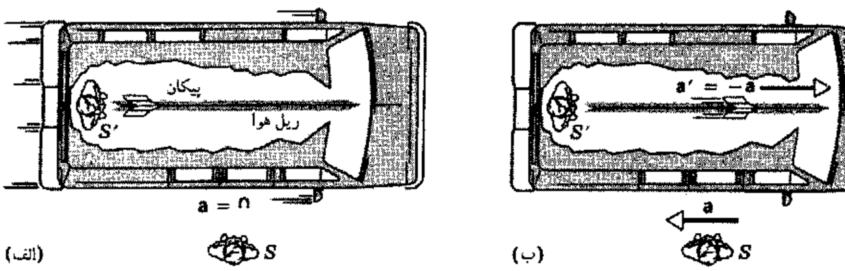
برای به‌کار بردن مکانیک کلاسیک در چارچوبهای نالخت باید نیروهای دیگری به نام شبه نیرو (یا نیروی لختی) وارد کنیم. شبه‌نیروها را، بر خلاف نیروهایی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توان به اجسام خاصی در محیط جسم مورد نظر نسبت داد، و نمی‌توان در رده‌هایی که در بخش ۶ـ۱ گفته شد طبقه‌بندی کرد و به‌علاوه، اگر جسم را از دید چارچوبهای لخت بررسی کنیم، شبه‌نیروها ناپدید می‌شوند. شبه‌نیرو صرفاً ابزاری است که به کمک آن می‌شود مکانیک کلاسیک را، به روشهای معمول، برای بررسی رویدادها از دید چارچوبهای مرجع نالخت به‌کار برد.[1]

مثلاً، ناظر S' را در نظر بگیرید که در کامیونی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. در این کامیون یک ریل هوایی دراز هست که "لغزک"ای به جرم ۲۵kg،۰ر، بی‌اصطکاک، روی آن قرار گرفته است (شکل ۱۷الف). راننده ترمز می‌کند، و سرعت کامیون به‌تدریج کم می‌شود. ناظر S بر زمین، شتاب ثابت کامیون را $-۲٫۸\text{m/s}^۲$ می‌سنجد. بنابراین، ناظر S' که در کامیون است، هنگام ترمز، در یک چارچوب مرجع نالخت است. S' مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب $+۲٫۸\text{m/s}^۲$ به طرف جلو حرکت می‌کند. هر یک از دو ناظر، چگونه با استفاده از قانون دوم نیوتون حرکت جسم لغزنده را توضیح می‌دهد؟

برای ناظر زمینی S، که در یک چارچوب مرجع لخت است، تحلیل مسئله سرراست است. لغزک، که پیش از ترمز با سرعت ثابت به جلو می‌رفته است، الآن هم دارد همین کار را می‌کند. از دید S، لغزک شتاب ندارد و هیچ نیروی افقی‌ای لازم نیست که بر آن اثر کند.

اما S' مشاهده می‌کند که لغزک شتاب می‌گیرد و هیچ جسمی هم در محیط این جسم نمی‌یابد که نیروی مولد این شتاب را بر آن وارد کند. S'، برای اینکه بتواند قانون دوم نیوتون را به‌کار برد، باید فرض

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این محاسبات رجوع کنید به
"Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985, p. 20.
و نیز به کتاب همین مؤلف
SportScience. (Simon & Schuster Inc, 1984)
این کتاب شامل بسیاری مثالهای جالب از کاربرد اصول فیزیک در ورزش است. همچنین رجوع کنید به
"Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles" Peter Brancazio.
در کتاب
Fundamentals of Physucs, 3rd ed., David Halliday and Robert Resnick, (Wiley, 1988).



شکل ۱۷. (الف) ناظر زمینی S مشاهده می‌کند که ناظر S' درکامیون با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هر دو ناظر درچارچوبهای مرجع لخت‌اند. (ب) از دید ناظر S، کامیون با شتاب ثابت a ترمز می‌کند. ناظر S'، که اکنون در یک چارچوب مرجع نالخت است، مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب ثابت $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$ روی ریل هوا به‌جلو می‌رود. ناظر S' این حرکت را با شبه‌نیرو توضیح می‌دهد.

کند که شبه‌نیرویی بر لغزک اثر می‌کند. از دید S'، نیروی $\mathbf{F}'$ باید برابر با ma' باشد، که در آن $\mathbf{a}' = (-\mathbf{a})$ شتاب لغزک از دید S' است. اندازهٔ این شبه‌نیرو برابر است با

$$F' = ma' = (۰{,}۲۵\mathrm{kg})(۲{,}۸\mathrm{m/s^۲}) = ۰{,}۷۰\mathrm{N}$$

و جهت آن همان جهت $\mathbf{a}'$ است، یعنی به طرف جلوی کامیون. این نیرو که از دید S' خیلی واقعی است، از دید ناظر زمینی S وجود ندارد؛ چون S برای توضیح حرکت لغزک اصلاً نیازی به چنین نیرویی ندارد.

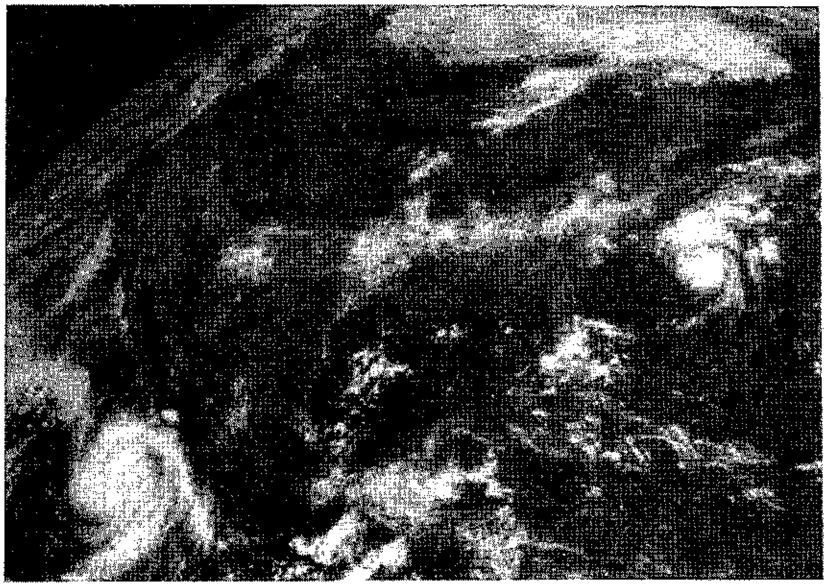
یکی از نمودهای اینکه شبه‌نیرو غیر نیوتونی است، این است که این نیرو قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند. به مصداق قانون سوم نیوتون، S' باید نیروی عکس‌العملی پیدا کند که از لغزک بر جسمی دیگر وارد می‌شود. چنین نیروی عکس‌العملی نمی‌توان یافت؛ بنابراین، قانون سوم نیوتون نقض می‌شود.

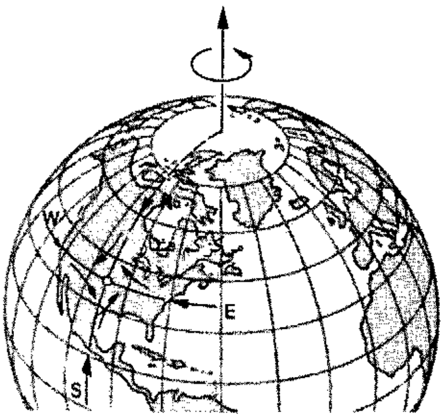
شبه‌نیروها برای کسانی که تحت تأثیر این نیروها قرار می‌گیرند، کاملاً واقعی‌اند. تصور کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که سر یک پیچ به چپ می‌پیچد. از دید ناظر زمینی، اتومبیل شتاب مرکزگرا دارد و بنابراین، یک چارچوب نالخت است. اگر صندلیهای اتومبیل مثلاً از جنس وینیل و کم اصطکاک باشد، شما به‌طرف راست خواهید لغزید. از دید ناظر زمینی، که در یک چارچوب لخت است، این حرکت کاملاً طبیعی است: بدن شما فقط می‌خواهد از قانون اول نیوتون تبعیت کند و روی خط راست جلو برود؛ در واقع این اتومبیل است که زیر بدن شما به طرف چپ می‌لغزد. اما شما، در چارچوبِ نالخت اتومبیل، ناچارید حرکت لغزشی‌تان را ناشی از شبه‌نیرویی بدانید که شما را به طرف راست هل می‌دهد. این نوع شبه‌نیرو را نیروی مرکزگریز می‌نامند، یعنی نیرویی که در جهت دور شدن از مرکز عمل می‌کند.

اگر سوار چرخ‌وفلک باشید هم در یک چارچوب شتابدار، و در نتیجه نالخت، واقع شده‌اید. در این چارچوب (چرخ‌وفلک چرخان در صفحهٔ افقی)، به‌نظر می‌رسد که اجسام در اثر نیروی مرکزگریز، می‌خواهند به طرف خارج، یعنی در جهت دور شدن از محور دوران حرکت کنند. توپی که در دست شماست، از دید شما در حالت تعادل است؛ نیروی رو به "بیرون "(مرکزگریز) با نیروی رو به "درون" (مرکزگرا) که دست شما به توپ وارد می‌کند خنثی می‌شود. از دید ناظر زمینی، که در چارچوب مرجع لخت است، توپ روی دایره حرکت می‌کند، و در اثر نیروی مرکزگرایی که شما توسط دستتان بر آن وارد می‌کنید، شتابی به‌سوی مرکز دارد. برای ناظر زمینی، نیروی مرکزگریزی وجود ندارد، زیرا توپ در حالت تعادل نیست و در امتداد شعاع به طرف مرکز دایره شتاب دارد.

بعضی ابزارهای عملی براساس شبه‌نیروها کار می‌کنند. دستگاه سانتریفوژ را در نظر بگیرید، که یکی از مفیدترین وسایل آزمایشگاه است. اگر مخلوطی از مواد را روی دایره‌ای به سرعت بچرخانیم، نیروی مرکزگریز $mv^۲/r$ وارد بر مواد پرجرمتر بیشتر خواهد بود. پس این مواد از محور دوران بیشتر فاصله می‌گیرند. به این ترتیب، سانتریفوژ با استفاده از شبه‌نیرو، مواد را برحسب جرمشان از هم جدا می‌کند، درست همان‌طور که طیف‌سنج جرمی (بخشهای ۱ـ۵ و ۵ـ۴) اتمها را به کمک نیروی الکترومغناطیسی، برحسب جرم، از هم جدا می‌کند.

یکی دیگر از انواع شبه‌نیرو، نیروی کوریولیس است. روی یک صفحه افقی چرخان، توپی را با سرعت ثابت در راستای شعاع به طرف مرکز صفحهٔ چرخان می‌غلتانید. در لحظه‌ای که توپ را در شعاع r رها می‌کنید، سرعت مماسی آن همان سرعت نقاطی است که در فاصلهٔ r از مرکز حرکت دایره‌ای دارند (درست به‌اندازهٔ سرعت مماسی خودتان). این توپ هر قدر که به مرکز نزدیکتر می‌شود، سرعت مماسی کمتری برای حفظ حرکت دایره‌ای با همان آهنگ محیط اطرافش لازم دارد. اما چون راهی برای کاهش سرعت مماسی نیست (فرض کرده‌ایم که اصطکاک بین توپ و کف چرخ و فلک کم است)، توپ قدری از خط رنگی نشانهٔ حرکت دورانی یکنواخت (امتداد اولیهٔ غلتش) جلو می‌افتد. یعنی شما در چارچوب مرجع نالخت دوار خودتان باید فرض کنید که یک نیروی جانبی ــ نیروی کوریولیس ــ باعث می‌شود که توپ، با نزدیکتر شدن به مرکز دایره، از خط دورتر شود. اما از دید ناظر زمینی در چارچوب لخت، نیروی کوریولیسی وجود ندارد: توپ با سرعت





شکل۱۸. مرکزکم‌فشاری بر زمین چرخان. با جریان یافتن هوا به طرف مرکز، ناظر نالخت در نیمکرهٔ شمالی می‌بیند که هوا در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. گردباد (عکس سمت راست) چنین مرکزکم‌فشاری است.

ثابت روی خطی راست حرکت می‌کند، و این سرعت ثابت را مؤلفه‌های سرعت توپ در لحظهٔ رها شدن (از دست شما) تعیین می‌کنند.

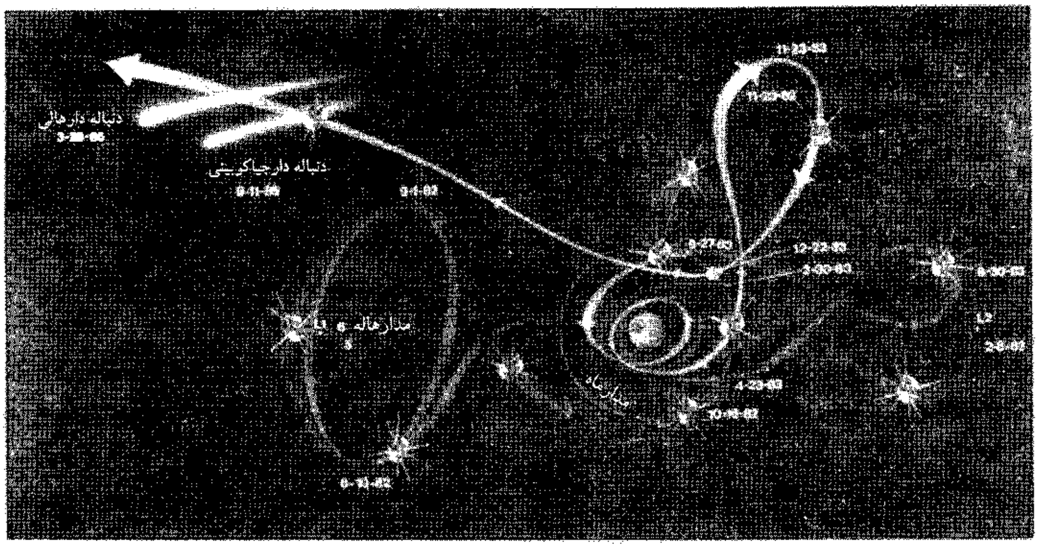
شاید آشناترین مثال از آثار نیروی کوریولیس، حرکت جو حول مراکز کم فشار یا پرفشار باشد. شکل ۱۸ نموداریک مرکزکم‌فشار را در نیمکرهٔ شمالی نشان می‌دهد. چون فشار هوا در این مرکز از اطراف کمتر است، هوا از همهٔ جهتها به طرف مرکز حرکت می‌کند. چون زمین می‌چرخد (و بنابراین، چارچوب نالخت است) پدیده‌ای شبیه به توپ و چرخ و فلک بالا به‌وجود می‌آید: هوایی که از جنوب به طرف مرکز می‌آید، کمی از خط فرضی ثابت، نسبت به زمین چرخان، جلو می‌افتد، و هوایی که از شمال می‌آید (مانند توپی که به طرف محیط چرخ و فلک در حرکت باشد) کمی از این خط عقب می‌ماند. نتیجهٔ کلی این است که هوا در جهت پادساعتگرد حول مرکزکم‌فشار می‌چرخد. به این ترتیب، اثر کوریولیس است که باد را در پدیده‌های گردبادی به چرخش در می‌آورد. در نیمکرهٔ جنوبی، جهت این اثر معکوس می‌شود. در حرکت گلولهٔ توپهای بلندبرد، لازم است که اثر کوریولیس ناشی از چرخش زمین به‌حساب آورده شود. برای گلوله‌ای نوعی به برد $10\,km$، پدیدهٔ کوریولیس می‌تواند انحرافی به‌اندازهٔ $20\,m$ به‌وجود بیاورد. تصحیحات لازم برای از بین بردن این انحرافات، در برنامه‌های کامپیوتری‌ای که برای کنترل نشانه‌روی سلاحهای بلندبرد به‌کار می‌رود گنجانده شده است. اما گاهی هم اشتباه پیش می‌آید. مثلاً در یکی از نبردهای جنگ جهانی اول در نزدیکی جزایر فالکلند، چنین اشتباهی برای ناوگان بریتانیا اتفاق افتاد. دستورالعملهای آتش برای نیمکرهٔ شمالی نوشته شده بود، اما جزایر فالکلند در نیمکرهٔ جنوبی است، و تصحیحات کوریولیس باید برعکس باشد. گلوله‌های بریتانیاییها به حدود $100\,m$ آن طرفتر از هدف اصابت می‌کردند، زیرا تصحیح کوریولیس در خلاف جهتی که باید انجام شده بود!

با توجه به آنچه گفته شد، در حل مسائل مکانیک دو راه پیش‌رو داریم: (۱) یک چارچوب لخت انتخاب کنیم و فقط نیروهای "حقیقی" را در نظر بگیریم، یعنی نیروهایی را که می‌شود به اجسام معینی در محیط نسبت داد، یا (۲) یک چارچوب نالخت انتخاب کنیم، و علاوه بر نیروهای "حقیقی" شبه‌نیروهایی مناسب را هم در نظر بگیریم. ما معمولاً روش اول را به‌کار می‌بریم، اما گاهی هم روش دوم را انتخاب می‌کنیم؛ دو روش کاملاً هم‌ارزند، و انتخاب بستگی به این دارد که در هر مورد کدام‌یک ساده‌تر یا مناسبتر است.

۶ـ۹ محدودیتهای قوانین نیوتون (اختیاری)

در شش فصل اول کتاب، نظامی برای تحلیل رفتار مکانیکی سیستمها توصیف کرده‌ایم که گسترهٔ کاربردهای آن بسیار وسیع است. برای طراحی آسمانخراشهایی عظیم و پلهای معلق، یا حتی برای محاسبهٔ مسیرهای متنوع فضاپیماها در سفرهای بین سیارات (شکل ۱۹)، جز معادلات نیوتون عملاً به چیزهای خیلی بیشتری نیاز نیست. مکانیک نیوتونی، که ابزار محاسباتی لازم برای این کار را فراهم کرد، نخستین تحول واقعاً انقلابی در فیزیک نظری بود.

مثالی که ذکر می‌کنیم گویای اطمینانی است که می‌توانیم به قوانین نیوتون داشته باشیم. اغلب کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی در حال چرخش‌اند، و با رصد کردن می‌توان سرعت چرخششان را به‌دست آورد. از این اطلاعات می‌توانیم مقدار ماده‌ای را که باید در کهکشان یا خوشه موجود باشد تا گرانش حاصل از آن بتواند نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش مشاهده شده را تأمین کنند محاسبه کنیم. اما مقدار ماده‌ای که واقعاً با تلسکوپ مشاهده می‌کنیم خیلی کمتر

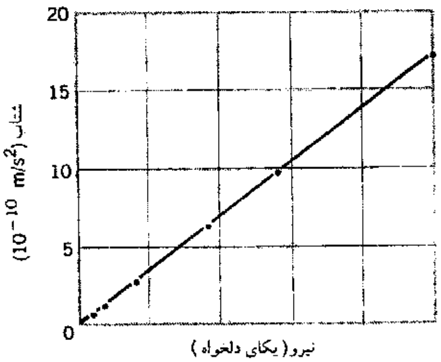


شکل۱۹. یک پیروزی برای مکانیک نیوتونی. فضاپیمای "کاشف بین‌المللی سیارات"[1] در سال ۱۹۷۸ به‌فضا پرتاب شد، ۴ سال در مداری حول نقطهٔ L_1 باقی ماند و بادهای خورشیدی را بررسی کرد. سپس دم مغناطیسی زمین را در مداری در طرف شب زمین کشف کرد. در سال ۱۹۸۵ از دم دنباله‌دار "جیا کوبینی-زینر"، و در سال ۱۹۸۶ از دم دنباله‌دار هالی گذشت. این فضاپیما فعلاً در سفری بین سیاره‌ای است و در سال ۲۰۱۲ به نزدیکی زمین باز خواهد گشت. این کاشف سیاره‌ای طی سفرش تاکنون ۳۷ موشک روشن کرده و ۵ بار از کنار ماه گذشته است.

از مقداری است که انتظار باید داشت. بنابراین، گفته شده است که مقداری "مادهٔ تاریک" هم هست که نمی‌توانیم آن‌را با تلسکوپ ببینیم اما باید باشد تا میدان گرانشی مورد نیاز را تأمین کند. تا کنون توضیح قانع‌کننده‌ای دربارهٔ نوع یا ماهیت این مادهٔ تاریک به‌دست نیامده، و بنابراین توجیهات دیگری برای رفع این ناسازگاری میان مقدار واقعاً مشاهده شدهٔ مادهٔ کهکشانها و مقدار لازم برای برقراری قوانین نیوتون، ارائه شده است. یک توضیح آن است که محاسبات ما نادرست‌اند زیرا قوانین نیوتون در اوضاع و احوالی که در مقیاس بسیار بزرگ وجود دارد، یعنی برای شتابهای بسیار کوچک (کمتر از چند $10^{-10}\,m/s^2$) برقرار نیستند. به‌خصوص پیشنهاد شده است که شاید در این شتابهای بسیار کوچک، نیرو با a^2 متناسب باشد نه با a.

شکل ۲۰ نتایج آزمایشی را نشان می‌دهد که اخیراً گزارش شده و هدف آن آزمودن این فرضیه است. اگر بستگی نیرو به شتاب، به شکل توانی جز ۱ باشد، داده‌های نمودار روی خط راست نمی‌افتند. از این آزمایش بسیار دقیق نتیجه می‌شود که، تا حد شتابهایی در حدود $10^{-10}\,m/s^2$، نیرو متناسب با شتاب است و قانون دوم نیوتون برقرار است.

در قرن بیستم، سه تحول انقلابی دیگر هم داشته‌ایم: نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵)، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین (۱۹۱۵)، و مکانیک کوانتومی (در حدود ۱۹۲۵). از نسبیت خاص معلوم می‌شود که نمی‌توان قوانین نیوتون را برای اجسامی هم که با سرعتهای قابل



شکل۲۰. نتایج یکی از آزمایشهای جدید برای تعیین اینکه آیا قانون دوم نیوتون در شتابهای کوچک کمتر از $10^{-9}\,m/s^2$ هم معتبر هست یا خیر. خط راست نشان می‌دهد که شتاب، تا حد $10^{-10}\,m/s^2$، با نیروی اعمال شده متناسب است؛ یعنی قانون نیوتون حتی در این شتابهای کوچک هم برقرار است.

مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند به کار برد. نسبیت عام نشان می‌دهد که قوانین نیوتون در حضور نیروهای گرانشی بسیار قوی معتبر نیست. مکانیک کوانتومی می‌گوید که قوانین نیوتون را نمی‌شود به‌قلمرو اجسامی به کوچکی اتم هم تعمیم داد.[1]

نسبیت خاص شامل دیدگاهی غیر نیوتونی از فضا و زمان است. این نظریه را در همهٔ موارد، چه سرعتهای زیاد و چه سرعتهای کم، می‌توان به کاربرد. می‌شود نشان داد که دینامیک نسبیت خاص در

1. International Planetary Explorer.

حد سرعتهای کم، به همان قوانین نیوتون می‌انجامد. نظریهٔ نسبیت عام را، هم برای نیروهای گرانشی قوی و هم برای نیروهای گرانشی ضعیف می‌توان به‌کار گرفت، اما معادلات آن در حد میدانهای ضعیف به همان قوانین نیوتون تحویل می‌شوند. از مکانیک کوانتومی می‌توانیم هم برای تک‌تک اتمها و هم برای اجسام معمولی که تعداد بسیار زیادی اتم دارند استفاده کنیم؛ در مورد اول کترگی معینی در رفتار سیستم پیش‌بینی می‌شود، و در مورد دوم، میانگین این رفتار کتره‌ای برای تعداد فوق‌العاده‌ای از ذرات، باز هم به همان قوانین نیوتون منجر می‌شود.

طی دههٔ گذشته، تحول ظاهراً انقلابی دیگری هم رخ داده است. این پیشرفت مربوط به سیستمهای مکانیکی‌ای است که رفتارشان را با واژهٔ آشوبناک توصیف می‌کنند. یکی از مهمترین ویژگیهای قوانین نیوتون قابلیت آنها در پیش‌بینی رفتار آیندهٔ سیستم است، البته اگر شرایط اولیه و نیروهای عامل حرکت معلوم باشند. مثلاً، اگر مکان و سرعت اولیهٔ فضاپیمایی را که تحت اثر نیروی گرانشی معین خورشید و سیارات دیگر است بدانیم، می‌توانیم مسیر دقیق آن‌را محاسبه کنیم. اما حالا ترکه‌ای را در نظر بگیرید که در یک نهر متلاطم شناور است. این ترکه هم همواره تحت تأثیر نیروهایی است که از قوانین نیوتون تبعیت می‌کنند، اما مسیر آن به طرف پایین نهر کاملاً غیر قابل پیش‌بینی است. اگر دو ترکه را کنار هم در این نهر بیندازیم، در پایین نهر ممکن است خیلی از هم جدا شده باشند. مشخصهٔ مهم دینامیک آشوبناک آن است که تغییرات بسیار کوچکی در شرایط اولیه می‌توانند به‌شدت تقویت شوند و به تفاوتهای بسیار بزرگی در نتایج پیش‌بینی شده بینجامند. دینامیک آشوبناک خیلی وقتها در پیش‌بینی هوا به‌کار می‌آید، و گفته شده است که بال زدن پروانه‌ای در ژاپن می‌تواند با تشکیل گردبادی در خلیج مکزیک مرتبط باشد.

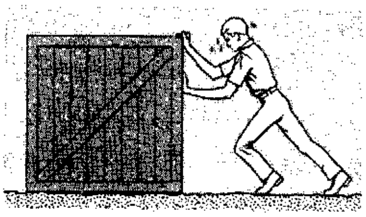
چنین رفتارهای آشوبناکی مختص سیستمهای پیچیده‌ای مثلاً نهر متلاطم نیست، بلکه در سیستمهای ساده‌ای مثل آونگ، شیر آبی که به آرامی چکه می‌کند، یا در مدارهای الکتریکی نوسانی هم مشاهده می‌شود. در دههٔ ۱۹۶۰ معلوم شد که رفتار به ظاهر آشوبناک این سیستمها نوعی نظم و قاعده‌مندیِ پنهان در بر دارد، و مطالعهٔ این نظم هستهٔ یک شاخهٔ جدید علم، آشوب، را تشکیل داده است.[1] قوانین آشوب، نه تنها در سیستمهای فیزیکی بلکه در سیستمهای زیست‌شناختی هم به‌کار برده شده‌اند. رفتار آشوبناک حتی در بعضی شاخه‌های حیطهٔ علوم اجتماعی مثل اقتصاد و دینامیک جمعیت هم مشاهده می‌شود.

از محاسباتی که بر مبنای تلفیقی از قوانین نیوتون و نظریهٔ آشوب صورت گرفته معلوم شده است که مدار سیارهٔ پلوتون، در مقیاس زمانی چند ده میلیون سال، آشوبناک است (این زمان در مقایسه با سن منظومهٔ شمسی، در حدود ۴٫۵ میلیارد سال، کوتاه است اما در مقایسه با زمان تناوب مدار پلوتون به دور خورشید، در حدود ۲۵۰ سال، طولانی است). به کمک نظریهٔ آشوب همچنین توانسته‌اند دو ویژگی کمربند سیارکها را (که بین مدارهای مریخ و مشتری قرار دارد) توضیح بدهند. این ویژگیها را صرفاً در چارچوب مکانیک نیوتونی متعارف نمی‌شد توجیه کرد: (۱) بسیاری از سیارکها از مدارهایی که علی‌القاعده باید پایدار باشند خارج می‌شوند؛ برخی از این سیارکها همان شهابهایی می‌شوند که مدام بر زمین می‌بارند. (۲) در کمربند سیارکها چندین ناحیهٔ تهی وجود دارد که تعداد سیارکهای مدارگرد در آنجا کم یا صفر است. تازه در دههٔ گذشته (سالهای ۸۰)، به لطف کامپیوترهای بسیار سریع، امکان محاسبات مفصل چنین سیستمهایی تا زمانهای لازم برای مشاهدهٔ این رفتارهای غیرعادی، فراهم شده است. با انجام محاسبات بیشتر، به تدریج کاربردهای دیگری هم از این مقولهٔ هیجان‌انگیز کشف می‌شود.

پرسشها

۱. حدی وجود دارد که اگر سطحی را از آن بیشتر صیقل بدهند، مقاومت اصطکاکی به‌جای کم شدن زیاد می‌شود. چرا؟

۲. صندوقی سنگین‌تر از شما روی زمین افقی ناهمواری قرار دارد (شکل ۲۱). ضریب اصطکاک میان صندوق و زمین همان ضریب اصطکاک میان کفش شما و زمین است. آیا می‌توانید صندوق را روی این زمین هل بدهید؟ [1]



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. در بازی بیسبال، دونده معمولاً با دویدن سریعتر حرکت می‌کند تا با سر خوردن. چرا؟ در این صورت دونده اصلاً چرا سر می‌خورد؟

۴. چگونه شخصی که روی آبگیر یخ بستهٔ کاملاً بدون اصطکاکی ایستاده است، می‌تواند خودش را به ساحل برساند؟ آیا این شخص می‌تواند با راه رفتن، غلتیدن، تاب دادن دستها، یا لگد پراندن موفق شود؟ اصولاً چگونه می‌توان شخصی را در چنین وضعیتی قرار داد؟

۵. چرا لاستیکهای اتومبیل موقع حرکت بر سطح افقی بهتر به زمین می‌چسبند تا موقع بالا رفتن یا پایین آمدن از شیب؟

---

۱. رجوع کنید به

Chaos-Making a New Science, James Gleick, (Penguin Books, 1987).

۶. پشت اتومبیلهای مسابقه سطوح خمیده‌ای (به نام "اسپویلر") نصب می‌کنند. طراحی این سطوح چنان است که هوایی که از آنها می‌گذرد نیرویی رو به پایین تولید می‌کند. این کار چه فایده‌ای دارد؟

۷. دو سطح با هم تماس دارند، اما نسبت به هم ساکن‌اند.با وجود این به هم نیروی اصطکاک وارد می‌کنند. چرا؟

۸. اتومبیل شما در جادهٔ یخزده‌ای سر می‌خورد و کمی وارد باند مخالف می‌شود. در هر یک از موارد زیر آیا بهتر است چرخهای جلو را در همان جهت لغزش بچرخانید یا در خلاف جهت آن؟ (الف) اگر بخواهید از تصادف با اتومبیلی که از روبه رو می‌آید اجتناب کنید و (ب) اگر اتومبیل دیگری در آن نزدیکی نباشد و بخواهید که دوباره کنترل اتومبیل را به‌دست بیاورید. اتومبیل را "با چرخهای محرک در عقب" و بعد "با چرخهای محرک در جلو "در نظر بگیرید.

۹. چرا اتومبیلهای مسابقه هنگام گذشتن از پیچ سرعتشان را زیاد می‌کنند؟

۱۰. در هواپیمایی در ارتفاع ثابت در پروازید و می‌خواهید یک دور ۹۰۰ بزنید. چرا باید هواپیما را کج کنید تا بتوانید دور بزنید؟

۱۱. وقتی یک سگ خیس خودش را می‌تکاند، کسانی که نزدیک به او ایستاده‌اند ممکن است خیس بشوند. چرا آب از سگ این‌طور به اطراف می‌جهد؟

۱۲. شاید توجه کرده باشید (اینشتین توجه کرده بود) که وقتی چای را در فنجان به‌هم می‌زنید، تفاله‌های چای در وسط فنجان جمع می‌شوند نه در لبهٔ آن. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح بدهید؟ (اینشتین توانسته بود.)

۱۳. می‌خواهید تعیین کنید که سطح میزی که در قطاری قرار دارد واقعاً افقی هست یا نه. آیا با استفاده از یک تراز (محتوی حباب در مایع) می‌توانید در حالتی که قطار از شیبی بالا یا پایین می‌رود این کار را انجام بدهید؟ اگر قطار در حال پیچیدن باشد چطور؟ (راهنمایی: دو مؤلفهٔ افقی وجود دارد.)

۱۴. در آونگ مخروطی، زمان تناوب و سرعت گلولهٔ آونگ به‌ازای $\theta = 90^\circ$ چه می‌شود؟ چرا این زاویه از نظر فیزیکی غیرممکن است؟ در مورد حالت $\theta = 0^\circ$ هم توضیح بدهید.

۱۵. سکه‌ای روی صفحهٔ گردان گرامافونی قرار دارد. موتور گرامافون را روشن می‌کنیم. پیش از آنکه گرامافون به‌سرعت نهایی خود برسد، سکه به خارج پرتاب می‌شود. چرا؟

۱۶. اتومبیلی در جاده‌ای که پستی و بلندی دارد حرکت می‌کند. فرض کنید سرعت اتومبیل ثابت باشد. نیرویی را که اتومبیل در بخش افقی به جاده وارد می‌کند، با نیروی وارد از اتومبیل به جاده در بخشهای "بلندی" و "پستی" مقایسه کنید و در این باره توضیح بدهید.

۱۷. اتومبیلی را با سرعت ثابت در بزرگراهی می‌رانید. توپی روی کف اتومبیل در حالت سکون است و بادکنکی پر از هلیم در بالای توپ شناور مانده و با سقف در تماس است. در هر یک از حالتهای زیر چه بر سر این دو جسم می‌آید؟ (الف) اگر با سرعت ثابت بپیچید و (ب) اگر ترمز کنید.

۱۸. اثر مقاومت هوا را بر زاویهٔ برد بیشینهٔ پرتابه بررسی کنید.

۱۹. قطره‌های درشت‌تر باران سریعتر سقوط می‌کنند یا قطره‌های ریزتر؟

۲۰. سرعت حد توپ بیسبال $95 \mathrm{mi/h}$ است. اما سرعتی که برای توپهای پرتاب شده اندازه‌گیری می‌شود اغلب بیش از این است و به حدود $100 \mathrm{mi/h}$ هم می‌رسد. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۲۱. حرکت جسمی را توصیف کنید که با سرعتی بیش از سرعت حد خودش، در راستای قائم به طرف پایین پرتاب می‌شود.

۲۲. کنده‌ای روی نهری شناور است و به طرف پایین رود حرکت می‌کند. چگونه می‌توانید نیروی مقاومت اصطکاکی وارد بر آن‌را به‌دست بیاورید؟

۲۳. دو جسم به جرمهای متفاوت را همزمان از بالای برجی رها می‌کنیم. نشان بدهید که اگر مقاومت هوا برای هر دو جسم ثابت و یکسان فرض شود، جسمی که جرم بیشتری دارد زودتر به زمین می‌رسد. این فرض تا چه حدی موجه است؟

۲۴. چرا در جدول ۲ "مسافت ۹۵٪ " را آورده‌ایم نه "مسافت ۱۰۰٪ " را؟

۲۵. چرخش زمین چه اثری بر وزن ظاهری اجسام در استوا دارد؟

۲۶. توضیح بدهید که چرا شاقول در بیشتر عرضهای جغرافیایی دقیقاً در راستای جاذبهٔ گرانشی زمین قرار نمی‌گیرد؟

۲۷. فضانوردان در فضاپیمایی که در مدار است می‌خواهند وزن خود را روزانه ثبت کنند. با توجه‌به "بی‌وزنی" این فضانوردان، می‌توانید تصور کنید که این کار چگونه ممکن است؟

۲۸. چرا پرسش "سرعت خطی نقطه‌ای بر استوا چقدر است؟" به فرضی دربارهٔ چارچوب مرجع به‌کار رفته نیاز دارد؟ نشان بدهید که چگونه با تغییر چارچوب مرجع، جواب هم تغییر می‌کند؟

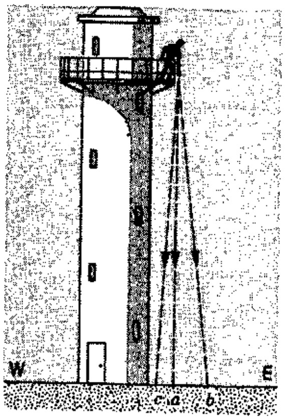
۲۹. چه تمایزی بین چارچوبهای مرجع لخت و چارچوبهای دیگری که فقط محورهایشان نسبت به چارچوبهای اولیه منتقل شده یا چرخیده است وجود دارد؟

۳۰. مسافری در صندلی جلوی اتومبیلی نشسته است. راننده ناگهان به چپ می‌پیچد و مسافر به طرف در می‌لغزد. نیروهای وارد برمسافر و اتومبیل در این لحظه را از دید چارچوب مرجع (الف) متصل به زمین و (ب) متصل به اتومبیل بررسی کنید.

۳۱. آیا در بازی تنیس یا گلف باید نیروی کوریولیس را هم در نظر گرفت؟ اگر نه، چرا؟

۳۲. در بالکن یک برج مرتفع، به طرف شرق ایستاده‌اید و جسمی را رها می‌کنید تادر پای برج به زمین بخورد (شکل ۲۲). (فرض کنید که می‌توانید محل برخورد را با دقت زیاد بسنجید.) آیا جسم به نقطهٔ a، درست در زیر نقطهٔ رها شدنش می‌خورد،

یا به نقطهٔ b متمایل به شرق، یا به نقطهٔ c متمایل به غرب؟ جسم را از حالت سکون رها کرده‌اید، و زمین از غرب به شرق می‌چرخد.



شکل ۲۲. پرسش ۳۲

۳۳. با استدلال کیفی نشان بدهید که، به علت چرخش زمین، بادی که در نیمکرهٔ شمالی از شمال به جنوب بوزد به طرف راست منحرف می‌شود. بادی که از جنوب به شمال بوزد چطور؟ اوضاع در نیمکرهٔ جنوبی چگونه خواهد بود؟

مسئله‌ها

بخش ۶ـ۲ نیروی اصطکاک

۱. ضریب اصطکاک ایستایی بین تفلون و خاگینه در حدود ۰٫۰۴ است. کف (افقی) یک ماهیتابهٔ تفلون را حداقل باید چند درجه کج کرد تا خاگینه روی آن بلغزد؟

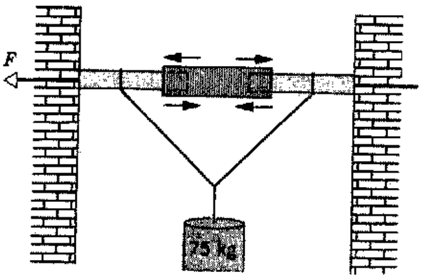
۲. فرض کنید فقط چرخهای عقب اتومبیل می‌توانند به آن شتاب بدهند، و این چرخها نیمی از وزن اتومبیل را تحمل می‌کنند. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده μ_s باشد، بیشترین شتابی که اتومبیل می‌تواند بگیرد چقدر است؟ (ب) μ_s را برابر با ۰٫۵۶ بگیرید و یک مقدار برای این شتاب محاسبه کنید.

۳. ضریب اصطکاک ایستایی بین پیست و کفشهای دونده‌ای ۰٫۹۵ است. بیشترین شتابی که این دونده می‌تواند بگیرد چقدر است؟

۴. یک بازیکن بیسبال (شکل ۲۳) به جرم 79kg در پایان یک حرکت روی زمین سر می‌خورد و حرکتش با نیروی اصطکاک 470N کند می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین این بازیکن و زمین چقدر است؟


شکل ۲۳. مسئلهٔ ۴

۵. یک میلهٔ افقی برای نگه داشتن جسمی به جرم 75kg بین دو دیوار کار گذاشته شده است. شکل ۲۴. نیروهای یکسان F را، که میله بر دیوارها وارد می‌کند، می‌توان با کم و زیاد کردن طول میله تغییر داد. فقط اصطکاک بین دو سرمیله با دیوارهاست که سیستم را نگه می‌دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و دیوار ۰٫۴۱ است. کمترین مقدار نیروی F برای برقراری تعادل چقدر است؟



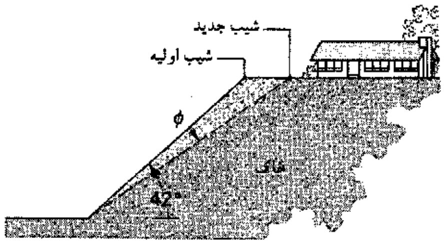
شکل ۲۴. مسئلهٔ ۵

۶. کنده‌ای به وزن 53lb (یعنی 240N) روی زمین ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان کنده و زمین ۰٫۴۱، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو ۰٫۳۲ است. (الف) کمترین نیروی افقی‌ای که می‌تواند کنده را به حرکت در بیاورد چقدر است؟ (ب) پس از شروع حرکت، چه نیروی افقی‌ای باید اعمال کرد تا کنده با سرعت ثابت به حرکتش ادامه بدهد. (ج) اگر، به‌جای این نیرو، همان نیروی اولیه (لازم برای شروع حرکت) همچنان به کنده اثر کند چه شتابی به آن می‌دهد؟

۷. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکهای یک اتومبیل و جادهٔ خشک ۰٫۶۲ است. جرم اتومبیل 1500kg است. (الف) روی جادهٔ

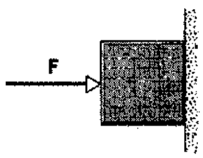
افقی و (ب) روی جاده‌ای با شیب ۸٫۶° به طرف پایین، حداکثر چه نیروی ترمزی می‌توان اعمال کرد؟

۸. خانه‌ای برفراز تپه‌ای ساخته شده است. شیب دامنهٔ تپه ۴۲° است. ریزش دامنه نشان می‌دهد که شیب را باید کم کرد. اگر ضریب اصطکاکِ خاک بر خاک ۰٫۵۵ باشد، شیب را به اندازهٔ چه زاویه‌ای (ϕ) باید کمتر کرد (شکل ۲۵)؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۸

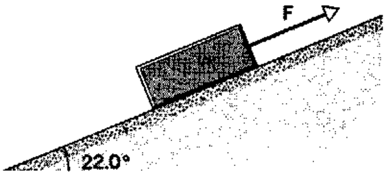
۹. نیروی افقی F به مقدار ۱۲lb، جسمی به وزن ۵٫۰lb را به یک دیوار قائم می‌فشارد (شکل ۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم ۰٫۶۰، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو ۰٫۴۰ است. فرض کنید جسم در ابتدا ساکن است. (الف) آیا جسم شروع به حرکت می‌کند؟ (ب) دیوار چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۹

۱۰. صندوقی به جرم ۱۳۶kg روی زمین ساکن است. مردی می‌خواهد با نیروی افقی ۴۱۲N آن‌را به حرکت در بیاورد. (الف) فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و زمین ۰٫۳۷ است. نشان بدهید که صندوق حرکت نمی‌کند. (ب) مرد دیگری، برای کمک به اولی، صندوق را به طرف بالا می‌کشد. این دومی حداقل باید چه نیرویی به طرف بالا وارد کند تا صندوق روی زمین به راه بیفتد؟ (ج) اگر دومی، به‌جای نیروی قائم، یک نیروی افقی به صندوق وارد کند، حداقل چه نیرویی، علاوه بر نیروی شخص اول، باید وارد کند تا صندوق شروع به حرکت کند؟

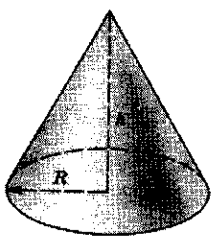
۱۱. جسمی به جرم ۷٫۹۶kg روی سطحی با شیب ۲۲٫۰° نسبت به افق قرار دارد (شکل ۲۷). ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۲۵، و ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۱۵ است. (الف) حداقل نیروی F، موازی با سطح شیبدار، برای جلوگیری از لغزیدن جسم روی سطح چقدر است؟ (ب) حداقل نیروی F برای به حرکت درآوردن جسم به طرف بالای سطح شیبدار چقدر است؟ (ج) حداقل نیروی F برای اینکه جسم با سرعت ثابت به‌طرف بالای سطح شیبدار حرکت کند چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۱

۱۲. دانشجویی می‌خواهد ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین یک جعبه و یک تخته را به‌دست بیاورد. جعبه را روی تخته می‌گذارد و یک سر تخته را کم‌کم بلند می‌کند. هنگامی که زاویهٔ شیب تخته با سطح افقی ۲۸٫۰° می‌شود، جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و طی ۳٫۹۲s مسافت ۲٫۵۳m را روی سطح شیبدار طی می‌کند. ضرایب اصطکاک را پیدا کنید.

۱۳. کارگری می‌خواهد مقداری ماسه را در ناحیه‌ای دایره‌ای شکل روی هم انباشته کند؛ شعاع دایره R است و هیچ ماسه‌ای نباید به ناحیهٔ خارج از دایره بریزد (شکل ۲۸). نشان بدهید که بیشترین حجم ماسه‌ای که به این ترتیب می‌توان انباشته کرد $\pi \mu_s R^3/3$ است، که در آن μ_s ضریب اصطکاک ایستایی ماسه با ماسه است. (حجم مخروطی به مساحت قاعدهٔ A و ارتفاع h، $Ah/3$ است.)



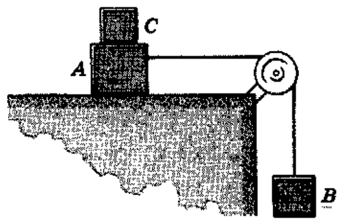
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. گرمای ناشی از اصطکاک، که در اثر حرکت اسکی ایجاد می‌شود، عامل اصلی لغزیدن اسکی روی برف است. اسکی در شروع کار به برف می‌چسبد، اما در اثر حرکت، برف زیر آن ذوب می‌شود. با موم زدن به اسکی، اصطکاک میان اسکی و لایهٔ آب کم می‌شود. مجله‌ای گزارش کرده است که نوع جدیدی اسکی پلاستیکی، از موم هم کم اصطکاکتر است و یک اسکی‌باز با این اسکی روی شیب ملایمی به طول ۲۳۰m در آلپ، توانسته است رکورد خودش را از ۶۱s به ۴۲s کاهش بدهد. با فرض اینکه زاویهٔ شیب ۳٫۰° باشد، ضریب اصطکاک جنبشی را برای دو نوع اسکی حساب کنید.

۱۵. جسمی با سرعت ثابت روی سطح شیبداری به‌زاویهٔ θ به پایین می‌لغزد. همین جسم را با سرعت اولیهٔ v_0 به طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌کنیم. (الف) جسم تا چه مسافتی بالا می‌رود؟ (ب) آیا باز به پایین برمی‌گردد؟

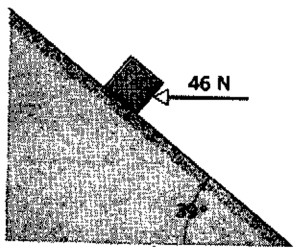
۱۶. قطعه‌ای یخ در حالت سکون روی سطح شیبداری به زاویهٔ ۳۳٫۰°، که با یخ اصطکاک دارد، شروع به لغزش می‌کند و مسافت معینی را می‌پیماید. زمان پیمودن این مسافت دو برابر زمانی است که برای پیمودن همان مسافت روی سطح شیبداری با همان شیب، اما بدون اصطکاک، لازم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین یخ و سطح شیبدار ناهموار چقدر است؟

۱۷. در شکل ۲۹ جرم A برابر با ۴٫۴kg و جرم B برابر با ۲٫۶kg است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی میان A و میز، به‌ترتیب، ۰٫۱۸ و ۰٫۱۵ است. (الف) جسم C را روی A می‌گذاریم تا مانع لغزش آن شود. (الف) حداقل جرم C چقدر باشد تا A نلغزد؟ (ب) C را به ناگهان از روی A برمی‌داریم. شتاب A چقدر می‌شود؟



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. جسمی به جرم ۴٫۸kg روی سطح شیبداری به‌زاویهٔ ۳۹° است و نیروی افقی ۴۶N بر آن وارد می‌شود (شکل ۳۰). ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۰٫۳۳ است. (الف) اگر جسم در حال حرکت به طرف بالای سطح شیبدار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت اولیهٔ جسم ۴٫۳m/s باشد، و نیروی افقی هم دائماً بر آن اثر کند، جسم تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (ج) پس از اینکه جسم به بالاترین نقطهٔ مسیر خود رسید، چه بر سرش می‌آید؟



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. جسمی فولادی به جرم ۱۲kg روی میزی افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز ۰٫۵۲ است. (الف) اندازهٔ نیروی افقی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند چقدر است؟ (ب) اندازهٔ نیرویی با زاویهٔ ۶۲° بالاتر از سطح افقی، که بتواند جسم را به حرکت دربیاورد چقدر است؟ (ج) اگر جهت نیرو ۶۲° پایین‌تر از سطح افقی باشد، اندازه آن حداکثر چقدر می‌تواند باشد بی‌آنکه جسم شروع به حرکت کند؟

۲۰. زاویهٔ دستهٔ زمین‌شویی با راستای قائم θ است (شکل ۳۱). μ_k ضریب اصطکاک جنبشی و μ_s ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین‌شوی و کف اتاق است. (الف) به زمین‌شوی نیروی F را در راستای دستهٔ آن وارد می‌کنیم. اندازهٔ این نیرو چقدر باشد تا زمین‌شوی با سرعت ثابت روی زمین حرکت کند؟ (ب) نشان بدهید که اگر θ از زاویه‌ای معین، θ_0، کمتر باشد، نیروی F هر چقدر بزرگ هم که باشد زمین‌شوی را به‌حرکت در نمی‌آورد. زاویهٔ θ_0 چقدر است؟

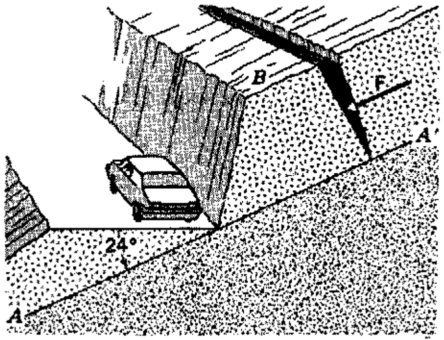
شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۰

۲۱. کارگری صندوقی به وزن ۱۵۰lb را به کمک طنابی روی زمین می‌کشد. طناب با سطح افقی زاویهٔ ۱۷° می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۵۲ و ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۳۵ است. (الف) چه کششی در طناب لازم است تا صندوق شروع به حرکت کند. (ب) شتاب اولیهٔ صندوق چقدر است؟

۲۲. از سیمی که فقط تحمل ۱٫۲۲kN کشش را دارد برای کشیدن جعبه‌ای روی زمین استفاده می‌کنیم. حداکثر وزن جعبه‌ای که با این سیم می‌توانیم بکشیم چقدر می‌تواند باشد؟ ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۳۵ است، و سیم را الزاماً افقی به‌کار نمی‌بریم.

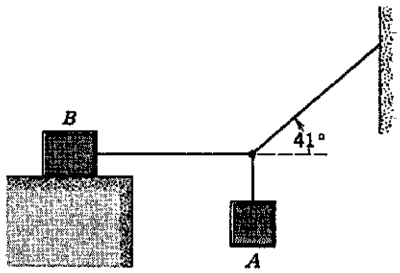
۲۳. شکل ۳۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که روی دامنهٔ کوهی ساخته شده است. خط AA' نمایندهٔ صفحهٔ بستر سستی است که روی آن امکان لغزش وجود دارد (صفحهٔ شکست). قطعهٔ B بلافاصله بالای جاده، توسط یک شکاف بزرگ (مفصل) از صخره‌های بالایی تپه جدا شده است، بنابراین فقط نیروی اصطکاک بین این قطعه و صفحهٔ احتمالی "شکست" است که مانع لغزش می‌شود. جرم قطعه

$۱٫۸ \times ۱۰^{۷}$kg، زاویهٔ صفحهٔ شکست ۲۴° پایین‌تر از سطح جاده، و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه ۰٫۶۳ است. (الف) نشان بدهید که قطعه نمی‌لغزد. (ب) اگر آب در مفصل جمع شود و نیروی هیدروستاتیکی F را در راستای موازی با شیب قطعه بر آن وارد کند، حداقل نیروی F لازم برای لغزش قطعه چقدر است؟



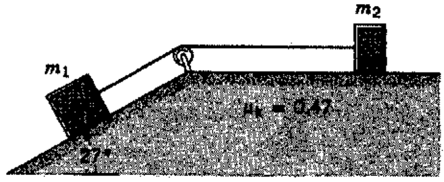
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در شکل ۳۳، وزن جسم B برابر با ۷۱۲N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم B و میز ۰٫۲۵ است. حداکثر وزن A چقدر باشد تا سیستم از حالت تعادل خارج نشود؟



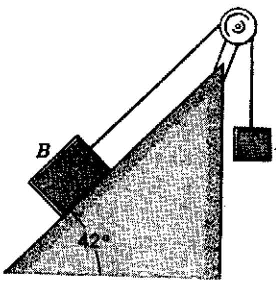
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. در شکل ۳۴، جرم m_1 برابر با ۴٫۲۰kg و جرم m_2 برابر با ۲٫۳۰kg است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_2 و سطح افقی ۰٫۴۷ است. سطح شیبدار اصطکاک ندارد. (الف) شتاب اجسام و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.



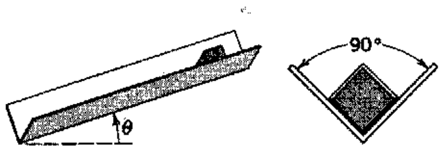
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. در شکل ۳۵، وزن B برابر با ۹۴٫۰lb و وزن A برابر با ۲۹٫۰lb است. ضریب اصطکاک ایستایی میان B و سطح ۰٫۵۶، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰٫۲۵ است. (الف) شتاب B، در حال حرکت به طرف بالا، چقدر است؟ (ب) شتاب B، در حال حرکت به طرف پایین، چقدر است؟ زاویهٔ سطح شیبدار ۴۲٫۰° است.



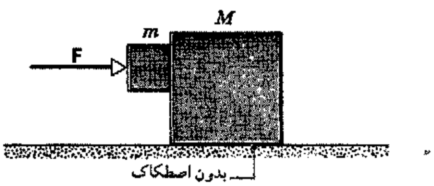
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. جعبه‌ای در ناودان شیبداری با مقطع قائم‌الزاویه، به طرف پایین می‌لغزد (شکل ۳۶). ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح داخلی ناودان μ_k است. شتاب جعبه چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۷

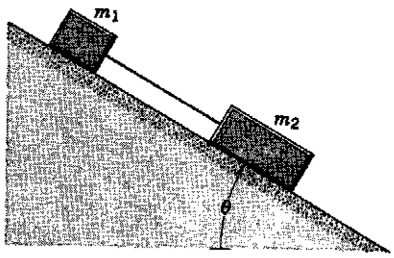
۲۸. در شکل ۳۷، $m = ۱۶$kg و $M = ۸۸$kg است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم $\mu_s = ۰٫۳۸$ است، اما M با سطح زیرینش اصطکاک ندارد. نیروی افقی F حداقل باید چقدر باشد تا m نسبت به M ساکن بماند؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۲۸

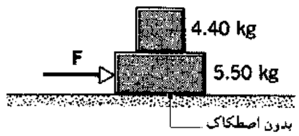
۲۹. روی یک سطح شیبدار، دو جسم به جرمهای $m_1 = ۱٫۶۵$kg و $m_2 = ۳٫۲۲$kg، با میله‌ای بی‌جرم به هم متصل‌اند. میله با سطح موازی است (شکل ۳۸). این مجموعه به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، چنان که m_1 به دنبال m_2 حرکت می‌کند. زاویهٔ سطح شیبدار ۲۹٫۵° است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_1 و سطح شیبدار $\mu_1 = ۰٫۲۲۶$، و بین m_2 و سطح شیبدار $\mu_2 = ۰٫۱۲۷$ است. (الف) شتاب مشترک دو جسم و (ب) کشش میله را به‌دست بیاورید. (ج) اگر جای m_1 و m_2 را عوض کنیم چه تغییری در

جوابهای (الف) و (ب) به‌وجود می‌آید؟



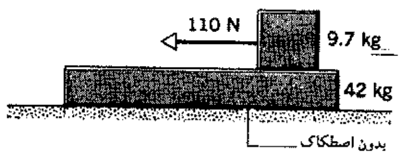
شکل ۳۸. مسئلهٔ ۲۹

۳۰. جسمی به جرم ۴٫۴۰kg روی جسم دیگری به جرم ۵٫۵۰kg قرار دارد. برای اینکه جسم رویی روی جسم زیری بلغزد (در حالی که جسم زیری ثابت نگه داشته شده است)، باید نیروی افقی به اندازهٔ ۱۲٫۰N بر جسم رویی وارد شود. مجموعهٔ دو جسم را روی میزی افقی و بدون اصطکاک می‌گذاریم (شکل ۳۹). (الف) حداکثر نیروی افقی F که می‌توان بر جسم زیرین وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند چقدر است؟ (ب) شتاب دو جسم، به‌ازای این نیرو، چقدر است؟ (ج) ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم را پیدا کنید.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۰

۳۱. تیغه‌ای به جرم ۴۲kg روی یک سطح بدون اصطکاک واقع شده است. جسمی به جرم ۹٫۷kg روی ورقه قرار دارد (شکل ۴۰). ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تیغه ۰٫۵۳، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰٫۳۸ است. به جسم ۹٫۷ کیلوگرمی نیرویی افقی به‌اندازهٔ ۱۱۰N وارد می‌شود. (الف) شتاب جسم و (ب) شتاب تیغه چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۱

بخش ۶ـ۳ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

۳۲. در یک مسابقهٔ لوژسواری در المپیک، یک تیم اروپایی پیچی به شعاع ۲۵ft را با سرعت ۶۰mi/h می‌پیماید. شتاب مسابقه‌دهنده‌ها (الف) برحسب ft/s^2 و (ب) برحسب یکای g چقدر است؟

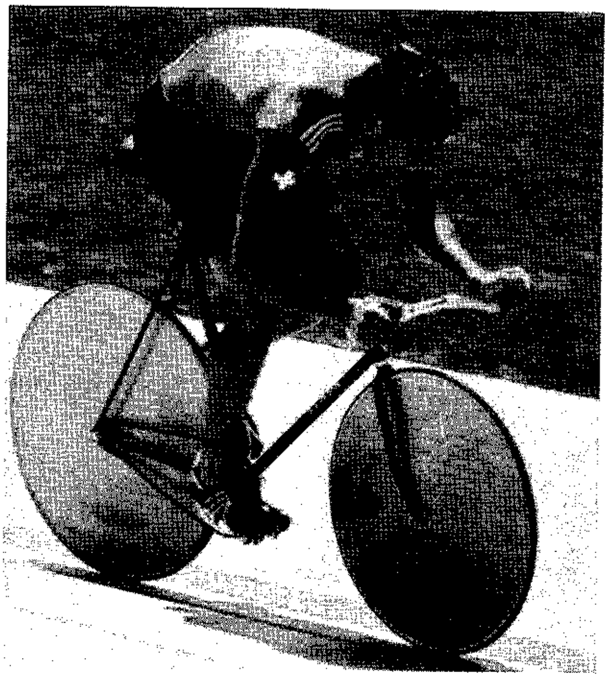
۳۳. اتومبیلی به وزن ۲۴۰۰lb (یعنی ۱۰٫۷kN)، که با سرعت ۳۰mi/h (یعنی ۱۳٫۴m/s) حرکت می‌کند، می‌خواهد از پیچی به شعاع ۲۰۰ft (یعنی ۶۱٫۰m) که شیب عرضی ندارد بگذرد. (الف) نیروی اصطکاک لازم برای اینکه اتومبیل بر دایره بماند چقدر است؟ (ب) حداقل ضریب اصطکاک لازم بین لاستیکها و جاده، برای تأمین این نیرو، چقدر است؟

۳۴. پیچ دایره‌ای شکل بزرگراهی برای سرعت ۶۰km/h (یعنی ۳۷mi/h) طراحی شده است. (الف) اگر شعاع پیچ ۱۵۰m (یعنی ۴۹۰ft) باشد، زاویهٔ صحیح شیب عرضی چقدر است؟ و (ب) اگر پیچ شیب عرضی نداشته باشد، حداقل ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده چقدر باشد تا اتومبیلهایی که با این سرعت از پیچ می‌گذرند نلغزند؟

۳۵. دارید اتومبیلتان را با سرعت ۸۵km/h می‌رانید که متوجه مانعی در جاده می‌شوید که ۶۲m جلوتر از شماست. (الف) برای اینکه بتوانید پیش از مانع متوقف بشوید، ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) فرض کنید که دارید در پارکینگ خالی و وسیعی با سرعت ۸۵km/h می‌رانید. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا بتوانید با اتومبیل روی دایره‌ای به شعاع ۶۲m حرکت کنید (تا به دیواری که ۶۲m جلوی شماست برخورد نکنید)؟

۳۶. یک آونگ مخروطی وزنه‌ای به جرم ۵۳g دارد که به ریسمانی به طول ۱٫۴m متصل است. وزنهٔ آونگ روی دایره‌ای به شعاع ۲۵cm حرکت می‌کند. (الف) سرعت وزنه چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر است؟ (ج) کشش ریسمان چقدر است؟

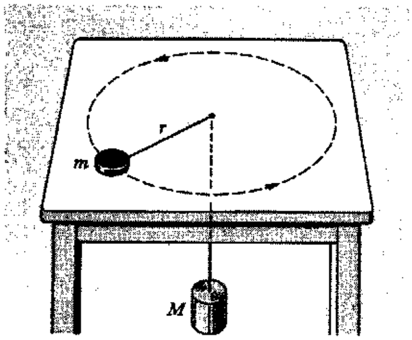
۳۷. دوچرخه‌سواری (شکل ۴۱) دایره‌ای به شعاع ۲۵m را با سرعت ثابت ۸٫۷m/s می‌پیماید. جرم مجموعهٔ دوچرخه و دوچرخه‌سوار ۸۵kg است. نیرویی را که جاده بر دوچرخه وارد می‌کند (مقدار و زاویه با راستای قائم را) محاسبه کنید.


شکل ۴۱. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره‌ای شکل به دور هسته می‌گردد. اگرشعاع مدار $۵٫۳ \times ۱۰^{-۱۱}$m و بسامد چرخش الکترون $۶٫۶ \times ۱۰^{۱۵}$rev/s باشد، (الف) سرعت الکترون، (ب) شتاب الکترون، و (ج) نیروی وارد بر الکترون را حساب کنید. (این نیرو ناشی از جاذبهٔ بین هستهٔ با بار مثبت و الکترون با بار منفی است.)

۳۹. کودکی یک زنبیل پیک‌نیک را روی لبهٔ بیرونی صفحهٔ چرخانی به شعاع ۴٫۶m می‌گذارد. صفحه هر ۲۴s یک دور می‌چرخد. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا زنبیل روی صفحه باقی بماند؟

۴۰. قرصی به جرم m روی میزی بدون اصطکاک است و با ریسمانی که از سوراخی در میز می‌گذرد، به استوانه‌ای به جرم M متصل است (شکل ۴۲). قرص با چه سرعتی باید در دایره‌ای به شعاع r حرکت کند تا استوانه ساکن بماند؟



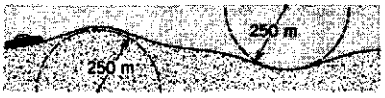
شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. در دفترچهٔ راهنمای اتومبیلی آمده است که اگر با سرعت ۴۸km/h در حرکت باشید و بخواهید در کوتاهترین مسافت ممکن متوقف بشوید، از لحظه‌ای که تصمیم می‌گیرید تا لحظه‌ای که پای شما به پدال ترمز برسد، اتومبیل ۱۰m جلو رفته است و بعد از ترمز هم ۲۱m دیگر می‌پیماید تا متوقف شود. (الف) در این محاسبات، ضریب اصطکاک چقدر فرض شده است؟ (ب) حداقل شعاع مسیری که با سرعت ۴۸km/h می‌توان در آن پیچید، بی‌آنکه اتومبیل بلغزد، چقدر است؟

۴۲. پیچ دایره‌ای بزرگراهی با شیب عرضی مناسب برای سرعت ۹۵km/h طراحی شده است. شعاع پیچ ۲۱۰m است. در یک روز بارانی، ترافیک با سرعت ۵۲km/h در این بزرگراه حرکت می‌کند. (الف) ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باشد تا اتومبیلها (با وجود این اختلاف سرعت) سر پیچ نلغزند؟ (ب) به‌ازای این ضریب اصطکاک، اتومبیلها حداکثر با چه سرعتی می‌توانند پیچ را بدون لغزش طی کنند؟

۴۳. دانشجویی ۱۵۰lb وزن دارد. وزن ظاهری این دانشجو، در بالاترین نقطهٔ چرخ و فلکی که با سرعت ثابت می‌چرخد، ۱۲۵lb است. (الف) وزن ظاهری او در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) اگر سرعت چرخ و فلک دو برابر شود، وزن ظاهری دانشجو در بالاترین نقطهٔ آن چقدر می‌شود؟

۴۴. اتومبیلی با سرعت ثابت روی جاده‌ای مستقیم که به چپ و راست نمی‌پیچد اما پستی و بلندی دارد، حرکت می‌کند. بخشی از این جاده یک ناحیهٔ برآمدگی و یک ناحیهٔ فرورفتگی دارد که شعاع هر دو ناحیه ۲۵۰m است (شکل ۴۳). (الف) هنگامی که اتومبیل از برآمدگی می‌گذرد، نیروی عمودی وارد بر آن از جاده نصف وزن اتومبیل است. وزن اتومبیل ۱۶kN است. نیروی عمودی وارد بر اتومبیل هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟ (ب) حداکثر سرعت اتومبیل، برای اینکه هنگام گذشتن از برآمدگی از جاده جدا نشود، چقدر می‌تواند باشد؟ (ج) اگر اتومبیل با سرعت قسمت (ب) حرکت کند، نیروی عمودی وارد بر آن، هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟

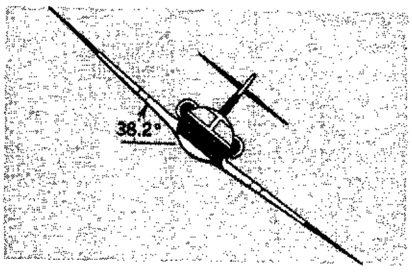


شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. سکه‌ای کوچک روی صفحهٔ تخت و افقی گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شودکه گرامافون هر ۳٫۳s دقیقاً ۳ دور می‌زند. (الف) سکه به‌فاصلهٔ ۵٫۲cm از مرکز صفحه است و بدون لغزش همراه با آن می‌گردد. سرعت سکه چقدر است؟ (ب) (اندازه و جهت) شتاب سکه را به‌دست بیاورید. (ج) اگر جرم سکه ۱٫۷g باشد، نیروی اصطکاک وارد بر آن چقدر است؟ (د) مشاهده می‌شود که اگر سکه درفاصله‌ای بیش از ۱۲cm از مرکز صفحه قرار بگیرد می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه چقدر است؟

۴۶. جسم کوچکی به فاصلهٔ ۱۳٫۰cm از مرکز صفحهٔ گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که صفحه اگر با سرعت $۳۳\frac{۱}{۳}$rev/min بچرخد جسم نمی‌لغزد، اما اگر با سرعت ۴۵٫۰rev/min بچرخد جسم می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و صفحه درچه گستره‌ای می‌تواند باشد؟

۴۷. هواپیمایی با سرعت ۴۸۲km/h روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. بالهای هواپیما با سطح افقی زاویهٔ °۳۸٫۲ می‌سازند (شکل ۴۴). شعاع دایره‌ای که هواپیما روی آن پرواز می‌کند چقدر است؟ فرض کنید نیروی مرکزگرا تماماً از نیروی بالابرنده‌ای تأمین می‌شود که بر بالها عمود است.



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. یک مرغ دریایی در یک مسیر دایره‌ای افقی، بدون بال زدن،

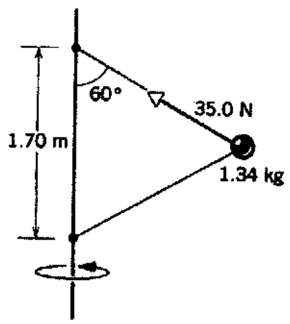
پرواز می‌کند. زاویهٔ بالهای او با سطح افقی حدود °۲۵ است. ۱۳s طول می‌کشد تا این پرنده یک دورکامل بزند. (الف) سرعت این پرواز چقدر است؟ (ب) شعاع دایرهٔ مسیر چقدر است؟[1]

۴۹. ریسمانی می‌تواند کششی تا حد ۹٫۲lb را تحمل کند و پاره نشود. کودکی سنگی به وزن ۰٫۸۲lb را به یک سر آن می‌بندد، سر دیگر آن را در دست می‌گیرد، و سنگ را در صفحهٔ قائم در دایره‌ای به شعاع ۲٫۹ft می‌گرداند. کودک سرعت سنگ را به‌تدریج زیاد می‌کند تا اینکه ریسمان پاره شود. (الف) هنگام پاره‌شدن ریسمان، سنگ درکجای مسیرش بوده است؟ (ب) سرعت سنگ هنگام پاره‌شدن ریسمان، چقدر بوده است؟

۵۰. یک هواپیمای مدل به جرم ۰٫۷۵kg به یک سر ریسمانی به طول ۳۳m بسته شده است و در دایره‌ای افقی در ارتفاع ۱۸m پرواز می‌کند. سر دیگر ریسمان به زمین متصل است. هواپیما در دقیقه ۴٫۴ دور می‌زند. نیروی بالابرنده بر بالها، که افقی‌اند، عمود است. (الف) شتاب هواپیما چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) نیروی بالابرنده‌ای که بر بالهای هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟

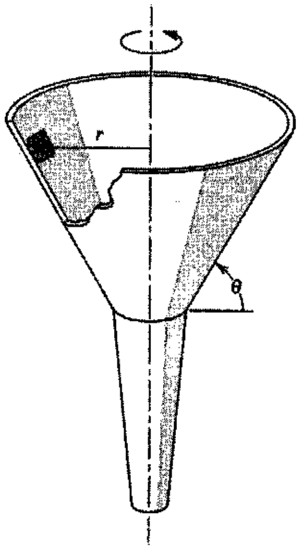
۵۱. فرض کنید در صورتی که زمین نمی‌چرخید، کیلوگرم استاندارد در سطح دریا در خط استوا دقیقاً ۹٫۸۰N وزن می‌داشت. حالا اگر چرخش زمین را در نظر بگیرید، این جسم طی یک شبانه‌روز محیط دایره‌ای به شعاع ۶۳۷۰km (شعاع زمین) را طی می‌کند. (الف) نیروی مرکزگرای لازم برای اینکه کیلوگرم استاندارد در این مسیر دایره‌ای حرکت کند چقدر است؟ (ب) نیرویی که کیلوگرم استاندارد، در استوا، بر نیروسنج فنری وارد می‌کند (وزن ظاهری جسم) چقدر است؟

۵۲. توپی به جرم ۱٫۳۴kg با دو ریسمان "بی‌جرم"، هر یک به طول ۱٫۷۰m، به میله‌ای صلب و قائم بسته شده است. ریسمانها به دو نقطهٔ میله، به فاصلهٔ ۱٫۷۰m از یکدیگر بسته شده‌اند و سیستم حول میله می‌چرخد؛ هر دو ریسمان کاملاً کشیده‌اند و با میلهٔ مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌سازند (شکل ۴۵). کشش ریسمان بالایی ۳۵٫۰N است. (الف) کشش ریسمان پایینی را پیدا کنید. (ب) نیروی خالص وارد بر توپ را، در وضعیتی که در شکل ۴۵ نشان داده شده است، پیدا کنید. (ج) سرعت گلوله چقدر است؟



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۵۲

۵۳. مکعب بسیار کوچکی به جرم m در قیفی قرار دارد که با آهنگ ثابت v دور بر ثانیه حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۴۶). زاویهٔ دیوارهٔ قیف با سطح افقی θ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و قیف μ_s، و فاصلهٔ مرکز مکعب از محور دوران r است. (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقدار v برای اینکه مکعب نسبت به قیف حرکت نکند چقدر است؟



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۵۳

۵۴. چون زمین می‌چرخد، نخ شاقول دقیقاً در راستای نیروی گرانش زمین قرار نمی‌گیرد و ممکن است کمی از این راستا منحرف شود. (الف) نشان بدهید که زاویهٔ انحراف θ برحسب رادیان، در عرض جغرافیایی L برابر است با

$$\theta = \left(\frac{2\pi^2 R}{gT^2}\right)\sin 2L$$

که در آن R شعاع زمین و T دورهٔ تناوب چرخش زمین است. (ب) زاویهٔ انحراف در کدام عرض جغرافیایی بیشینه است؟ (ج) زاویهٔ انحراف در قطبها چقدر است؟ در استوا چقدر است؟

بخش ۶ـ۵ نیروهای وابسته به زمان: روش تحلیلی

۵۵. مکان ذره‌ای به جرم ۲٫۱۷kg، که بر خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ

$$x = 0.179t^4 - 2.08t^2 + 17.1$$

به‌دست می‌آید که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت، (ب) شتاب، و (ج) نیروی وارد بر ذره در زمان $t = 7.18\text{s}$ را پیدا کنید.

---

۱. نگاه کنید به
"The Amateur Scientist," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1985, p. 122.

۵۶. ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی خالصی به شکل

$$\mathbf{F}(t) = F_0\left(1-\frac{t}{T}\right)\mathbf{i}$$

است؛ یعنی، $F(t)$ در $t=0$ برابر با F_0 است و به‌طور خطی با زمان کم می‌شود تا در زمان T به صفر می‌رسد. ذره در زمان $t=0$، با سرعت $v_0\mathbf{i}$ از مبدأ $x=0$ می‌گذرد. نشان بدهید که در زمان $t=T$، که درآن $F(t)$ صفر می‌شود، سرعت و مسافت پیموده شده عبارت‌اند از

$$v(T)=v_0+\frac{1}{2}a_0 T$$

$$x(T)=v_0T+\frac{1}{3}a_0T^2$$

که درآن، $a_0=F_0/m$ شتاب اولیه است. این نتایج را با معادلات ۱۵ و ۱۹ فصل ۲ مقایسه کنید.

۵۷. ذره‌ای به جرم m در $x=0$ ساکن است. از زمان $t=0$، نیرویی به شکل $F=F_0e^{-t/T}$ در جهت مثبت x بر آن وارد می‌شود؛ F_0 و T ثابت‌اند. در $t=T$ نیرو حذف می‌شود. در لحظه‌ای که نیرو حذف می‌شود (الف) سرعت ذره چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

بخش ۶ـ۷ نیروی مقاومت شاره‌ها و حرکت پرتابی

۵۸. وزنهٔ کوچکی به جرم ۱۵۰g در عمق ۳٫۴km در اقیانوس است و با سرعت حد ثابت ۲۵m/s سقوط می‌کند. نیرویی که آب بر این وزنه وارد می‌کند چقدر است؟

۵۹. جسمی را از حالت سکون رها می‌کنیم. با فرض اینکه اصطکاک شاره به صورت $D=bv^2$ باشد، سرعت حد جسم را به‌دست بیاورید.

۶۰. چه مدت طول می‌کشد تا جسم مثال ۵ به نصف سرعت حدِ خودش برسد؟

۶۱. با استفاده از جدول ۲، مقدار b را برای قطرهٔ باران حساب کنید؛ فرض کنید که‌اصطکاک هوا $D=bv$ است. چگالی آب $1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}$ است.

۶۲. لوکوموتیوی به قطاری (روی ریلهای افقی) که ۲۳ واگن دارد شتاب می‌دهد. جرم هر واگن ۴۸٫۶ تن متریک، و نیروی مقاومت هوا وارد بر هر واگن $f=243v$ است که در آن v (سرعت) برحسب m/s و f برحسب N است. در لحظه‌ای که قطار ۳۴٫۵km/h سرعت دارد، شتاب آن $0{,}182\,\mathrm{m/s^2}$ است. (الف) کشش در اتصال بین واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) فرض کنید که این کشش بیشترین نیرویی است که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند. در این صورت، تندترین شیبی که در آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با سرعت ۳۴٫۵km/h بکشد کدام است؟ (۱ تن متریک = ۱۰۰۰kg)

۶۳. بالونی با سرعت ثابت ۱٫۸۸m/s در هوای آرام پایین می‌آید. وزن کل بالون با محتویاتش ۱۰٫۸kN است. نیروی ارشمیدس ثابتی به‌اندازهٔ ۱۰٫۳kN بر بالون وارد می‌شود. علاوه براین هوا یک نیروی مقاومت اصطکاکی به‌شکل $D=bv^2$ هم بر بالون وارد می‌کند؛ v سرعت بالون و b یک کمیت ثابت است. سرنشینان بالون ۲۶٫۵kg بار اضافی از بالون بیرون می‌ریزند. پس از این کار، بالون نهایتاً با چه سرعت ثابتی پایین می‌آید؟

۶۴. مسئلهٔ ۶۳ را تکرار کنید، اما نیروی اصطکاک هوا را $D=bv$ بگیرید. توجه کنید که b را باید دوباره برای این مورد محاسبه کرد.

۶۵. لنجی به جرم m با سرعت v_i در حرکت است که موتورهایش خاموش می‌شوند. نیروی اصطکاک آب به شکل $D=bv$ است. (الف) عبارتی برای زمانی که طول می‌کشد تا سرعت لنج به v_f کاهش پیدا کند به‌دست بیاورید. (ب) مقدار عددی این زمان را برای لنجی به جرم ۹۷۰kg که از سرعت اولیهٔ ۳۲km/h به سرعت ۸٫۳km/h می‌رسد حساب کنید. مقدار b برابر با ۶۸N.s/m است.

۶۶. جسم افتان مثال ۵ را در نظر بگیرید. (الف) شتاب جسم را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست بیاورید. این شتاب در tهای کوچک، و در tهای بزرگ چگونه است؟ (ب) مسافت سقوط جسم را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶۷. با فرض اینکه نیروی اصطکاک هوا به شکل $D=bv$ است، (الف) نشان بدهید که مسافت y_{95}، یعنی مسافتی که جسم از حالت سکون تا رسیدن به ٪۹۵ سرعت حدش می‌پیماید،

$$y_{95}=(v_T^2/g)\left(\ln 20-\frac{19}{20}\right)$$

است، که در آن v_T سرعت حد است .(راهنمایی: نتیجه‌ای را که در مسئلهٔ ۶۶ برای $y(t)$ به‌دست آوردید به‌کار ببرید). (ب) با استفاده از سرعت حد ۴۲m/s برای توپ بیسبال، از جدول ۲، مسافت ٪۹۵ را به‌دست بیاورید. چرا نتیجه شما با مقداری که در جدول ۲ آمده است نمی‌خواند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۶۸. در بخش ۶ـ۶ روشی عددی برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون و به‌دست آوردن جدولی از مکان و سرعت جسم در زمانهای متوالی ارائه شد. بازهٔ شامل زمان اولیهٔ t_0 تا زمان پایانی t_f را به N بازهٔ کوچک Δt تقسیم کنید. اگر x_b، v_b، و F_b، به‌ترتیب، مختصه، سرعت، و نیرو در ابتدای بازه باشند، $x_e=x_b+v_b\Delta t$ و $v_e=v_b+(F_b/m)\Delta t$، به‌ترتیب، براوردی از مختصه و سرعت در انتهای بازه‌اند. این مقادیر، به عنوان مختصه و سرعت در ابتدای بازهٔ بعدی به‌کار می‌روند. هرچه Δt کوچکتر باشد، براورد بهتر است، اما Δt را خیلی هم نمی‌شود کوچک گرفت؛ زیرا اگر Δt خیلی کوچک باشد، طی محاسبه رقمهای با معنی از دست می‌روند. نیرو می‌تواند تابع مکان، سرعت و زمان باشد. شکل صریح این تابع را شرایط فیزیکی تعیین می‌کند؛ با داشتن این شکل می‌توان F_b را، با استفاده از مقادیر x_b، v_b، و t_b به‌دست آورد. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که این انتگرال‌گیری را انجام بدهد. ورودی برنامه x_0، v_0، t_0، Δt، و N است. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرید.

شخصی صندوقی به جرم ۹۵kg را روی سطح ناهمواری هل می‌دهد. صندوق از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیرویی که شخص بر آن وارد می‌کند $F = ۲۰۰ e^{-۰٫۱۵t}$ است، که در آن F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. نیرو به شکل نمایی کم می‌شود زیرا شخص خسته می‌شود. طی حرکت، یک نیروی اصطکاک ثابت ۸۰N با حرکت صندوقی مخالفت می‌کند. (الف) صندوق چه مدت پس از شروع حرکت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟ جوابها را با دقت دو رقم بامعنی به‌دست بیاورید.

برای انتگرال‌گیری، زمان بین $t = ۰s$ و $t = ۱۵s$ را به ۱۵۰۰ بازه، هر یک به‌اندازهٔ ۰٫۰۱s تقسیم کنید. هدف این نیست که مکان و سرعت را در پایان هر بازه نمایش بدهید. در اجرای اول، نتایج را در پایان هر ۱۰۰ بازه نمایش بدهید. در اجرای بعدی، قاعدتاً می‌خواهید که نتایج را، در گستره‌ای کوچکتر، در پایان بازه‌های کوچکتری نمایش بدهید. پس از به‌دست آوردن جدول نتایج، به دنبال دو نقطهٔ مجاور بگردید که $v_e = ۰$ بین آنهاست. اگر مقدار x این دو نقطه تا دو رقم با معنی یکسان باشد، محاسبه تمام است. در غیر این‌صورت باید بازه‌هایی را که نتایج را در انتهای آنها نشان می‌دهید کوچکتر کنید، یا احتمالاً بازه‌های انتگرال‌گیری را کوچکتر بگیرید، و محاسبه را تکرار کنید.

۶۹. توپی به جرم ۱۵۰g با سرعت اولیهٔ ۲۵m/s، از لبهٔ صخره‌ای مستقیماً به بالا پرتاب می‌شود. در بازگشت، توپ از کنار صخره می‌گذرد و ۳۰۰m پایین‌تر به‌زمین برمی‌خورد. علاوه بر نیروی گرانش، نیروی مقاومت هوای $F_D = -۰٫۰۰۱۵۰v$ هم بر توپ وارد می‌شود؛ F_D برحسب نیوتون و v برحسب m/s است. (الف) مدت حرکت این توپ چقدر است؟ (ب) سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟ (ج) نسبت این سرعت به سرعت حد چقدر است؟

یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون به‌کار ببرید. (راهنماییهای لازم را از بخش ۶ـ۶ و مسئلهٔ قبل بگیرید.) طول بازهٔ انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s بگیرید. مختصه و سرعت را، در فاصلهٔ $t = ۰s$ تا $t = ۱۲s$، هر ۰٫۱s نمایش بدهید. با این مقادیر باید جوابهایی با دقت دو رقم با معنی به‌دست بیاورید.

۷۰. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg از روی زمینی‌افقی‌پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ پرتابه ۱۵۰m/s و زاویهٔ پرتاب °۴۰ بالای سطح افقی است. علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوای $\mathbf{F}_D = -۰٫۳۰\mathbf{v}$ نیز بر پرتابه وارد می‌شود؛ $\mathbf{F}_D$ برحسب نیوتون و $\mathbf{v}$ برحسب m/s است. به‌طور عددی، بین $t = ۰$ (زمان پرتاب) و $t = ۲۰s$ از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید. اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s انتخاب کنید، اما نتایج را هر ۰٫۵s نمایش بدهید. هم مختصات x و y و هم دو مؤلفهٔ سرعت را باید در نظر بگیرید. معادلات $a_x = -(b/m)v_x$ و $a_y = -g - (b/m)v_y$ را به‌کار ببرید؛ b ثابت نیروی اصطکاک هواست. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. (الف) مسیر y برحسب x را از نقطهٔ پرتاب تا نقطهٔ برخورد به زمین رسم کنید. توجه کنید که مسیر نسبت به محور قائمی که از نقطهٔ اوج می‌گذرد متقارن نیست. اگر مقاومت هوا نبود، مسیر متقارن می‌شد. با استفاده از نمودار، یا جدول مقادیر، این کمیتها را تخمین بزنید: (ب) زمانی که پرتابه به نقطهٔ اوج مسیر خود می‌رسد و مختصات نقطهٔ اوج؛ (ج) زمانی که پرتابه به زمین می‌خورد، برد پرتابه، و سرعت آن درست پیش از برخورد. (د) این کمیتها را با مقادیری که در غیاب مقاومت هوا به‌دست می‌آمد مقایسه کنید. مقاومت هوا چه تغییری در ارتفاع اوج می‌دهد؟ در برد چطور؟ در سرعت پیش از برخورد چطور؟

۷۱. مقاومت هوا می‌تواند تأثیر چشمگیری در زاویهٔ پرتابی که به برد بیشینه می‌انجامد داشته باشد. برای دیدن این تأثیر، پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg را در نظر بگیرید که با سرعت ۱۵۰m/s بر فراز سطحی افقی پرتاب می‌شود، و فرض کنید که نیروی اصطکاک هوا $\mathbf{F}_D = -۰٫۳۰\mathbf{v}$ است، که در آن $\mathbf{F}_D$ برحسب نیوتون و $\mathbf{v}$ برحسب m/s است. برای هر یک از زوایای پرتاب °۲۵، °۳۰، °۳۵، و °۴۰، به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید: اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s بگیرید و نتایج را هر ۰٫۵s، از $t = ۰s$ (زمان پرتاب) تا $t = ۲۵s$ نمایش بدهید. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. با استفاده از این نتایج برد را تخمین بزنید. برد در کدام‌یک از این زوایا بیشینه است؟

۷۲. پرتابه‌ای که تحت اثر مقاومت هوا قرار دارد به سرعت حدی‌اش می‌رسد. فرض کنید که نیروی خالص وارد بر پرتابه $-mg\mathbf{j} - b\mathbf{v}$ باشد، که در آن b ثابت مقاومت شاره است و جهت مثبت محور y به طرف بالاست. درسرعت حد $\mathbf{v}_T$، نیروی خالص صفر می‌شود. بنابراین، $\mathbf{v}_T = -(mg/b)\mathbf{j}$. توجه کنید که این سرعت مؤلفهٔ افقی ندارد. پرتابه در نهایت مستقیماً به طرف پایین سقوط می‌کند.

می‌توانید با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، "ببینید" که یک پرتابه چگونه به سرعت حد می‌گراید. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg را در نظر بگیرید که، با سرعت اولیهٔ ۱۵۰m/s با زاویهٔ °۴۰ بالای سطح افقی، پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک شاره را ۰٫۵۰kg/s بگیرید. به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید و نتایج را هر ۰٫۵s، از $t = ۰s$ (زمان پرتاب) تا زمانی که مؤلفهٔ y سرعت به ۹۰ درصد v_T می‌رسد، نمایش بدهید. $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را در یک نمودار نمایش بدهید. توجه کنید که با نزدیک شدن v_y به v_T، v_x به ۰ می‌گراید.

۷۳. اگر اثر مقاومت هوا را بر پرتابه در نظر بگیریم، مختصات آن با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$x(t) = (v_{\circ x}/b)(1 - e^{-bt})$$
$$y(t) = (1/b^2)(g + bv_{\circ y})(1 - e^{-bt}) - (g/b)t$$

جهت مثبت y را به‌طرف بالا و مبدأ مختصات را در نقطهٔ پرتاب گرفته‌ایم. ضریب مقاومت b گرمای شدت برهم‌کنش هوا و پرتابه است. از

عبارتهای بالا مشتق بگیرید و نشان بدهید که مؤلفه‌های سرعت به شکل $v_x = v_{0x}e^{-bt}$ و $v_y = (1/b)(g + bv_{0y})e^{-bt} - g/b$اند، و مؤلفه‌های شتاب به شکل $a_x = -bv_{0x}e^{-bt}$ و $a_y = -(g+bv_{0y})e^{-bt}$. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب را در پایان هر بازهٔ زمانی به اندازهٔ Δt، از زمان t_1 تا زمان t_2، محاسبه کند.

اکنون این برنامه را برای بررسی اثرهوا بر پرتابه‌ای که با سرعت اولیهٔ $50\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ پرتاب $25°$ بالای سطح افقی، بر فراز زمین افقی پرتاب می‌شود به‌کار ببرید. (الف) فرض کنید $b = 0{,}10\,\mathrm{s^{-1}}$ است و با استفاده از برنامه، مختصات نقطهٔ اوج، و سرعت و شتاب پرتابه در آن نقطه را پیدا کنید. برای شروع، با استفاده از برنامه، مختصات، سرعت، و شتاب را هر $0{,}1\,\mathrm{s}$، از $t = 0\,\mathrm{s}$ تا $t = 4{,}5\,\mathrm{s}$، به‌دست بیاورید. برای محاسبهٔ جوابهایی با دقت دو رقم بامعنی ممکن است لازم باشد بازه‌ها را کوچکتر کنید و برنامه را دوباره اجرا کنید. جواب را که به دست آوردید توجه کنید که زمان رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج، کمتر از زمان مشابه در حالت بدون مقاومت هواست، نقطهٔ اوج کوتاهتر و، به نقطهٔ پرتاب، نزدیکتر است، و سرعت پرتابه هم (از حالتی که اصطکاک هوا نباشد) کمتر است. (ب) برای تعیین اینکه آیا این روند ادامه می‌یابد یا نه، محاسبه را با $b = 0{,}20\,\mathrm{s^{-1}}$ تکرار کنید. (ج) مقاومت هوا چگونه بر برد پرتابه اثر می‌گذارد؟ فرض کنید که $b = 0{,}10\,\mathrm{s^{-1}}$ و، با استفاده از برنامه، برد را پیدا کنید (مقدار x را به‌ازای $y = 0$ به‌دست بیاورید). این کار را برای $b = 0{,}20\,\mathrm{s^{-1}}$ هم تکرار کنید. (د) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد به زمین، در اثر مقاومت هوا چه تغییری می‌کند؟ برنامه را با $b = 0{,}10\,\mathrm{s^{-1}}$، و سپس با $b = 0{,}20\,\mathrm{s^{-1}}$ اجرا کنید و سرعت در لحظهٔ پیش از برخورد را به‌دست بیاورید. به یاد داشته باشید که در غیاب اصطکاک هوا، اندازهٔ هر یک از مؤلفه‌های سرعت، در لحظهٔ درست پیش از برخورد پرتابه به زمین و لحظهٔ پرتاب، یکسان است. توجه کنید که از معادلات بالا چنین نتیجه می‌شود که $a_x = -bv_x$ و $a_y = -g - bv_y$ است. با استفاده از این روابط، توضیح بدهید که چرا در نقطهٔ اوج $a_y = -g$ است، چرا a_x هیچگاه صفر نمی‌شود، و چرا اندازهٔ a_y، درست پیش از برخورد به زمین با افزایش b کم می‌شود؟

۷

کار و انرژی

یکی از مسائل اساسی دینامیک، پیدا کردن چگونگی حرکت ذره‌ای است که نیروهای وارد بر آن‌را می‌شناسیم. منظور از "ذره چگونه حرکت می‌کند" این است که مکان آن طی زمان چگونه تغییر می‌کند. در دو فصل گذشته، مسئله را در مورد خاص نیروی ثابت حل کردیم؛ در مورد نیروی ثابت می‌توان از فرمولهای حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد و $\mathbf{r}(t)$ را به‌دست آورد، و به این ترتیب مسئله به طور کامل حل می‌شود.

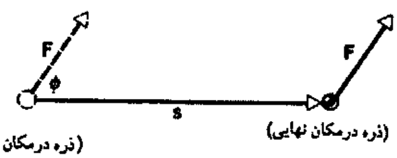
اما اگر نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره ثابت نباشد، مسئله دشوارتر است. برای نیروهای وابسته به زمان و سرعت، می‌شود این مسئله را با روشهای انتگرال‌گیری بخشهای ۶ـ۵ و ۶ـ۷ حل کرد. در این فصل، نیروهای وابسته به مکانِ ذره را ــ مثلاً نیروی جاذبه‌ای که زمین بر اجسام نزدیک به خود وارد می‌کند، یا نیرویی که فنر کشیده شده به جسم متصل به خود وارد می‌کند ــ تحلیل می‌کنیم. از این تحلیل می‌رسیم به مفهوم **کار** و مفهوم **انرژی جنبشی**، و به طرح **قضیهٔ کار-انرژی**، که موضوع اصلی این فصل است. در فصل ۸ انرژی را از دیدگاه وسیعتری بررسی می‌کنیم، و به قانون پایستگی انرژی می‌رسیم که نقش عمده‌ای در پیشرفت فیزیک داشته است.

۷ـ۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروی ثابت $\mathbf{F}$ بر آن وارد می‌شود، و در ساده‌ترین حالت، فرض کنید که حرکت در خط راستی در جهت نیرو انجام می‌شود. در چنین حالتی، کار W که نیرو روی ذره انجام می‌دهد طبق تعریف عبارت است از حاصل‌ضرب اندازهٔ نیرو و مسافت s که نیرو در طی آن اثر می‌کند. این تعریف را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$W = Fs \qquad (۱)$$

یک مورد کلی‌تر، نیروی ثابت وارد بر ذره ممکن است در جهت حرکت ذره نباشد. در این‌صورت، کاری را که نیرو روی ذره انجام می‌دهد به شکل حاصل‌ضرب مؤلفهٔ نیرو در جهت حرکت، و اندازهٔ جابه‌جایی ذره تعریف می‌کنیم (در شکل ۱). نیروی ثابت $\mathbf{F}$ که با



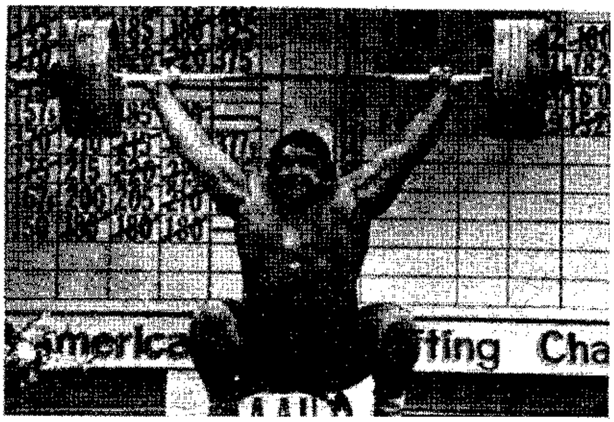
شکل۱. نیروی $\mathbf{F}$ بر ذره‌ای وارد می‌شود که جابه‌جایی آن $\mathbf{s}$ است. مؤلفه‌ای از $\mathbf{F}$ که کارانجام می‌دهد، $F\ \cos\ \phi$ است. کاری که $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد $Fs\ \cos\ \phi$ است، که می‌توان آن‌را به‌صورت $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$ نوشت.

جهتِ جابه‌جایی $\mathbf{s}$ زاویه ϕ می‌سازد، بر ذره وارد می‌شود. کار W که نیروی $\mathbf{F}$ در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، طبق تعریف ما، برابر است با

$$W = (F\ \cos\ \phi)s \qquad (۲)$$

البته ممکن است نیروهای دیگری هم بر ذره اثر کنند. معادلهٔ ۲ فقط کاری را تعیین می‌کند که نیروی مشخص $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد. کاری را که نیروهای دیگر بر ذره انجام می‌دهند باید جداگانه حساب کرد. کل کاری که انجام می‌شود برابر است با مجموع کارهایی که همهٔ نیروها انجام می‌دهند. (به طریق دیگر، چنان که در بخش ۷ـ۴ خواهیم دید، می‌شود اول نیروی خالص وارد بر ذره را پیدا کرد و سپس کاری را که این تک نیروی خالص انجام می‌دهد حساب کرد. این روش با روش جمع کردن کارهای تک‌تک نیروها هم‌ارز است و هر دو روش به یک نتیجه منجر می‌شوند.)

اگر ϕ صفر باشد، کاری که $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد همان Fs است، که در معادلهٔ ۱ هم آمده است. بنابراین، اگر نیرویی افقی جسمی را در راستای افقی (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، یا اگر نیرویی قائم جسمی را در راستای قائم (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با اندازهٔ نیرو ضربدر مسافت پیموده شده. اگر ϕ برابر با ۹۰° باشد، نیرو مؤلفه‌ای در جهت حرکت ندارد، و کاری هم



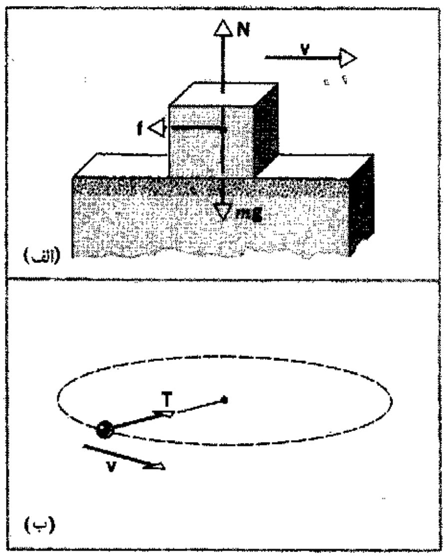
شکل۲. وزنه‌بردار نیروی بزرگی بر وزنه وارد می‌کند. اما در لحظه‌هایی که وزنه را بالای سرش نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد، زیرا وزنه ساکن است؛ نیرو هست اما جابه‌جایی نیست. البته این وزنه‌بردار قبلاً برای رساندن وزنه‌ها از زمین به این ارتفاع، کار انجام داده است.

روی ذره انجام نمی‌دهد. مثلاً، وزنه‌بردار (شکل ۲) وقتی که وزنه را از زمین بلند می‌کند کار انجام می‌دهد، ولی در حالتی که وزنه را نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد (چون جابه‌جایی صفر است). اگر در حالتی که وزنه بالای سرش است راه هم برود باز (بنابه تعریفی که برای کار کردیم) کاری روی وزنه انجام نمی‌دهد زیرا (با فرض آنکه جابه‌جایی در راستای قائم وجود نداشته باشد) نیروی قائمی که او وارد می‌کند بر جابه‌جایی افقی عمود است. شکل ۳ نمونه‌های دیگری از نیروهایی را نشان می‌دهد که کاری انجام نمی‌دهند.

توجه کنید که معادلهٔ ۲ را، هم به شکل $(F\ \cos\ \phi)s$ و هم به شکل $F(s\cos\phi)$ می‌شود نوشت. به عبارت دیگر کار را به دو طریق می‌توان حساب کرد، که هردو طریق به یک نتیجه می‌رسند: یا اندازهٔ جابه‌جایی را درمؤلفهٔ نیرو در جهت جابه‌جایی ضرب می‌کنیم، یا اندازهٔ نیرو را در مؤلفهٔ جابه‌جایی در جهت نیرو ضرب می‌کنیم. هر دو روش یادآور یکی از اجزای مهم در تعریف کارند: باید $\mathbf{s}$ مؤلفه‌ای در جهت $\mathbf{F}$ داشته باشد، و باید $\mathbf{F}$ مؤلفه‌ای در جهت $\mathbf{s}$ داشته باشد (تا کار مخالف صفر شود) (شکل ۴).

کار یک کمیت اسکالر است، اگرچه دو کمیتی که در تعریف آن وارد می‌شوند، نیرو و جابه‌جایی، بردارند. در بخش ۳ـ۵ گفتیم که حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار، بنابه تعریف، کمیتی است اسکالر که برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ یکی از بردارها در مؤلفهٔ بردار دیگر روی اولی. معادلهٔ ۲ نشان می‌دهد که کار هم دقیقاً به همین ترتیب محاسبه می‌شود، پس باید آن‌را به شکل حاصل‌ضرب اسکالر تعریف کرد. از مقایسهٔ معادلهٔ ۲ با معادلهٔ ۱۳ فصل ۳، می‌بینیم که کار را می‌شود چنین بیان کرد

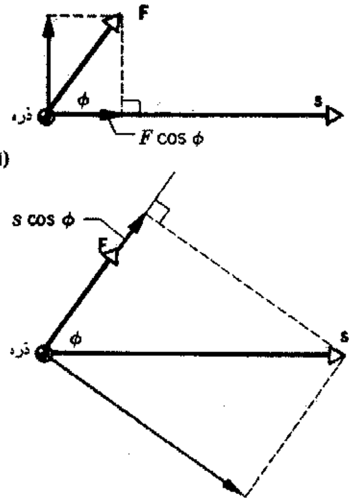
$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} \qquad (۳)$$



شکل۳. هر نیرویی که بر جسمی اثر کند الزاما روی آن کار انجام نمی‌دهد، حتی اگر جسم در حال حرکت باشد. در (الف)، وزن و نیروی عمودی کاری انجام نمی‌دهند، زیرا بر جابه‌جایی عمودند، ولی نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد. در (ب) جسمی داریم که به ریسمانی بسته شده است و بر دایره‌ای افقی می‌گردد. کشش $\mathbf{T}$ ریسمان کاری روی جسم انجام نمی‌دهد، زیرا مؤلفه‌ای در جهت جابه‌جایی ندارد.

که در آن نقطه علامت حاصل‌ضرب اسکالر (یا نقطه‌ای) است.

کار می‌تواند مثبت یا منفی باشد. نیرو اگر مؤلفه‌ای در خلاف جهت حرکت داشته باشد، کاری که انجام می‌دهد منفی است. این حالت متناظر است با زاویهٔ منفرجه بین بردار نیرو و بردار جابه‌جایی. مثلاً، اگر جسمی را در دست بگیرید و تا زمین پایین بیاورید، کاری که نیروی رو به بالای دست شما روی جسم انجام می‌دهد منفی است. در این مورد ϕ برابر با ۱۸۰° است، زیرا $\mathbf{F}$ به طرف بالا و $\mathbf{s}$ به طرف



شکل۴. (الف) کار W به شکل $W = (s)(F\ \cos\ \phi)$. (ب) کار W به شکل $W = (F)(s\ \cos\ \phi)$.

پایین است. (همزمان، نیروی گرانشی روی جسم، که به طرف پایین حرکت می‌کند، کار مثبت انجام می‌دهد.)

نیروی **F** "ناوردا" است، یعنی هم جهت و هم اندازهٔ آن مستقل از چارچوب لختی است که انتخاب می‌شود، اما **s** ناوردا نیست. ناظرهای گوناگون، بسته به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنند، می‌توانند عملاً هر اندازه و جهتی برای **s** به‌دست بیاورند. بنابراین، ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، که همگی نیروی وارد بر جسم را یکسان می‌سنجند، مقادیر متفاوتی برای کاری که آن نیرو بر جسم انجام می‌دهد تعیین می‌کنند. کار یک نیروی معین ممکن است برای ناظری مثبت، برای ناظری منفی، و برای ناظری دیگر حتی صفر باشد. به این نکته در بخش ۷ـ۶ خواهیم پرداخت.

معلوم شده است که کار ما به شکلی که ما آن‌را تعریف کردیم (معادلهٔ ۳)، مفهوم بسیار مفیدی در فیزیک است. تعریف خاص ما از "کار" ربطی به کاربرد رایج این واژه ندارد. کار فیزیکی را نباید با کار در مفهوم روزمره‌اش اشتباه کرد. شخصی که وزنهٔ سنگینی را در هوا به حالت سکون نگه داشته است شاید از لحاظ فیزیولوژیکی مشغول انجام کار سختی باشد، اما از لحاظ فیزیکی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. دلیلش این است که وزنه، که نیرو به آن وارد می‌شود، جابه‌جایی ندارد.

از طرف دیگر، اگر وزنه‌بردار را به شکل سیستمی از ذرات در نظر بگیریم (که در فصل ۹ به آن خواهیم پرداخت)، خواهیم دید که از دیدگاه میکروسکوپیک واقعاً کار انجام می‌شود. ماهیچه یک تکیه‌گاه صلب نیست و نمی‌تواند بار را به شکل ایستا تحمل کند. تک‌تک تارهای ماهیچه مرتباً منقبض و بعد آسوده می‌شوند، و اگر وضعیت را به این شکل بررسی کنیم، می‌بینیم که در هر انقباضی کار انجام می‌شود. به همین علت است که وزنه‌بردار در اثر نگه‌داشتن وزنه، خسته می‌شود. در این فصل، این "کار داخلی" را در نظر نمی‌گیریم. واژهٔ کار را تنها به معنی دقیق معادلهٔ ۳ به‌کار می‌بریم؛ و در این معنی، اگر ذره‌ای که نیرو بر آن وارد می‌شود جابه‌جا نشود، کار واقعاً صفر است.

یکای کار از کاری که نیروی واحد بر جسمی انجام می‌دهد و آن‌را به اندازهٔ فاصلهٔ واحد (در جهت نیرو) جابه‌جا می‌کند، به‌دست می‌آید. یکای SI کار، نیوتون‌ـمتر است، که آن‌را ژول (با علامت اختصاری J) می‌نامند. در سیستم بریتانیایی، یکای کار فوت‌ـپاوند است. در سیستمهای cgs، یکای کار دین‌ـسانتیمتر است، که آن‌را ارگ (erg) می‌نامند. با استفاده از روابط بین نیوتون، دین، و پاوند، و بین متر، سانتیمتر، و فوت، نتیجه می‌شود که $1\text{J} = 10^{7}\text{erg} = 0{,}7376\text{ft-lb}$ است.

یکای دیگری برای کار، که در مورد ذرات اتمی و زیراتمی مناسب است، الکترون‌ـولت (با علامت اختصاری eV) است؛ $1\text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\text{J}$. کار لازم برای کندن یکی از الکترونهای خارجی اتم از آن، نوعاً در حدود چند eV است. کار لازم برای کندن یک پروتون یا نوترون از هسته، نوعاً در حدود چند MeV (10^{6}eV) است.

مثال ۱. می‌خواهیم جسمی به جرم $m = 11{,}7\text{kg}$ را به مسافت $s = 4{,}65\text{m}$ روی سطح شیبداری بالا ببریم، چنان که ارتفاع آن به اندازهٔ $h = 2{,}86\text{m}$ زیاد شود (شکل ۵الف). فرض کنید سطح بدون اصطکاک است. فرض اگر نیرویی موازی با سطح شیبدار بر جسم اعمال کنید و آن‌را با سرعت ثابت بالا ببرید چقدر کار انجام می‌دهید؟

حل: شکل ۵ب نمودار جسم‌ـآزاد جسم را نشان می‌دهد. ابتدا باید P را به‌دست بیاوریم، یعنی اندازهٔ نیرویی که جسم را به طرف بالای سطح شیبدار هل می‌دهد. چون حرکت شتابدار نیست (فرض بر این بود که سرعت ثابت است)، نیروی خالص موازی با سطح شیبدار باید صفر باشد. محور x را موازی با سطح شیبدار، و جهت مثبت آن‌را به‌طرف بالای سطح می‌گیریم. از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$P - mg\,\sin\,\theta = 0 \qquad \text{مؤلفهٔ } x\text{:}$$

یا

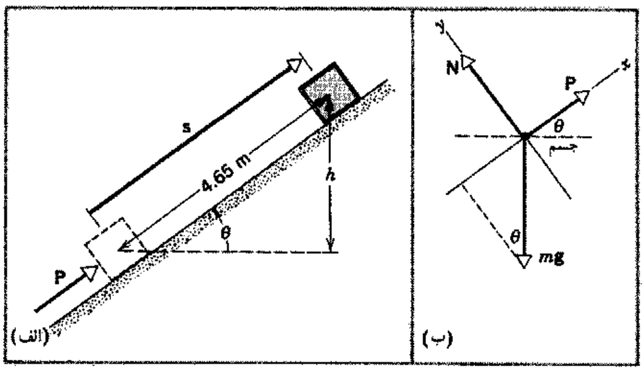
$$P = mg\,\sin\,\theta = (11{,}7\text{kg})(9{,}80\text{m/s}^2)\left(\frac{2{,}86\text{m}}{4{,}65\text{m}}\right) = 70{,}5\text{N}$$

به‌این ترتیب، کاری که **P** انجام می‌دهد، از معادلهٔ ۳ به‌ازای $\phi = 0°$، برابر است با

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps\,\cos 0° = Ps = (70{,}5\text{N})(4{,}65\text{m}) = 328\text{J}$$

توجه کنید که زاویهٔ ϕ ($=0°$) که در این عبارت به‌کار رفته، زاویهٔ بین نیروی اعمال شده و جابه‌جایی جسم است، که هر دو با سطح شیبدار موازی‌اند. زاویهٔ ϕ را نباید با زاویهٔ θ سطح شیبدار اشتباه کرد.

اگر می‌خواستیم همین جسم را بدون استفاده از سطح شیبدار، با سرعت ثابت، تا همین ارتفاع بالا ببریم، کاری که انجام می‌دادیم برابر



شکل ۵. مثال ۱. (الف) نیروی **P** جسم را به اندازهٔ **s** روی سطح شیبدار جابه‌جا می‌کند. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد جسم.

بود با نیروی قائم mg، ضربدر فاصلهٔ قائم h، یعنی

$$W = mgh = (۱۱٫۷\,\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(۲٫۸۶\,\mathrm{m}) = ۳۲۸\,\mathrm{J}$$

که همان مقدار قبلی است. تفاوت فقط در این است که با استفاده از سطح شیبدار می‌توان با نیروی کمتری ($P = ۷۰٫۵\,\mathrm{N}$) نسبت به حالت بدون سطح شیبدار ($mg = ۱۱۵\,\mathrm{N}$) جسم را بالا برد. در عوض، اگر از سطح شیبدار استفاده شود، جسم را باید به مسافت بیشتری ($۴٫۶۵\,\mathrm{m}$) نسبت به حالت مستقیم ($۲٫۸۶\,\mathrm{m}$) حرکت داد.

مثال ۲. کودکی سورتمه‌ای به جرم $۵٫۶\,\mathrm{kg}$ را تا مسافت $s = ۱۲\,\mathrm{m}$ روی سطحی افقی، با سرعت ثابت جلو می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_{k} برابر با ۰٫۲۰، و زاویهٔ طناب با سطح افقی $\phi = ۴۵^\circ$ باشد، کودک چقدر کار انجام می‌دهد؟

حل: شکل ۶الف وضعیت مسئله، و شکل ۶ب نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه را نشان می‌دهد. $\mathbf{P}$ کششی که کودک اعمال می‌کند، mg وزن سورتمه، $\mathbf{f}$ نیروی اصطکاک، و $\mathbf{N}$ نیروی عمودی‌ای است که زمین بر سورتمه وارد می‌کند. کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد برابر است با

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps\ \cos\phi$$

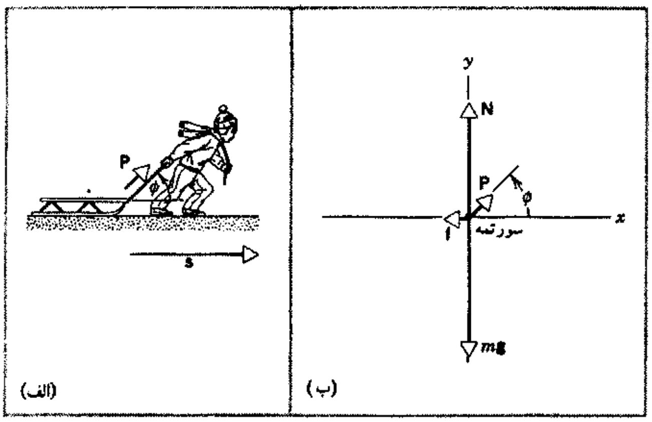
برای محاسبهٔ این کار، اول باید P را، که مجهول است، معلوم کرد. برای به‌دست آوردن P به نمودار جسم‌ـآزاد شکل ۶ب رجوع می‌کنیم. سورتمه شتاب ندارد؛ پس، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

مؤلفهٔ x: $\quad P\ \cos\phi - f = ۰$

مؤلفهٔ y: $\quad P\ \sin\phi + N - mg = ۰$

می‌دانیم که رابطهٔ f و N به‌صورت زیر است

$$f = \mu_{\mathrm{k}} N$$



شکل۶. مثال ۲. (الف) کودکی با وارد کردن نیروی $\mathbf{P}$ به ریسمانی که با سطح افقی زاویهٔ ϕ می‌سازد، سورتمه‌ای را به‌اندازهٔ مسافت $\mathbf{s}$ می‌کشد. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه.

این سه معادله سه کمیت مجهول دارند: P، f، و N. برای تعیین P، f و N را از این معادلات حذف می‌کنیم و از معادلهٔ باقی‌مانده P را به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود (باید خودتان تحقیق کنید)

$$P = \frac{\mu_{\mathrm{k}} mg}{\cos\phi + \mu_{\mathrm{k}}\sin\phi}$$

به‌ازای $\mu_{\mathrm{k}} = ۰٫۲۰$، $mg = (۵٫۶\,\mathrm{kg})(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲}) = ۵۵\,\mathrm{N}$، و $\phi = ۴۵^\circ$، خواهیم داشت

$$P = \frac{(۰٫۲۰)(۵۵\,\mathrm{N})}{\cos ۴۵^\circ + (۰٫۲۰)(\sin ۴۵^\circ)} = ۱۳\,\mathrm{N}$$

پس کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد عبارت است از

$$W = Ps\ \cos\phi = (۱۳\,\mathrm{N})(۱۲\,\mathrm{m})(\cos ۴۵^\circ) = ۱۱۰\,\mathrm{J}$$

مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{P}$ کاری روی سورتمه انجام نمی‌دهد. اما توجه کنید که این مؤلفه نیروی عمودی بین سورتمه و زمین را کم می‌کند ($N = mg - P\ \sin\phi$) و به‌این ترتیب، اندازهٔ نیروی اصطکاک ($f = \mu_{\mathrm{k}} N$) را کاهش می‌دهد.

اگر کودک نیروی P را به‌طور افقی اعمال کند (نه با زاویهٔ ۴۵°)، کاری که روی سورتمه انجام می‌شود بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا تغییری نمی‌کند؟ آیا نیروهای دیگر وارد بر سورتمه، روی آن کاری انجام می‌دهند؟

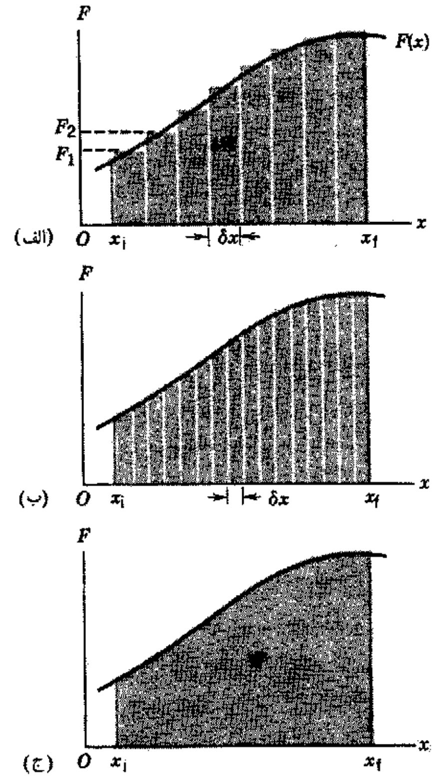
۲ـ۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی

اکنون کار نیرویی را که ثابت نیست بررسی می‌کنیم. فرض کنید نیرو فقط در یک جهت است که آن‌را جهت x می‌گیریم، و اندازهٔ آن برحسب x با تابع $F(x)$ بیان می‌شود. فرض کنید این نیرو بر جسمی وارد شود که در جهت x حرکت می‌کند. کاری که این نیروی متغیر انجام می‌دهد تا جسم از مکان اولیهٔ x_{i} به مکان نهایی x_{f} برسد چقدر است؟

در شکل ۷، نمودار F برحسب x رسم شده است. جابه‌جایی کل را به N بازهٔ کوچک، هر یک به اندازهٔ δx، تقسیم می‌کنیم؛ شکل ۷الف. بازهٔ اول را در نظر بگیرید؛ این بازه جابه‌جایی δx، از x_{i} تا $x_{\mathrm{i}} + \delta x$ است. طی این جابه‌جایی کوچک، $F(x)$ تقریباً ثابت، و برابر با $F_۱$ است؛ کارکوچکی که نیرو در این بازه انجام می‌دهد، $\delta W_۱$، تقریباً برابر است با

$$\delta W_۱ = F_۱\ \delta x \qquad (۴)$$

به‌همین ترتیب، بازهٔ بعدی مربوط به جابه‌جایی کوچک از $x_{\mathrm{i}} + \delta x$ به $x_{\mathrm{i}} + ۲\delta x$ است، و در این بازه نیرو تقریباً برابر است با مقدار ثابت $F_۲$. کاری که نیرو دراین بازه انجام می‌دهد تقریباً $\delta W_۲ = F_۲ \delta x$ است. کل کار W که نیروی $F(x)$ در جابه‌جایی ذره از x_{i} تا x_{f} انجام



شکل۷. (الف) مساحت زیرمنحنی نیروی متغیر یک‌بعدی $F(x)$، با ناحیهٔ بین دو حد x_i و x_f، که به بازه‌هایی به اندازهٔ δx تقسیم شده است تقریب زده می‌شود. مجموع مساحت نوارهای مستطیلی تقریباً با مساحت زیرمنحنی برابر است. (ب) با استفاده از تعداد بیشتری نوار باریکتر، تقریب بهتری حاصل می‌شود. (ج) در حد $\delta x \to 0$، مساحت واقعی به‌دست می‌آید.

می‌دهد، تقریباً برابر است با مجموع جملات زیادی به شکل معادلهٔ ۴، که مقدار F در هر یک از آنها فرق می‌کند. پس

$$W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots$$
$$= F_1 \delta x + F_2 \delta x + F_3 \delta x + \cdots$$

یا

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x \qquad (5)$$

که در آن، حرف یونانی سیگما (Σ) نماد جمع روی N بازه از x_i تا x_f است.

برای اینکه تقریب بهتر شود می‌توانیم جابه‌جایی کل از x_i به x_f را به تعداد بیشتری بازه تقسیم کنیم؛ شکل ۷ب. در این حالت δx کوچکتر می‌شود و مقدار F_n در هر بازه نمایندهٔ بهتری برای نیرو در آن بازه خواهد بود. روشن است که با کوچکتر کردن δx، و در نتیجه زیادتر کردن تعداد بازه‌ها، تقریب بهتری به‌دست می‌آید. کار انجام شده توسط F را می‌توان با میل دادن δx به صفر یا میل دادن تعداد بازه‌ها (N) به بینهایت، به‌طور دقیق به‌دست آورد. بنابراین، نتیجهٔ دقیق برابر است با

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x \qquad (6)$$

رابطهٔ

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum F_n \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

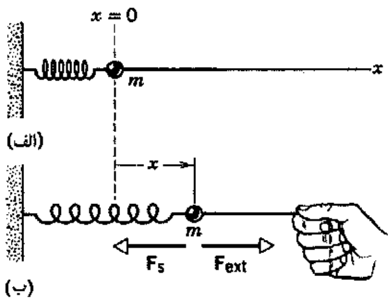
که شاید آن‌را در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده باشید، انتگرال F نسبت به x از x_i تا x_f را تعریف می‌کند. مقدار عددی این کمیت دقیقاً برابر است با مساحت ناحیهٔ بین منحنی نیرو و محورx، از x_i تا x_f (شکل ۷ج). بنابراین، انتگرال را به‌صورت نموداری می‌توان به مساحت تعبیر کرد. نماد $\int$ در واقع یک S تغییر شکل‌یافته است و فرایند انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [S حرف اول واژهٔ "جمع" در زبان انگلیسی است]. کل کاری را که نیروی F روی جسم، در جابه‌جایی از x_i به x_f، انجام می‌دهد می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (7)$$

چون نمایش برداری را از این معادلهٔ یک‌بعدی حذف کرده‌ایم، باید مراقب علامت F باشیم؛ علامت F مثبت است اگر F در جهت افزایش x باشد، و منفی است اگر F در جهت کاهش x باشد.

به عنوان مثالی برای نیروی متغیر، فنری را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم m نیرو وارد می‌کند (شکل ۸). ذره به طور افقی حرکت می‌کند، و جهت حرکت آن‌را جهت x می‌گیریم؛ مبدأ $(x = 0)$ نقطه‌ای است که وقتی ذره در آن باشد فنر در حالت "آسوده" است (شکل ۸الف). نیرویی خارجی، F_{ext}، در خلاف جهت نیروی فنر بر جسم اثر می‌کند. فرض می‌کنیم که این نیروی خارجی همواره تقریباً با نیروی فنر برابر است؛ به این ترتیب، ذره همیشه تقریباً در حالت تعادل است $(a = 0)$.

ذره را تا مسافت x، از مکان اولیه‌اش در $x = 0$، جابه‌جا می‌کنیم (شکل ۸ب). همراه با عامل خارجی که نیروی F_{ext} را بر ذره وارد



شکل۸. (الف) ذره‌ای به جرم m به فنری متصل است، و فنر در حالت آسوده است (یعنی طول طبیعی‌اش را دارد). (ب) ذره به اندازهٔ x جابه‌جا می‌شود، و در این حالت دو نیرو بر آن وارد می‌شود: نیروی بازگردانندهٔ فنر و نیروی عامل خارجی.

می‌کند، فنر هم نیروی مقاوم F_s را بر ذره وارد می‌کند. این نیرو، با تقریب خوبی، برابر است با

$$F_s = -kx \qquad (۸)$$

k یک ثابت مثبت است، که آن‌را ثابت نیروی فنر می‌نامند. ثابت k معیاری از مقدار نیروی لازم برای کشیدن فنر به اندازهٔ معین است: هر چه فنر سخت‌تر باشد، مقدار k آن بزرگتر است. معادلهٔ ۸ قانون نیروی فنر است، و آن‌را قانون هوک می‌نامند. علامت منفی در معادلهٔ ۸ یادآوری می‌کند که نیرویی که فنر اعمال می‌کند، همواره در خلاف جهت جابه‌جایی ذره است. اگر فنر کشیده شود، $x > ۰$ و F_s منفی است، اگر فنر فشرده شود، $x < ۰$ و F_s مثبت است. نیروی فنر یک نیروی بازگرداننده است: این نیرو همواره می‌خواهد که ذره را به محل $x = ۰$ برگرداند. بیشتر فنرهای واقعی به‌خوبی از معادلهٔ ۸ پیروی می‌کنند، البته به شرط اینکه بیش از حد معینی کشیده نشوند.

ابتدا می‌خواهیم کاری را که فنر روی ذره انجام می‌دهد، در جابه‌جایی ذره از مکان اولیهٔ x_i به مکان نهایی x_f، محاسبه کنیم. معادلهٔ ۷ را با F_s به‌کار می‌بریم

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{۱}{۲}kx_i^۲ - \frac{۱}{۲}kx_f^۲ \qquad (۹)$$

کاری که فنر روی ذره انجام می‌دهد مثبت است اگر $x_i^۲ > x_f^۲$ باشد (یعنی اگر اندازهٔ جابه‌جایی اولیه از اندازهٔ جابه‌جایی نهایی بیشتر باشد). توجه کنید که فنر، در برگرداندن ذره به $x = ۰$، کار مثبت انجام می‌دهد. اگر اندازهٔ جابه‌جایی اولیه از اندازهٔ جابه‌جایی نهایی کوچکتر باشد، فنر روی ذره کار منفی انجام می‌دهد.

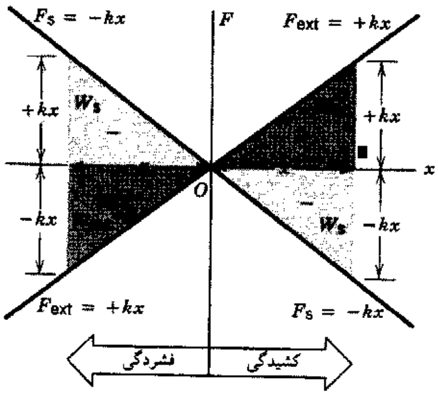
برای محاسبهٔ کاری که فنر، در حرکت ذره از $x = ۰$ به نقطهٔ x، روی آن انجام می‌دهد، می‌گذاریم $x_i = ۰$ و $x_f = x$؛ نتیجه می‌شود که

$$W_s = \int_۰^x (-kx)dx = -\frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که کاری که فنر هنگام فشرده شدن به اندازهٔ x انجام می‌دهد، با کاری که هنگام کشیده شدن به اندازهٔ x انجام می‌دهد یکسان است، زیرا در معادلهٔ ۱۰ مجذور جابه‌جایی ظاهر می‌شود؛ x هر علامتی که داشته باشد، علامت $x^۲$ مثبت، و علامت W_s منفی است.

حالا ببینیم عامل خارجی، در حرکت ذره از $x_i = ۰$ به $x_f = x$، چقدر کار انجام می‌دهد؟ برای اینکه ذره در حالت تعادل بماند، نیروی خارجی F_{ext} باید با نیروی فنر هم‌اندازه، اما در خلاف جهت آن باشد؛ پس، $F_{ext} = +kx$. با تکرار محاسبه، مانند معادلهٔ ۱۰، کار عامل خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$W_{ext} = +\frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۱۱)$$



شکل۹. کار W_s نیروی فنر با نواحی منفی (سایهٔ خاکستری در شکل)، و کار W_{ext} نیروی خارجی در حالت تعادل با نیروی فنر با نواحی مثبت (سایهٔ رنگی در شکل) مشخص شده است. فنر چه کشیده شود ($x > ۰$) و چه فشرده شود ($x < ۰$)، W_s منفی و W_{ext} مثبت است.

توجه کنید که این مقدار، دقیقاً منفی مقداری است که در معادلهٔ ۱۰ داشتیم.

W_s و W_{ext} را، با محاسبهٔ مساحت بین منحنی نیرو-جابه‌جایی مورد نظر و محور x (از $x = ۰$ تا مقدار دلبخواه x) هم نیز می‌توان به‌دست آورد. در شکل ۹، دو خط راست شیبداری که از مبدأ می‌گذرند، نمودار نیروی خارجی برحسب جابه‌جایی ($F_{ext} = +kx$) و نیروی فنر برحسب جابه‌جایی ($F_s = -kx$) اند. نیمهٔ راست نمودار ($x > ۰$) متناظر با کشیدگی فنر و نیمهٔ چپ آن ($x < ۰$) متناظر با فشردگی فنر است.

در کشیدن فنر، کاری که نیروی خارجی انجام می‌دهد مثبت است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست بالا، با علامت W_{ext}، مشخص شده است. قاعدهٔ این مثلث $+x$، و ارتفاع آن $+kx$ است؛ پس مساحت آن می‌شود

$$\frac{۱}{۲}(+x)(+kx) = +\frac{۱}{۲}kx^۲$$

که با معادلهٔ ۱۱ سازگار است. هنگامی که فنر کشیده می‌شود، کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد منفی است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست پایین، با علامت W_s، مشخص شده است. با استدلال هندسی مشابهی می‌شود نشان داد که مساحت این مثلث $-۱/۲kx^۲$ است، که با معادلهٔ ۱۰ سازگار است.

در فشردن فنر، چنان که از نیمهٔ چپ شکل ۹ پیداست، کار W_{ext} عامل خارجی همچنان مثبت، و کار W_s فنر همچنان منفی است؛ این همان چیزی است که از علامت نیروها و جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

مثال ۳. فنری به‌طور قائم آویزان، و در حالت تعادل است. جسمی به جرم $۶٫۴۰ \, kg$ به فنر می‌بندیم، اما ابتدا آن‌را همانجا نگه می‌داریم تا فنر کشیده نشود. سپس دستی را که جسم روی آن است به آرامی پایین می‌آوریم تا جسم با سرعت ثابت پایین بیاید و به نقطهٔ تعادل برسد؛

اندازه‌گیری نشان می‌دهد که فنر به‌اندازهٔ $s = ۰٫۱۲۴\mathrm{m}$ نسبت به طول طبیعی‌اش، کشیده شده است. کاری را که (الف) گرانش، (ب) فنر، و (ج) دست ما روی جسم انجام داده است حساب کنید.

حل: ثابت نیروی فنر را نداریم، اما می‌توانیم آن‌را به‌دست بیاوریم؛ می‌دانیم که در حالت کشیده شده، بین نیروی رو به بالای فنر و نیروی رو به پایین گرانش تعادل برقرار است:

$$\Sigma F = mg - ks = ۰$$

در اینجا جهت رو به پایین را مثبت گرفته‌ایم. از این معادله k را به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود که

$$k = mg/s = (۶٫۴۰\mathrm{kg})(۹٫۸۰\mathrm{m/s^۲})/(۰٫۱۲۴\mathrm{m}) = ۵۰۶\mathrm{N/m}$$

برای پیدا کردن کار نیروی گرانش، W_g ، توجه کنید که این نیرو ثابت است، و با جابه‌جایی موازی است. پس می‌توانیم معادلهٔ ۱ را به‌کار ببریم:

$$W_g = Fs = mgs = (۶٫۴۰\mathrm{kg})(۹٫۸۰\mathrm{m/s^۲})(۰٫۱۲۴\mathrm{m}) = +۷٫۷۸\mathrm{J}$$

این کار مثبت است، زیرا نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند. برای محاسبهٔ کار فنر، معادلهٔ ۱۰ را با $x = s$ به‌کار می‌بریم

$$W_s = -\frac{۱}{۲}ks^۲ = -\frac{۱}{۲}(۵۰۶\mathrm{N/m})(۰٫۱۲۴\mathrm{m})^۲ = -۳٫۸۹\mathrm{J}$$

این کار منفی است، زیرا نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است.

یک راهِ پیدا کردن کاری که دست انجام می‌دهد، W_h، آن است که نیروی دست بر جسم (هنگام پایین آوردن جسم) را حساب کنیم. اگر جسم در این مدت در حالت تعادل باشد، نیروی رو به بالای F_h را که دست وارد می‌کند می‌توانیم از قانون دوم نیوتون، به‌ازای $a = ۰$، حساب کنیم:

$$\Sigma F = -kx - F_h + mg = ۰$$

یا

$$F_h = mg - kx$$

حالا کار را می‌توان با انتگرالی به شکل معادلهٔ ۷، با یک علامت منفی، به‌خاطر اینکه نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است، محاسبه کرد.

$$W_h = -\int_۰^s F_h dx = -\int_۰^s (mg - kx)dx$$

$$= -mgs + \frac{۱}{۲}ks^۲$$

$$= -mgs + \frac{۱}{۲}\left(\frac{mg}{s}\right)s^۲ = -\frac{۱}{۲}mgs = -۳٫۸۹\mathrm{J}$$

راه ساده‌تر برای به‌دست آوردن همین نتیجه این است که توجه کنیم که اگر جسم (که آن‌را ذره در نظر می‌گیریم) به آهستگی و با سرعت ثابت پایین بیاید، نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، کل کاری که همهٔ نیروهای وارد بر ذره انجام می‌دهند باید صفر باشد

$$W_{net} = W_s + W_g + W_h = ۰$$

$$W_h = -W_s - W_g = -(-۳٫۸۹\mathrm{J}) - ۷٫۷۸\mathrm{J} = -۳٫۸۹\mathrm{J}$$

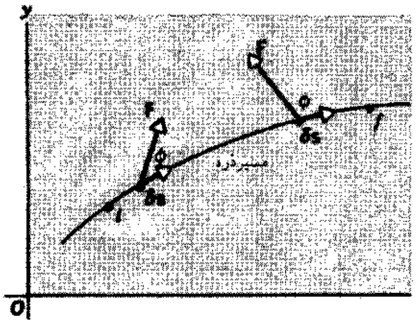
توجه کنید که کارِ دست برابر است با کار فنر.

۷ـ۳ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دوبعدی (اختیاری)

هم‌جهت، و هم اندازهٔ نیروی $\mathbf{F}$ که بر یک ذره اثر می‌کند می‌تواند تغییر کند، و مسیر ذره هم می‌تواند منحنی باشد. برای محاسبهٔ کار در این حالت کلی، مسیر را به تعداد زیادی جابه‌جایی کوچک $\delta\mathbf{s}$ تقسیم می‌کنیم، که هر یک در راستای مماس بر مسیر و در جهت حرکت است. شکل ۱۰ دو تا از این جابه‌جاییها را برای مسیری خاص نشان می‌دهد؛ این شکل، همچنین نیروی $\mathbf{F}$ و زاویهٔ ϕ بین $\mathbf{F}$ و $\delta\mathbf{s}$ را در هر نقطه نشان می‌دهد. کار δW را که طی جابه‌جایی $\delta\mathbf{s}$ روی ذره انجام می‌شود می‌توانیم از رابطهٔ زیر پیدا کنیم

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{s} = F\cos\phi\,\delta s \qquad (۱۲)$$

در این معادله، $\mathbf{F}$ نیروی وارد بر ذره در نقطه‌ای است که جابه‌جایی $\delta\mathbf{s}$ را از آنجا گرفته‌ایم. کار نیروی متغیر $\mathbf{F}$ روی ذره، طی حرکت ذره از نقطهٔ i به نقطهٔ f در شکل ۱۰، به‌طور تقریبی با جمع کردن عنصرهای کار در اجزاء طولی کوچکی که مسیر i تا f را می‌سازند به‌دست می‌آید. اگر جزء طول δs بینهایت کوچک شود، می‌شود به جای آن دیفرانسیل ds گذاشت؛ در این صورت، جمع روی اجزاء مسیر به انتگرال تبدیل



شکل ۱۰. ذره‌ای، روی مسیر شکل، از نقطهٔ i به نقطهٔ f می‌رود. طی حرکت، نیروی $\mathbf{F}$ بر آن وارد می‌شود، که اندازه و جهت آن هر دو متغیر است. در حد $\delta s \to ۰$، به‌جای جزء طول ds می‌گذاریم، که در جهت سرعت لحظه‌ای است، و در نتیجه مماس بر مسیر است.

می‌شود، درست مثل معادلهٔ ۷. پس کار انجام شده عبارت است از

$$W = \int_i^f \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F\cos\phi\, ds \qquad (۱۳)$$

برای محاسبهٔ این انتگرال، باید شکل F و ϕ در معادلهٔ ۱۳ را در همهٔ نقاط مسیر بدانیم؛ هر دو اینها تابعی از مختصات x و y ذره در شکل ۱۰اند.

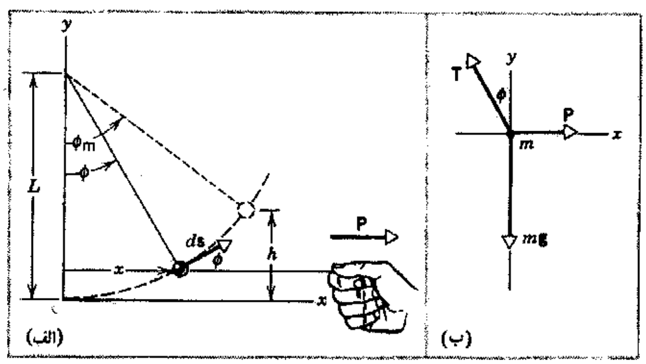
با نوشتن $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{s}$ برحسب مؤلفه‌ها، می‌توانیم عبارت دیگری، هم‌ارز با معادلهٔ ۱۳، به‌دست بیاوریم. $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$ و $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$، پس $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x dx+F_y dy$ است. (به‌یاد دارید که $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = ۱$ و $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = ۰$؛ (معادلهٔ ۱۴ فصل ۳). با قرار دادن این نتیجه در معادلهٔ ۱۳، خواهیم داشت

$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy) \qquad (۱۴)$$

انتگرالهایی به شکل انتگرالهای معادلات ۱۳ و ۱۴ را انتگرال خط می‌نامند؛ برای محاسبهٔ این انتگرالها باید $F\cos\phi$ یا F_x و F_y را در همهٔ نقاط مسیر ذره، که می‌تواند خط راست یا منحنی باشد، بدانیم. تعمیم معادلهٔ ۱۴ به مورد سه‌بعدی هم کاملاً سرراست است.

مثال ۴. جسم کوچکی به جرم m از ریسمانی به طول L آویزان است. جسم را با نیروی افقی P به یک طرف می‌کشیم تا زاویهٔ ریسمان، با راستای قائم ϕ_m شود (شکل ۱۱الف). جابه‌جایی چنان آهسته انجام می‌شود که می‌توانیم سیستم را در هر لحظه در حالت تعادل فرض کنیم. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم را پیدا کنید.

حل: حرکت در راستای کمانی به شعاع L است، و جابه‌جایی ds همواره بر کمان مماس است. در یک نقطهٔ میانی حرکت، که ریسمان با راستای قائم زاویهٔ ϕ می‌سازد. نمودار جسم‌ـآزاد ذره به‌صورت



شکل ۱۱. مثال ۴. (الف) ذره‌ای از ریسمانی به طول L آویزان است و با نیروی افقی P کشیده می‌شود. بیشترین زاویهٔ ریسمان با راستای قائم ϕ_m است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد ذره.

شکل ۱۱ب است، و از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود

$$P - T\sin\phi = ۰ \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$

$$T\cos\phi - mg = ۰ \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

T را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$P = mg\tan\phi$$

چون P همیشه در جهت x است، می‌شود معادلهٔ ۱۴ را، با $F_x = P$ و $F_y = ۰$، به‌کار برد و کار انجام شده توسط P را به‌دست آورد. به‌این ترتیب

$$W_P = \int P\,dx = \int_۰^{\phi_m} mg\tan\phi\,dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال، باید متغیرها را به یکی تبدیل کنیم؛ و ما اینجا x را برحسب ϕ تعریف می‌کنیم. در یک نقطهٔ میانی حرکت، که مختصهٔ افقی x است، داریم $x = L\sin\phi$ و از آنجا $dx = L\cos\phi\,d\phi$. این را به‌جای dx می‌گذاریم و انتگرال می‌گیریم

$$W_P = \int_۰^{\phi_m} mg\tan\phi(L\cos\phi\,d\phi)$$

$$= mgL\int_۰^{\phi_m}\sin\phi\,d\phi = mgL(-\cos\phi)\Big|_۰^{\phi_m}$$

$$= mgL(۱-\cos\phi_m)$$

از شکل ۱۱الف دیده می‌شود که $h = L(۱-\cos\phi_m)$، پس

$$W_P = mgh$$

کار نیروی (ثابت) گرانشی mg را هم می‌شود به روش مشابهی، براساس معادلهٔ ۱۴ (با $F_x = ۰$ و $F_y = -mg$) پیدا کرد. نتیجه می‌شود که $W_g = -mgh$ (مسئلهٔ ۱۶). علامت منفی از اینجا می‌آید که جابه‌جایی قائم در خلاف جهت نیروی گرانشی است. کار کشش ریسمان، W_T، صفر است. چون $\mathbf{T}$ در سراسر حرکت بر جابه‌جایی ds عمود است. حالا می‌توانیم ببینیم که کل کار صفر است: $W_{net} = W_P + W_g + W_T = mgh - mgh + ۰ = ۰$؛ که با صفر بودن نیروی خالص وارد بر ذره، در تمام لحظات حرکت هم جور در می‌آید.

توجه کنید که در این مسئله، کارِ (مثبت) نیروی افقی $\mathbf{P}$، کار (منفی) نیروی قائم mg را خنثی می‌کند. علتش این است که کار اسکالر است؛ یعنی جهت یا مؤلفه ندارد. حرکت ذره بستگی به کل کاری دارد که روی آن انجام می‌شود، که برابر است با حاصل جمع اسکالرِ کار تک‌تک نیروها.

۷ـ۴ انرژی جنبشی و قضیهٔ کارـانرژی

در این بخش، اثر کار را برحرکت ذره بررسی می‌کنیم. اگر نیرویی بر ذره‌ای وارد شود، و با نیروهای دیگر خنثی نشود، البته وضعیت حرکت جسم تغییرمی‌کند. قانون دوم نیوتون، یک روش برای تحلیل این تغییر حرکت است. اکنون روش دیگری را بررسی می‌کنیم که درنهایت به همان نتایج حاصل از قانون دوم نیوتون می‌انجامد، اما به‌کاربردن آن خیلی وقتها آسانتر است. این روش به یکی از قوانین پایستگی هم منجر می‌شود؛ قوانین پایستگی نقش مهمی در تعبیر فرایندهای فیزیکی دارند.

در اینجا فقط کار یک نیرو بر ذره را در نظر نمی‌گیریم، بلکه کل کار $W_{\rm net}$ حاصل از همهٔ نیروهای وارد بر ذره را در نظر می‌گیریم. برای یافتن این کار خالص دو راه وجود دارد. اول اینکه نیروی خالص، یعنی حاصل‌جمع برداری نیروهای وارد بر ذره را پیدا کنیم

$$\mathbf{F}_{\rm net} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots \qquad (۱۵)$$

و بعد این نیرو را به عنوان یک تک نیرو در نظر بگیریم و کار را، طبق معادلهٔ ۷ در حالت یک‌بعدی یا طبق معادلهٔ ۱۳ در حالت چندبعدی، محاسبه کنیم. در روش دوم، کارحاصل از هر یک از نیروهای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم

$$W_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}, \qquad W_2 = \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}$$
$$W_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}, \cdots$$

و چون کار اسکالر است، کارهای حاصل از تک‌تک نیروها را با هم جمع می‌کنیم و کل کار را به‌دست می‌آوریم

$$W_{\rm net} = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots \qquad (۱۶)$$

نتیجهٔ حاصل از این دو روش یکسان است، و انتخاب یکی از آنها فقط بستگی به این دارد که کدام‌یک ساده‌تر یا راحت‌تر است.

می‌دانیم که اگر نیروی خالص غیرصفری به ذره‌ای وارد شود، ذره شتاب می‌گیرد و به این ترتیب وضعیت حرکتش عوض می‌شود؛ مثلاً، از سرعت اولیهٔ $v_{\rm i}$ به سرعت نهایی $v_{\rm f}$ می‌رسد. اثر کار حاصل از این نیروی خالص غیرصفر که بر ذره وارد می‌شود چیست؟

ابتدا در مورد نیروی ثابت یک‌بعدی به‌این پرسش جواب می‌دهیم. ذره از $x_{\rm i}$ به $x_{\rm f}$ می‌رود، در اثر چنین نیرویی، به‌طور یکنواخت از $v_{\rm i}$ تا $v_{\rm f}$ شتاب می‌گیرد. کار این نیرو برابر است با

$$W_{\rm net} = F_{\rm net}(x_{\rm f} - x_{\rm i}) = ma(x_{\rm f} - x_{\rm i})$$

چون شتاب a ثابت است، می‌توانیم معادلهٔ ۲۰ فصل ۲ را، به شکل $v_{\rm f}^2 = v_{\rm i}^2 + 2a(x_{\rm f} - x_{\rm i})$، به‌کار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$W_{\rm net} = \frac{1}{2}mv_{\rm f}^2 - \frac{1}{2}mv_{\rm i}^2 \qquad (۱۷)$$

یعنی، نتیجه کار خالص انجام شده روی ذره آن است که مقدار کمیت $\frac{1}{2}mv^2$، از نقطهٔ i تا f تغییر کند. این کمیت را انرژی جنبشی (K) ذره می‌نامند و چنین تعریف می‌کنند

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (۱۸)$$

برحسب انرژی جنبشی K، معادلهٔ ۱۷ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$W_{\rm net} = K_{\rm f} - K_{\rm i} = \Delta K \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ ۱۹ نمایش ریاضی نتیجهٔ مهمی است به نام قضیهٔ کارـانرژی، که می‌شود آن‌را چنین بیان کرد:

> کار خالص نیروهای وارد بر هر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره.

ما این نتیجه را برای حالتی به‌دست آورده‌ایم که نیرو ثابت باشد، اما قضیهٔ کارـانرژی در حالت کلی برای نیروهای متغیر هم درست است. کمی بعد، در همین بخش، اثبات کلی قضیه در مورد نیروی متغیر را هم ارائه خواهیم کرد.

انرژی جنبشی هم، مانند کار، کمیتی اسکالر است؛ بر خلاف کار، انرژی جنبشی هیچگاه منفی نمی‌شود. قبلاً دیده بودیم که کار به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. پس تعجبی ندارد که انرژی جنبشی هم چنین باشد. می‌دانیم که ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، سرعت یک ذره را متفاوت می‌سنجند؛ بنابراین، مقادیری که به انرژی جنبشی ذره نسبت می‌دهند هم متفاوت است. اگر چه مقدارهایی که ناظرهای مختلف برای کار و انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند متفاوت است، اما رابطهٔ میان این کمیتها، یعنی رابطهٔ $W_{\rm net} = \Delta K$ در تمام چارچوبهای لخت برقرار است.

برای اینکه معادلهٔ ۱۹ از نظر ابعادی درست باشد، یکای انرژی جنبشی هم باید همان یکای کار باشد؛ یعنی انرژی جنبشی هم برحسب یکاهایی مثل ژول، ارگ، فوت، پاوند، و الکترون ولت بیان می‌شود.

اگر اندازهٔ سرعت ذره‌ای ثابت باشد انرژی جنبشی آن هم ثابت است؛ پس کار نیروی برایند باید صفر باشد. مثلاً در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی برایند به طرف مرکز دایره است، و همواره بر راستای حرکت عمود است. چنین نیرویی روی ذره کار انجام نمی‌دهد: این نیرو جهت سرعت را تغییر می‌دهد اما اندازهٔ آن‌را تغییر نمی‌دهد. نیروی برایند، تنها اگر در جهت حرکت مؤلفه داشته باشد کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی ذره را عوض می‌کند.

قضیهٔ کارـانرژی یک قانون جدید و مستقل در مکانیک کلاسیک نیست. ما کار را (مثلاً با معادلهٔ ۷) و انرژی جنبشی را (با معادلهٔ ۱۸) صرفاً تعریف کرده‌ایم و رابطهٔ بین این دو را از قانون دوم نیوتون به‌دست آورده‌ایم. به هر حال، قضیهٔ کارـانرژی در حل مسائلی که در آنها کار خالص از نیروهای خارجی روی ذره به سادگی قابل محاسبه باشد، و

بخواهیم سرعت ذره را در نقطه‌ای معین پیدا کنیم، قضیهٔ مفیدی است. هم اینکه قضیهٔ کار_انرژی نقطهٔ آغازی برای تعمیم کلی، مفهوم انرژی و بررسی چگونگی ذخیره شدن و تقسیم آن در اجزای سیستمهای پیچیده است. اصل پایستگی انرژی، موضوع فصل بعدی است.

اثبات کلی قضیهٔ کار_انرژی

آنچه می‌آید اثبات معادلهٔ ۱۹ در مورد نیروهای متغیر در یک‌بعد است، محاسبات مربوط به موارد دوبعدی و سه‌بعدی را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم (مسئلهٔ ۳۴). فرض کنید $F_{\rm net}$ نیروی خالص وارد بر ذره باشد. کار خالص نیروهای خارجی وارد برذره $W_{\rm net} = \int F_{\rm net}dx$ است. با کمی عملیات ریاضی می‌توانیم این انتگرال را تغییرمتغیر بدهیم و آن‌را به‌شکل مفیدتری در بیاوریم

$$F_{\rm net} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v = mv\frac{dv}{dx}$$

به این ترتیب

$$W_{\rm net} = \int F_{\rm net}dx = \int mv\frac{dv}{dx}dx = \int mv\ dv$$

حالا متغیر انتگرال‌گیری سرعت است. از سرعت اولیهٔ $v_{\rm i}$ تا سرعت نهایی $v_{\rm f}$ انتگرال می‌گیریم

$$W_{\rm net} = \int_{v_{\rm i}}^{v_{\rm f}} mv\ dv = m\int_{v_{\rm i}}^{v_{\rm f}} v\ dv = \frac{۱}{۲}m(v_{\rm f}^۲ - v_{\rm i}^۲)$$
$$= \frac{۱}{۲}mv_{\rm f}^۲ - \frac{۱}{۲}mv_{\rm i}^۲ = \Delta k$$

این نتیجه همان معادلهٔ ۱۹ است و نشان می‌دهد که قضیهٔ کار_انرژی در مورد نیروهای متغیر هم صدق می‌کند.

مثال ۵. یکی از روشهای سنجش انرژی جنبشی نوترونهای یک باریکه، که مثلاً از یک رآکتور هسته‌ای می‌آید، اندازه‌گیری مدتی است که طول می‌کشد تا یکی از ذرات باریکه مسافت بین دو نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ معین از هم را بپیماید. این روش را روش زمان پرواز می‌نامند. فرض کنید که نوترونی مسافت $d = ۶{,}۲\rm m$ را در زمان $t = ۱۶۰\,\mu\rm s$ می‌پیماید. انرژی جنبشی این نوترون چقدر است؟ جرم نوترون را $۱{,}۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\rm kg$ بگیرید.

حل: سرعت نوترون برابر است با

$$v = \frac{d}{t} = \frac{۶{,}۲\rm m}{۱۶۰ \times ۱۰^{-۶}\rm s} = ۳{,}۸۸ \times ۱۰^۴\rm m/s$$

و انرژی جنبشی آن از معادلهٔ ۱۸، برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}(۱{,}۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\rm kg)(۳{,}۸۸ \times ۱۰^۴ m/s)^۲$$
$$= ۱{,}۲۶ \times ۱۰^{-۱۸}\rm J = ۷{,}۹eV$$

در رآکتورهای هسته‌ای، نوترون در اثر شکافت هسته‌ای تولید می‌شود و انرژی جنبشی چنین نوترونهایی، نوعاً در حدود چند MeV است. روی نوترونهای این مثال، توسط یک عامل خارجی (به نام کُندکننده) کار منفی انجام شده و در نتیجه انرژی جنبشی این نوترونها با ضریب قابل‌توجهی، از چند MeV به چند eV، کاهش یافته است.

مثال ۶. جسمی به جرم $m = ۴{,}۵\rm g$ از ارتفاع $h = ۱۰{,}۵\rm m$ بالاتر از سطح زمین، از حالت سکون، سقوط می‌کند. سرعت این جسم، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم بتوانیم جسم را مثل ذره در نظر بگیریم. این مسئله را البته مستقیماً با قوانین نیوتون هم می‌شود حل کرد (فصل ۵)، اما این بار می‌خواهیم از قضیهٔ کار_انرژی استفاده کنیم. نیرو ثابت، و در جهت حرکت است. پس کار نیروی گرانش برابر است با

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = mgh$$ ۱

سرعت جسم، در ابتدا $v_۰ = ۰$، و در پایان v است. تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰$$

طبق قضیهٔ کار_انرژی، $W = \Delta K$ است، پس

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

بنابراین، سرعت جسم، درست پیش از برخورد، برابر است با

$$v = \sqrt{۲gh} = \sqrt{۲(۹{,}۸۰\rm m/s^۲)(۱۰{,}۵m)} = ۱۴{,}۳\rm m/s$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم جسم است، همان‌طور که قبلاً با استفاده از قوانین نیوتون هم دیده بودیم.

مثال ۷. جسمی به جرم $m = ۳{,}۶۳\rm kg$، با سرعت $v = ۱{,}۲۲\rm m/s$، روی میز افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. این جسم به فنری برخورد می‌کند و آن‌را می‌فشارد تا به حالت سکون برسد. فنر، در این حالت چقدر فشرده شده است؟ ثابت نیروی فنر $k = ۱۳۵\rm N/m$ است.

حل: تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = K_{\rm f} - K_{\rm i} = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲$$

کار فنرروی جسم، طی فشرده شدن فنر از حالت تعادل به اندازهٔ d، طبق معادلهٔ ۱۰، برابر است با

$$W = -\frac{۱}{۲}kd^۲$$

از قضیهٔ کار_انرژی نتیجه می‌شود که

$$-\frac{۱}{۲}kd^۲ = -\frac{۱}{۲}mv^۲$$

یا

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (۱٫۲۲\mathrm{m/s})\sqrt{\frac{۳٫۶۳\mathrm{kg}}{۱۳۵\mathrm{N/m}}} = ۰٫۲۰۰\,\mathrm{m}$$

محدودیتهای قضیهٔ کار_انرژی

قضیهٔ کار_انرژی (معادلهٔ ۱۹) را مستقیماً از قانون دوم نیوتون به‌دست آوردیم، و این قانون، در شکلی که ما بیانش کردیم، تنها در مورد ذرات صادق است. پس قضیهٔ کار_انرژی هم، به‌صورتی که ما گفتیم، فقط برای ذرات معتبر است. این قضیهٔ مهم را در مورد اجسام واقعی فقط وقتی می‌شود به‌کار برد که این اجسام مثل ذره رفتار کنند، یعنی همان‌طور که قبلاً دیدیم همهٔ نقاطشان دقیقاً مثل هم حرکت کنند. در استفاده از قضیهٔ کار_انرژی هم، فقط زمانی می‌توان اجسام گسترده را ذره در نظر گرفت که انرژی آنها صرفاً از نوع جنبشیِ انتقالی باشد.

مثلاً یک اتومبیل آزمایشی را در نظر بگیرید که مستقیماً از جلو به یک مانع سخت بتونی برخورد می‌کند و متلاشی می‌شود. روشن است که انرژی جنبشی انتقالی اتومبیل، در اثر برخورد به مانع، مچاله شدن و توقف آن، کم می‌شود. اما در این مسئله انواع دیگری از انرژی، جز انرژی جنبشی انتقالی هم دخیل‌اند، مثلاً انرژی داخلی مربوط به خم شدن و مچاله شدن اتومبیل؛ بخشی از این انرژی داخلی ممکن است به شکل افزایش دمای اتومبیل بروز کند، و بخشی از آن می‌تواند، به شکل گرما به محیط اطراف منتقل شود. توجه کنید که اگرچه ممکن است مانع طی برخورد، نیروی بزرگی بر اتومبیل وارد کند، اما این نیرو کاری انجام نمی‌دهد زیرا نقطهٔ اثر نیرو براتومبیل حرکت نمی‌کند. (تعریف اولیهٔ کار ــ معادلهٔ ۱ و شکل ۱ــ را به‌خاطر بیاورید. نقطهٔ اثر نیرو باید حرکت کند تا کار انجام شود.) بنابراین، در این مورد $\Delta K \neq ۰$، اما $W = ۰$ است؛ روشن است که معادلهٔ ۱۹ برقرار نیست. اتومبیل مثل ذره رفتار نمی‌کند: همهٔ نقاط آن دقیقاً یک نوع حرکت ندارند.

به دلایل مشابه، نمی‌شود جسمی را که روی سطحی می‌لغزد و تحت تأثیر نیروی اصطکاک قرار می‌گیرد، از لحاظ کار_انرژی، ذره فرض کرد (اگرچه در تحلیل حرکت جسم با استفاده از قوانین نیوتون باز هم می‌توانیم، مثل فصل ۶، آن‌را ذره در نظر بگیریم). نیروی اصطکاک، که آن‌را یک نیروی ثابت معرفی کردیم، در واقع بسیار پیچیده است؛ در فرایند اصطکاک دائماً جوشهای میکروسکوپیک تشکیل می‌شوند و می‌شکنند (بخش ۶ـ۲). این امر موجب تغییر شکل سطح می‌شود و انرژی داخلی آن‌را تغییر می‌دهد که بخشی از این انرژی می‌تواند به شکل افزایش دمای سطح ظاهر شود. چون در نظر گرفتن این انواع دیگر انرژی دشوار است و چون این اجسام مثل ذره رفتار نمی‌کنند، در حالت کلی درست نیست که قضیهٔ کار_انرژی را برای اجسامی که نیروی اصطکاک به آنها وارد می‌شود به‌کار ببریم.

در این‌گونه موارد، نباید اتومبیل برخوردکننده یا جسم لغزان را ذره تلقی کنیم، بلکه باید آنها را مثل سیستمهای بزرگی که تعداد زیادی ذره دارند در نظر بگیریم. به‌کار بردن قضیهٔ کار_انرژی برای تک‌تک ذرات این سیستم البته کار درستی است، اما فوق‌العاده دشوار است. در فصل ۹، روش ساده‌تری برای بررسی این سیستمهای پیچیدهٔ ذرات ارائه می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیهٔ کار_انرژی را تعمیم داد تا در این موارد هم قابل استفاده باشد.

۷ـ۵ توان

در طراحی سیستمهای مکانیکی، اغلب نه تنها باید مقدار کاری را که انجام می‌شود در نظر بگیریم، بلکه لازم است به آهنگ انجام این کار هم توجه کنیم. برای اینکه جسمی را تا ارتفاع معینی بالا ببریم مقدار معینی کار لازم است و این کار، چه انجام آن ۱ ثانیه طول بکشد چه ۱ سال، یکسان است. اما آهنگ انجام کار در این دو مورد متفاوت است.

توان را آهنگ انجام کار تعریف می‌کنیم. (در اینجا فقط توان مکانیکی را بررسی می‌کنیم. که مربوط به کار مکانیکی است. با تعریف کلی‌تر به عنوان انرژی منتقل شده در واحد زمان، می‌شود مفهوم توان را به توان الکتریکی، توان خورشیدی، و مانند آن تعمیم داد.) توان متوسط $\overline{P}$ حاصل از عاملی که نیروی معینی بر جسم وارد می‌کند، عبارت است از کار آن نیرو تقسیم بر کل مدتی که انجام کار طول می‌کشد، یعنی

$$\overline{P} = \frac{W}{t} \qquad (۲۰)$$

توان لحظه‌ای یک عامل در انجام کار، عبارت است از

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (۲۱)$$

که در آن dW جزء کار کوچکی است که در بازهٔ زمانی بینهایت کوچک dt انجام شده است. اگر توان در طی زمان ثابت باشد، P با $\overline{P}$ برابر است و خواهیم داشت

$$W = Pt \qquad (۲۲)$$

یکای SI توان ژول بر ثانیه است، که آن‌را وات می‌نامند (با علامت اختصاری W). این نامگذاری به افتخار جیمز وات (۱۷۳۶ تا ۱۸۱۹) است، که نقش مهمی در توسعهٔ ماشینهای بخار زمان خود داشت، و راهِ پیشرفت به سوی ماشینهای کاراتر امروزی را هموار کرد. در سیستم بریتانیایی، یکای توان $۱\mathrm{ft\cdot lb/s}$ است، اما اغلب از یکای رایجتری برای توان استفاده می‌شود که اسب بخار (hp) نام دارد. این یکا را

عموماً برای بیان توان موتورهای الکتریکی، موتور اتومبیلها، و مانند آن به‌کار می‌برند. یک اسب بخار، بنابر تعریف، $550\,\mathrm{ft\cdot lb/s}$ است که تقریباً معادل است با $746\mathrm{W}$.

کار را برحسب یکای توان × زمان هم می‌توان بیان کرد. نمونه‌اش یکای کیلووات-ساعت است، که شرکت برق برای سنجش مقدار کاری که (به شکل انرژی الکتریکی) به خانهٔ شما تحویل داده است به‌کار می‌برد. یک کیلووات ساعت، کاری است که عاملی با توانِ ثابت $1\mathrm{kW}$ در طی ۱ ساعت تحویل می‌دهد.

توانی را که به جسم داده می‌شود، برحسب سرعت جسم و نیروی وارد بر آن هم می‌توانیم بیان کنیم. به‌طور کلی، معادلهٔ ۲۱ را می‌شود چنین نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

با گذاشتن $\mathbf{v}$ به جای $d\mathbf{s}/dt$، نتیجه می‌شود که

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad (۲۳)$$

اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{v}$ با هم موازی باشند، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$P = Fv \qquad (۲۴)$$

توجه کنید که اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{v}$ موازی و در خلاف جهت هم باشند، توان منفی می‌شود. تحویل توان منفی به جسم، به معنی انجام کار منفی روی آن است، در این حالت، نیرویی که عامل خارجی به جسم وارد می‌کند در خلاف جهت جابه‌جایی $d\mathbf{s}$، و در نتیجه در خلاف جهت $\mathbf{v}$ است.

مثال ۸. وزن یک آسانسور خالی $5160\mathrm{N}$ $(1160\mathrm{lb})$ است. این آسانسور چنان طراحی شده است که می‌تواند حداکثر ۲۰ مسافر را طی ۱۸ ثانیه از طبقهٔ هم‌کف به طبقهٔ بیست‌وپنجم ساختمان ببرد. اگر فرض کنیم وزن هر مسافر به‌طور متوسط $710\mathrm{N}$ $(160\mathrm{lb})$، و فاصلهٔ بین دو طبقهٔ مجاور $3{,}5\mathrm{m}$ $(11\mathrm{ft})$ است، توان ثابت موتور آسانسور حداقل چقدر باید باشد؟ (فرض بر آن است که همهٔ کاری که آسانسور را حرکت می‌دهد از موتور می‌آید، و آسانسور وزنهٔ مقابله ندارد.)

حل: حداقل نیروی لازم برابر با مجموع وزن آسانسور خالی و وزن مسافران است، $F = 5160\mathrm{N} + 20(710)\mathrm{N} = 19400\mathrm{N}$. کاری که باید انجام شود برابر است با

$$W = Fs = (19400\mathrm{N})(25\times 3{,}5\mathrm{m}) = 1{,}7\times 10^{6}\mathrm{J}$$

بنابراین، حداقل توان لازم برابر خواهد بود با

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1{,}7\times 10^{6}\mathrm{J}}{18\mathrm{s}} = 94\mathrm{kW}$$

که معادل $126\mathrm{hp}$ است، در حدود توان موتور بعضی اتومبیلهای سواری. البته به علت اتلاف ناشی از اصطکاک و اتلافهای دیگر، حداقل توانی که موتور برای بالا بردن آسانسور تأمین می‌کند باید از این بیشتر باشد.

در عمل آسانسور معمولاً یک وزنهٔ مقابله هم دارد که با بالا رفتن اتاقک آسانسور پایین می‌آید. موتور باید به اتاقک توان مثبت و به وزنه پایین‌رونده توان منفی تحویل بدهد. به این ترتیب، توان خالصی که موتور باید تأمین کند، به مقدار زیادی کمتر از آن است که محاسبه شد.

۶-۷ چارچوبهای مرجع (اختیاری)

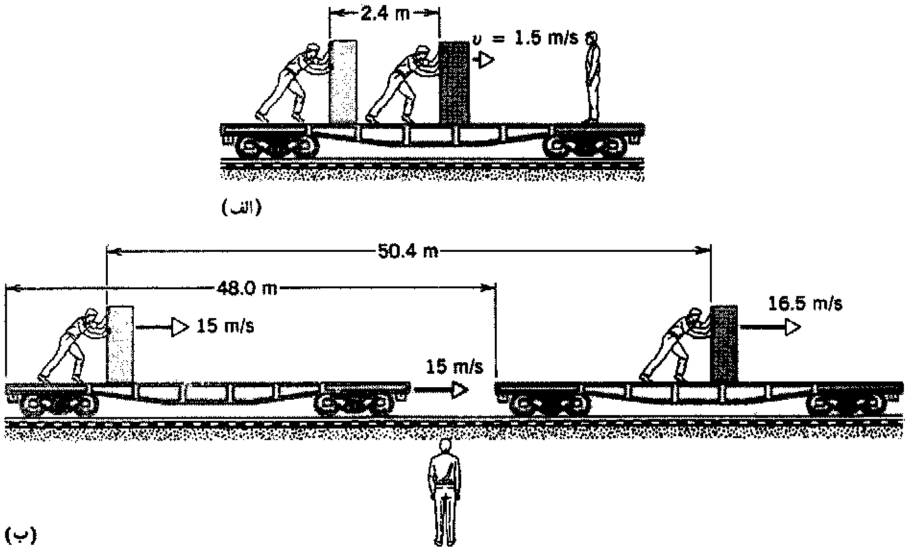
قوانین نیوتون فقط در چارچوبهای مرجع لخت برقرارند (بخش ۶-۸)، و اگر در چارچوب خاصی برقرار باشند، در هر چارچوب دیگری که با سرعت ثابت نسبت به آن حرکت کند هم برقرارند، کمیتهای فیزیکی خاصی هستند که نتیجهٔ اندازه‌گیری آنها در چارچوبهای لخت متفاوت همواره یکسان است. در مکانیک نیوتونی، این کمیتهای ناوردا عبارت‌اند از نیرو، جرم، شتاب، و زمان. کمیتهای دیگر، مثلاً جابه‌جایی یا سرعت، ناوردا نیستند و از سنجش آنها در چارچوبهای لخت متفاوت، نتایج متفاوتی به‌دست می‌آید. مثلاً، در بخش ۴-۶ دیدیم که مقادیری که ناظرهای دو چارچوب لخت مختلف برای یک سرعت اندازه می‌گیرند، چه ارتباطی با هم دارند.

ناظرهای دو چارچوب لخت متفاوت، از سنجش شتاب یک ذره نتیجهٔ یکسانی به‌دست می‌آورند، بنابراین، باید تغییر سرعت Δv ذره هم برای آنها یکسان باشد. اما این دو ناظر، در حالت کلی برای انرژی جنبشی ذره مقدار یکسانی به‌دست نمی‌آورند. ناظرهای در حال حرکت نسبت به هم، مقادیر متفاوتی برای جابه‌جایی یک ذره می‌سنجند؛ بنابراین (اگرچه نیروی وارد بر ذره را یکسان می‌سنجند، چون نیرو ناورداست) مقادیر متفاوتی برای کار انجام شده روی ذره به‌دست می‌آورند. در این بخش، به کمک یک مثال عددی خاص، این مسائل را روشن می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قضیهٔ کار-انرژی برای ناظرهای همهٔ چارچوبهای لخت معتبر است.

مثال زیر را در نظر بگیرید. کارگری صندوقی را در قسمت بار قطاری که روی ریلهای افقی است هل می‌دهد. قطار با سرعت ثابت $15{,}0\mathrm{m/s}$ در حرکت است صندوق $12\mathrm{kg}$ جرم دارد و کارگر آن را به‌اندازهٔ $2{,}4\mathrm{m}$ (نسبت به قطار) به‌جلو می‌برد، و در این مدت سرعت صندوق با شتاب ثابت زیاد می‌شود و (نسبت به قطار) از صفر به $1{,}5\mathrm{m/s}$ می‌رسد. شکل ۱۲الف وضعیت شروع و پایان را از دید ناظری که سوار قطار است نشان می‌دهد. از دید این ناظر، تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(12\mathrm{kg})(1{,}5\mathrm{m/s})^2 - 0 = 13{,}5\mathrm{J}$$

شتاب صندوق را (که ثابت فرض شده است) می‌توانیم از معادلهٔ ۲۰



شکل ۱۲. کارگری صندوقی را در قطاری به جلو هل می‌دهد، (الف) وضعیت از دید ناظر قطار و (ب) وضعیت از دید ناظرِ ساکن بر زمین.

فصل ۲ پیدا کنیم

$$a = \frac{v_f^{۲} - v_i^{۲}}{۲(x_f - x_i)} = \frac{(۱٫۵\mathrm{m/s})^{۲} - ۰}{۲(۲٫۴\mathrm{m})} = ۰٫۴۶۹\mathrm{m/s^{۲}}$$

این شتاب ناشی از نیروی خالصی است که آن هم ثابت و برابر است با $F = ma = (۱۲\mathrm{kg})(۰٫۴۶۹\mathrm{m/s^{۲}}) = ۵٫۶۳\mathrm{N}$. کاری که این نیرو در حین جابه‌جایی $\Delta x = ۲٫۴\mathrm{m}$ روی صندوق انجام می‌دهد برابر است با

$$W = F\Delta x = (۵٫۶۳\mathrm{N})(۲٫۴\mathrm{m}) = ۱۳٫۵\mathrm{J}$$

بنابراین، ناظر قطار نتیجه می‌گیرد که $W = \Delta K$ است، یعنی قضیهٔ کار-انرژی صدق می‌کند.

حالا ببینیم ناظری که نسبت به زمین ساکن است از همین نوع اندازه‌گیریها، چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟ (مقادیری را که این ناظر می‌سنجد با پریم نشان می‌دهیم.) وقتی صندوق نسبت به قطار ساکن است، از دید ناظر زمینی دارد با سرعت $v'_i = ۱۵٫۰\mathrm{m/s}$ به‌جلو حرکت می‌کند. پس از هل دادن صندوق، ناظر زمینی مشاهده می‌کند که سرعت آن به $v'_f = ۱۵٫۰\mathrm{m/s} + ۱٫۵\mathrm{m/s} = ۱۶٫۵\mathrm{m/s}$ می‌رسد، و نتیجه می‌گیرد که تغییر انرژی جنبشی آن برابر است با

$$\Delta K' = K'_f - K'_i = \frac{۱}{۲}mv_f'^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_i'^{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}(۱۲\mathrm{kg})(۱۶٫۵\mathrm{m/s})^{۲} - \frac{۱}{۲}(۱۲\mathrm{kg})(۱۵٫۰\mathrm{m/s})^{۲}$$
$$= ۲۸۴\mathrm{J}$$

این مقدار، با آنچه ناظر سوار بر قطار سنجیده بود $(\Delta K = ۱۳٫۵\mathrm{J})$ تفاوت زیادی دارد.

اما پیش از آنکه به صحت قضیهٔ کار-انرژی شک کنیم، کار انجام شده بر صندوق را از دید ناظر زمینی حساب می‌کنیم. چنانکه شکل ۱۲ب نشان می‌دهد، مقدار جابه‌جایی صندوق هم به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. از دید ناظر زمینی، نیرو تنها در طی مسافت ۲٫۴m وارد نشده بلکه در طی مسافت بزرگتر ۵۰٫۴m عمل کرده است؛ قطار با سرعت ۱۵٫۰m/s در مدت ۳٫۲s ($= \Delta v/a$ یا $\Delta v'/a'$؛ شتاب و زمان هر دو در مکانیک نیوتونی ناوردا هستند) که صندوق در حرکت است، ۴۸٫۰m می‌پیماید. بنابراین، جابه‌جایی $\Delta x'$ صندوق در این مدت برابر است با $۴۸٫۰\mathrm{m} + ۲٫۴\mathrm{m} = ۵۰٫۴\mathrm{m}$. اما نیرو ناورداست؛ از دید ناظر زمینی، $F' = F = ۵٫۶۳\mathrm{N}$. بنابراین، ناظر زمینی نتیجه می‌گیرد که

$$W' = F'\Delta x' = (۵٫۶۳\mathrm{N})(۵۰٫۴\mathrm{m}) = ۲۸۴\mathrm{J}$$

پس قضیهٔ کار-انرژی برای ناظر زمینی هم درست است! اگرچه این دو ناظر، مقادیر جابه‌جایی و سرعت را متفاوت مشاهده می‌کنند، و مقادیر کار و انرژی جنبشی را هم متفاوت به‌دست می‌آورند، اما هر دو نتیجه می‌گیرند که مقدار کار با تغییر انرژی جنبشی مساوی است.

قانون ناوردا در فیزیک قانونی است که شکل آن در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت یکسان باشد. یک مثال خوب، همین قضیهٔ کار-انرژی است، که ناوردا بودنش را دیدیم. درچارچوب لخت ناظر S، که در فرایند خاصی کار را W و تغییر انرژی جنبشی را ΔK می‌سنجد، قضیهٔ کار و انرژی به شکل $W = \Delta K$ است. ناظر S' که با سرعت ثابت نسبت به S حرکت می‌کند، در همان فرایند کار را W' و تغییر انرژی جنبشی را $\Delta K'$ می‌سنجد. در حالت کلی $W \neq W'$ و $\Delta K \neq \Delta K'$ است، اما ناظر S' هم نتیجه می‌گیرد که $W' = \Delta K'$ است. یک ناظر لخت دیگر، S''، هم می‌تواند نتیجه بگیرد که $W'' = \Delta K''$ است. شکل قضیهٔ کار-انرژی از دید ناظرهای همهٔ چارچوبهای لخت یکسان است. اصول ناوردایی، خیلی وقتها سرنخی از کارکرد جهان طبیعی به‌دست می‌دهند؛ این اصول حاکی از آن هستند که فلان رابطهٔ خاص، تصادفی و ناشی از موقعیت

مرجع فلان ناظر خاص نیست، بلکه اثر یک تقارن بنیادی طبیعت است.

مثال ۹. دو هواپیمای یکسان، هر یک به جرم m، با سرعت ثابت v نسبت به آب، بر فراز آب ساکن پرواز می‌کنند. هواپیمای ۱ بر یک ناو هواپیمابر، که نسبت به آب ساکن است، فرود می‌آید. قلابی که در بدنهٔ این هواپیماست به کابلی در عرشه وصل می‌شود، و کابل نیرویی از نوع نیروی فنر به هواپیما وارد می‌کند تا هواپیما متوقف شود. ناظری که در ناو ایستاده است، مسافت بین نقطهٔ آغاز اتصال هواپیما به کابل تا سکون کامل هواپیما را برابر با d می‌سنجد. با چشمپوشی از نیروهای دیگر وارد بر هواپیما (مثلاً اصطکاک)، درستی قضیهٔ کار-انرژی را از دید (الف) ناظر همراه‌با ناو و (ب) خلبان هواپیمای ۲، که همچنان با همان سرعت اولیه در همان جهت اولیه پرواز می‌کند بررسی کنید.

حل: (الف) تغییر انرژی جنبشی برای ناظر سوار بر ناو برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

این ناظر مشاهده می‌کند که هواپیما متوقف می‌شود، پس طبیعی است که تغییر انرژی جنبشی آن‌را منفی بسنجد.

کابل یک نیروی فنروار برهواپیما وارد می‌کند؛ اگر ثابت نیروی مؤثر را k بگیریم، این نیرو روی هواپیما کاری به مقدار

$$W_s = -\frac{1}{2}kd^2$$

انجام می‌دهد. طبیعی است که این کار، از دید این ناظر، منفی است، زیرا هنگام فرود هواپیما، نیروی فنروار و جابه‌جایی هواپیما روی عرشه در خلاف جهت یکدیگرند. اگر از نیروهای دیگر (از جمله اصطکاک) صرفنظر کنیم، مطمئناً می‌توانیم هواپیما را مثل ذره در نظر بگیریم، و برای این ناظر قضیهٔ کار-انرژی درست است. و دیگر اینکه در این چارچوب مرجع، W و ΔK هر دو منفی‌اند.

(ب) از دید خلبان هواپیمای ۲، انرژی جنبشی اولیهٔ هواپیمای ۱ صفر است: دو هواپیما کنار هم پرواز می‌کنند و نسبت به هم حرکتی ندارند. هنگامی که هواپیمای ۱ روی ناو هواپیمابر متوقف می‌شود، سرعت آن نسبت به هواپیمای ۲ برابر با $-v$ است؛ پس تغییر انرژی جنبشی آن به‌صورت زیر است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = +\frac{1}{2}mv^2$$

ممکن است عجیب به‌نظر برسد که از دیدگاه خلبان هواپیمای ۲، انرژی جنبشی هواپیمای ۱ زیاد می‌شود، اما در چارچوب مرجع هواپیمای ۲، هواپیمای ۱ در ابتدا ساکن بود و نهایتاً با سرعت v حرکت می‌کرده است.

در چارچوب هواپیمای ۲، کابل کار مثبت انجام می‌دهد. از دید خلبان این هواپیما، نیروی فنروار در خلاف جهت هواپیمای خودش است، و جابه‌جایی هواپیمای ۱ هم در همان جهت نیروست. پس درچارچوب مرجع هواپیمای ۲ هم قضیهٔ کار-انرژی درست است، و این بار W و ΔK هر دو مثبت‌اند.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که هم علامت کاری که نیرو انجام می‌دهد و هم علامت تغییر انرژی جنبشی یک ذرهٔ معین، می‌تواند به چارچوب مرجع ناظر بستگی داشته باشد. اما با وجود این اختلاف در تعبیر، هر دو ناظر در اعتبار قضیهٔ کار-انرژی توافق دارند (پرسش ۲۲ را هم ببینید، که در آن این فرایند از دیدگاه خلبان هواپیمای ۱ هم بررسی می‌شود.)

۷-۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد[۱] (اختیاری)

در بخش قبل، برای تبدیل سرعت از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، فرمول گالیله‌ای نیوتونی را به‌کار بردیم: $v = v' + u$. این فرمول را در بخش ۴-۶ به‌دست آوردیم و گفتیم که در سرعتهای زیاد معتبر نیست؛ در چنین سرعتهایی، باید رابطهٔ صحیح را، که از نسبیت خاص حاصل می‌شود (معادلهٔ ۴۶ فصل ۴) به‌کاربرد. اگر به این فکر افتاده باشید که فرمول $\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی هم در سرعتهای زیاد نادرست از آب در می‌آید، درست فکر کرده‌اید.

فرمول کلی انرژی جنبشی، که می‌شود آن‌را در هر سرعتی به‌کار برد، چنین است

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right] \qquad (25)$$

(این نتیجه را در فصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد.) فرمول ۲۵ آیا معنی‌اش این است که $\frac{1}{2}mv^2$ غلط است؟ در سرعتهای زیاد حتماً چنین است، اما می‌توان نشان داد که معادلهٔ ۲۵، در سرعتهای کم واقعاً به $\frac{1}{2}mv^2$ تبدیل می‌شود. برای این کار، به عبارت بسط دوجمله‌ای $(1+x)^p$ نیاز داریم

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

در این رابطه $n!$ (بخوانید "n فاکتوریل") به معنی حاصلضرب همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا n است. پس، $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ است.

بسط دوجمله‌ای رابطهٔ مفیدی است، به‌خصوص وقتی که x در مقایسه با ۱ کوچک باشد. مثلاً فرض کنید x در حدود ۰٫۰۱ باشد.

---

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱ به تعویق انداخت.

در این‌صورت، جملهٔ دوم بسط، px، (اگر p خیلی بزرگ نباشد) خیلی کوچکتر از جملهٔ اول است. جملهٔ سوم از جملهٔ دوم هم کوچکتر است، و به همین ترتیب. اگر جملات به همین ترتیب کوچک و کوچکتر شوند، ممکن است برای محاسبه‌ای خاص کافی باشد که فقط چند جمله را نگه داریم و از بقیه صرفنظر کنیم.

در معادلهٔ ۲۵ برای انرژی جنبشی، عبارت داخل کروشه شامل جملهٔ $(۱ - v^۲/c^۲)^{-۱/۲}$ است. این عامل را می‌شود طبق فرمول دوجمله‌ای؛ با $x = -v^۲/c^۲$ و $p = -۱/۲$ بسط داد. فرض می‌کنیم کافی است که مثلاً سه‌جملهٔ بسط را نگه داریم

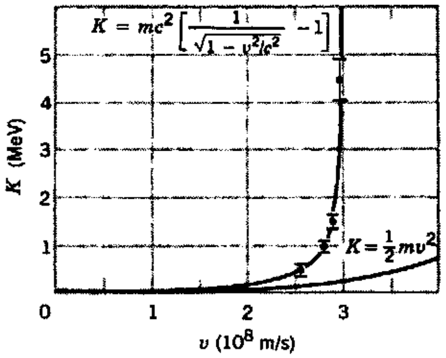
$$\left(۱ - \frac{v^۲}{c^۲}\right)^{-۱/۲} \approx ۱ + \left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{v^۲}{c^۲}\right) + \frac{\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)}{۲}\left(-\frac{v^۲}{c^۲}\right)^۲ = ۱ + \frac{۱}{۲}\frac{v^۲}{c^۲} + \frac{۳}{۸}\frac{v^۴}{c^۴} \qquad (۲۶)$$

حالا معادلهٔ ۲۶ را در معادلهٔ ۲۵ می‌گذاریم

$$K \approx mc^۲\left[۱ + \frac{۱}{۲}\frac{v^۲}{c^۲} + \frac{۳}{۸}\frac{v^۴}{c^۴} - ۱\right] = \frac{۱}{۲}mv^۲\left[۱ + \frac{۳}{۴}\frac{v^۲}{c^۲}\right] \qquad (۲۷)$$

می‌توانید ببینید که خطای نسبی انرژی جنبشی، اگر از $\frac{۱}{۲}mv^۲$ استفاده کنیم، در حدود $\frac{۳}{۴}(v^۲/c^۲)$ است. حتی اگر سرعت ذره به ۱٪ سرعت نور هم برسد، این خطا کمتر از ۱ قسمت در $۱۰^۴$ است. سرعتهای معمولی آزمایشگاهی، به‌ندرت از $۱۰^{-۶}$ برابر سرعت نور بیشترند؛ بنابراین، خطای استفاده از $\frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌مراتب کمتر از دقت ما در اندازه‌گیری انرژی است، و $\frac{۱}{۲}mv^۲$ تقریب بسیار خوبی است.

معادلهٔ ۲۵ همیشه درست است، چه در سرعتهای زیاد و چه در سرعتهای کم. پس چرا همیشه آن‌را بکار نبریم و $\frac{۱}{۲}mv^۲$ را به‌کلی کنار نگذاریم؟ اگر این کار را بکنیم در عمل با مشکل روبرو می‌شویم. معادلهٔ ۲۵ را به‌ازای $v = ۳۰۰\text{m/s}$ امتحان کنید؛ این سرعت، با بیشتر معیارها سرعت معقولی است (تقریباً برابر با سرعت صوت در هوا)، اما در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است ($v/c = ۱۰^{-۶}$ و $v^۲/c^۲ = ۱۰^{-۱۲}$). اگر عبارت داخل کروشهٔ معادلهٔ ۲۵ را با ماشین حسابتان محاسبه کنید، احتمالاً صفر به‌دست خواهید آورد. علتش این است که ماشین حساب شما فقط ۸ یا ۹ رقم به‌کار می‌برد. عبارت $۱ - ۱۰^{-۱۲}$ را "دقیقاً" برابر با ۱ براورد خواهد کرد. در عمل، اگر v کمتر از ۱٪ سرعت نور باشد، عبارت $\frac{۱}{۲}mv^۲$ را به‌کار می‌بریم که دقت کافی دارد و محاسبهٔ آن هم ساده‌تر است؛ و معادلهٔ ۲۵ را برای سرعتهای زیادتر نگه می‌داریم.



شکل۱۳. مقایسهٔ فرمولهای کلاسیک و نسبیتی انرژی جنبشی الکترون. در سرعتهای کم، دو فرمول یک نتیجه می‌دهد، اما داده‌ها به روشنی نشان می‌دهند که در سرعتهای نزدیک به سرعت نور، فرمول نسبیتی درست است.

شکل ۱۳ نتایج آزمون تجربی معادلهٔ ۲۵ را نشان می‌دهد. در این آزمایش، الکترونها را تا انرژی جنبشی معینی شتاب می‌دهند و سپس سرعتشان را، از طریق سنجش زمان لازم برای طی یک مسافت معین، به‌دست می‌آورند. روشن است که در سرعتهای زیاد، داده‌ها به نفع نتایج حاصل از نظریهٔ نسبیت‌اند. به این هم توجه کنید که در سرعتهای کم، دو منحنی از هم قابل تشخیص نیستند.

مثال ۱۰. شتابدهندهٔ تواترون آزمایشگاه شتابدهندهٔ فرمی، پروتون را تا انرژی جنبشی‌ای در حدود ۱TeV (یعنی $۱۰^{۱۲}\text{eV}$، که هر eV برابر با $۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{J}$ است) شتاب می‌دهد. سرعت یک پروتون ۱TeV چقدر است؟ جرم پروتون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$ است.

حل: انرژی جنبشی پروتون ۱TeV، برحسب یکای SI برابر است با

$$K = ۱\text{TeV} = ۱٫۶ \times ۱۰^{-۷}\text{J}$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۵

$$۱٫۶ \times ۱۰^{-۷}\text{J} = (۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}) \times (۳٫۰۰ \times ۱۰^۸\text{m/s})^۲ \times \left[\frac{۱}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} - ۱\right]$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که

$$v/c = ۰٫۹۹۹۹۹۹۵۶$$

یعنی v البته از c کوچکتر هست ولی بسیار به آن نزدیک است؛ تنها ۱۳۲m/s با c اختلاف دارد.

پرسشها

۱. آیا می‌توانید کلمات دیگری، مثل کار، نام ببریدکه معنی آنها در زبان روزمره عموماً با معنی علمی‌شان متفاوت باشد؟

۲. توضیح بدهید که چرا هنگامی که دیواری را فشار می‌دهید، و البته نمی‌توانید آن‌را حرکت بدهید، بدن شما خسته می‌شود، مگر نه اینکه کاری روی دیوار انجام نمی‌شود؟

۳. سه نیروی ثابت بر ذره‌ای وارد می‌شوند و ذره از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رود ثابت کنیدکه کار حاصل از برایند این سه نیرو برابر است با مجموع کارهای حاصل از تک‌تک نیروهاکه جداگانه حساب شده باشد.

۴. سطح شیبدار (مثال ۱) یک "ماشین" ساده است که به کمک آن می‌توانیم با نیروی کوچکتر (از آنچه بدون استفاده از ماشین لازم است) کار انجام بدهیم. در مورد گوه، اهرم، پیچ، چرخ‌دنده، و ترکیباتی از قرقره‌ها (مسئلهٔ ۹) هم همین‌طور است. اما این ماشینها نه تنها کار را کم نمی‌کنند بلکه عملاً قدری هم زیاد می‌کنند. چرا؟ چرا این ماشینها را به‌کار می‌بریم؟

۵. در یک مسابقهٔ طناب‌کشی، یک تیم به آهستگی وامی‌دهد و به طرف تیم حریف کشیده می‌شود. چه کاری انجام می‌شود و توسط چه تیمی؟

۶. چرا یک کیلومتر دوچرخه‌سواری در یک مسیر افقی، خیلی آسانتر از دویدن در همین مسافت است؟ در هر مورد باید وزن خودتان را یک کیلومتر منتقل کنید، و در مورد اول باید دوچرخه را هم با خودتان ببرید و تازه طی زمان کوتاهتری هم این مسافت را طی کنید؟[۱]

۷. فرض کنید مدارگردش زمین به دور خورشید دقیقاً دایره باشد. در این صورت آیا خورشید روی زمین کاری انجام می‌دهد؟

۸. توپ بولینگی را به‌آرامی از زمین بلند می‌کنید و روی میز می‌گذارید. دو نیرو به توپ وارد می‌شود: وزن توپ، mg، و نیروی رو به بالای شما، $-mg$. این دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند، چنانکه کلاً کاری انجام نمی‌شود. از طرف دیگر، می‌دانید که دست شما کار انجام می‌دهد. اشکال در کجاست؟

۹. فنری را نصف می‌کنیم. ثابت نیروی فنر اولیه، k، با ثابت نیروی هر یک از دو نیمهٔ حاصل چه رابطه‌ای دارد؟

۱۰. فنرهای A و B یکسان‌اند جز آنکه A سخت‌تر از B است؛ یعنی، $k_A > k_B$. اگر دو فنر را (الف) به یک اندازه و (ب) با یک نیرو بکشیم، روی کدام‌یک کار بیشتری انجام می‌شود؟

۱۱. آیا انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم مورد نظر بستگی دارد؟ آیا می‌تواند منفی باشد؟ آیا مقدار آن به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد؟

۱۲. کتابی را از زمین برمی‌دارید و روی میز می‌گذارید؛ در این حالت کار انجام می‌دهید، اما انرژی جنبشی کتاب تغییر نمی‌کند. آیا قضیهٔ کار-انرژی در این مورد نقض شده است؟ اگر جوابتان مثبت است چرا، و اگر نه باز هم چرا؟

۱۳. آیا در مورد جسمی که تحت اثر نیروی اصطکاک باشد هم قضیهٔ کار-انرژی درست است؟ توضیح بدهید.

۱۴. کار نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن. آیا ممکن است که کار یکی از مؤلفه‌های نیرو بزرگتر از تغییر انرژی جنبشی باشد؟ اگر چنین است، مثال بیاورید.

۱۵. چرا یک اتومبیل سواری در سربالایی به‌راحتی می‌تواند از یک کامیون پر از بار جلو بزند؟ البته کامیون سنگین‌تر هست اما موتورش هم به همان نسبت قویتر است. (آیا واقعاً چنین است؟) چه ملاحظاتی در طراحی توان موتورکامیون و موتور اتومبیل سواری دخالت دارد؟

۱۶. آیا توان لازم برای بالا بردن یک جعبه و گذاشتن آن روی سکو، به سرعت انجام این کار بستگی دارد؟

۱۷. چند تا از کتابهای کتابخانه را، طی زمان Δt، از یک قفسه به قفسهٔ بالاتر می‌برید. آیا کاری که انجام می‌دهید (الف) به جرم کتابها، (ب) به وزن کتابها، (ج) به ارتفاع قفسهٔ بالایی نسبت به زمین، (د) به زمان Δt و (ه) به این که کتابها را زیگزاگ بالا ببرید یا مستقیم، بستگی دارد؟

۱۸. رکورد جهانی پرش با نیزه در حدود ۵٫۵m است. آیا می‌شود با استفاده از نیزه‌ای بلندتر، این رکورد را، مثلاً به ۸m رساند؟ اگر نه چرا؟ یک قهرمان پرش اصولاً تا حدود چه ارتفاعی امکان دارد بالا بپرد؟

۱۹. امروزه از "بحران انرژی" زیاد صحبت می‌شود. به نظر شما صحبت از "بحران توان" درست‌تر نیست؟

۲۰. آیا کار حاصل از نیروی خالص وارد بر یک ذره به چارچوب مرجع (لخت) ناظر بستگی دارد؟ تغییر انرژی جنبشی چطور؟ اگر چنین است، چند مثال بزنید.

۲۱. مردی سوار بر قایق، برخلاف جهت جریان آب پارو می‌زندو نسبت به ساحل ساکن است. (الف) آیا این مرد کاری انجام می‌دهد؟ (ب) اگر پارو زدن را متوقف کند و همراه با جریان آب جلو برود، آیا کاری روی او انجام می‌شود؟

۲۲. قضیهٔ کار-انرژی را از دیدگاه چارچوب مرجع خلبان هواپیمای ۱ در مثال ۹ بررسی کنید. آیا قضیه در این حالت نقض می‌شود؟ توضیح بدهید.

۲۳. می‌گوییم که الکترون ۱keV ذره‌ای "کلاسیک" است، الکترون ۱MeV ذره‌ای "نسبیتی" است، و الکترون ۱GeV ذره‌ای "فوق‌نسبیتی" است. منظور از این اصطلاحات چیست؟ [۱]

مسئله‌ها

بخش ۷-۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

۱. کارگری برای هل دادن صندوقی به جرم ۵۲kg، نیرویی برابر با ۱۹۰N در جهت °۲۲ زیر سطح افقی بر آن وارد می‌کند. صندوق

---

۱. نگاه کنید به

The Physics Teacher, March 1981, p. 194.

به‌اندازهٔ ۳٫۳m جابه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمودی وارد بر صندوق از سطح زمین، هر یک چقدر کار روی صندوق انجام می‌دهند؟

۲. جسمی به جرم ۱۰۶kg با سرعت ۵۱٫۳m/s روی خطی راست حرکت می‌کند. (الف) این جسم را با شتاب کندکنندهٔ ۱٫۹۷m/s^2 متوقف می‌کنیم. چه نیرویی لازم است، جسم طی چه مسافتی متوقف می‌شود، و این نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) اگر شتاب کندکننده ۴٫۸۲m/s^2 باشد، جواب این پرسشها چه می‌شود؟

۳. کارگری صندوقی به جرم ۲۵kg را روی سطح شیبداری با زاویهٔ شیب ۲۷° به بالا هل می‌دهد؛ این کارگر نیرویی برابر با ۱۲۰N، موازی با سطح شیبدار، به صندوق وارد می‌کند. صندوق ۳٫۶m جابه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمود بر سطح شیبدار، هر یک چقدر کار انجام می‌دهند؟

۴. با استفاده از میدان الکتریکی می‌شود از فلزات الکترون خارج کرد. برای اینکه یک الکترون از تنگستن جدا کنیم، میدان الکتریکی باید ۴٫۵eV کار انجام بدهد. فرض کنید که میدان الکتریکی در طی مسافت ۳٫۴nm اثر می‌کند. حداقل نیرویی که میدان باید بر الکترون وارد کند تا الکترون از فلز کنده شود، چقدر است؟

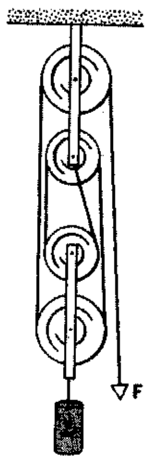
۵. با استفاده از یک طناب، جسمی به جرم M را با شتاب ثابت رو به پایین $g/۴$، به اندازهٔ مسافت d در امتداد قائم پایین می‌آوریم. (الف) طناب چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ (ب) نیروی گرانش چقدر کار انجام می‌دهد؟

۶. کارگری جسمی به وزن ۵۸٫۷lb ($m =$ ۲۶٫۶kg) را روی سطح افقی تا مسافت ۳۱٫۳ft (یعنی ۹٫۵۴m) منتقل می‌کند. جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند و نیروی کارگر در جهت ۳۲٫۰° زیر سطح افقی به جسم وارد می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۲۱ است. کارگر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

۷. الواری به جرم ۵۲٫۳kg را به‌اندازهٔ ۵٫۹۵m، با سرعت ثابت، روی سطح شیبداری با زاویهٔ ۲۸٫۰° به طرف بالا هل می‌دهیم. برای این کار، یک نیروی ثابت افقی به الوار وارد می‌کنیم. ضریب اصطکاک جنبشی بین الوار و سطح شیبدار ۰٫۱۹ است. (الف) کار نیروی اعمال شده و (ب) کار نیروی گرانشی را حساب کنید.

۸. قطعه یخی به جرم ۴۷٫۲kg روی سطح شیبداری به طول ۱٫۶۲m و ارتفاع ۰٫۹۰۲m به طرف پایین می‌لغزد. کارگری به این قطعه یخ در راستای موازی سطح شیبدار طوری به طرف بالا نیرو وارد می‌کند که یخ با سرعت ثابت پایین بیاید. ضریب اصطکاک جنبشی میان یخ و سطح شیبدار ۰٫۱۱۰ است. (الف) نیرویی را که کارگر وارد می‌کند و (ب) کاری را که کارگر روی قطعه یخ انجام می‌دهد، و (ج) کاری را که گرانش روی قطعهٔ یخ انجام می‌دهد پیدا کنید.

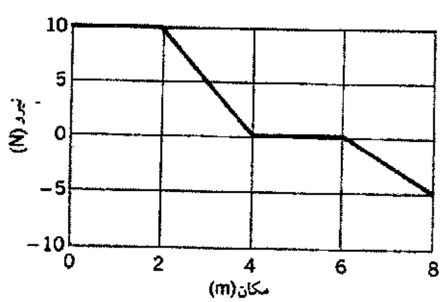
۹. شکل ۱۴ آرایه‌ای از قرقره‌ها را نشان می‌دهد که به کمک آن کشیدن بار سنگین L به طرف بالا آسانتر می‌شود. فرض کنید اصطکاک در همه‌جای سیستم ناچیز است، و وزن کل دو قرقره‌ای را که بار به آنها وصل است ۲۰٫۰lb بگیرید. می‌خواهیم باری به وزن ۸۴۰lb را ۱۲٫۰ft بالا ببریم. (الف) حداقل نیروی F لازم برای این کار چقدر است؟ (ب) چقدر کار باید در برابر گرانش انجام داد تا بار تا این ارتفاع بالا برود؟ (ج) نقطهٔ اثر نیروی اعمال شده را به چه مسافتی باید حرکت داد تا بار ۱۲٫۰ft بالا برود؟ (د) نیروی F چقدر کار باید انجام بدهد تا بار به اندازهٔ مورد نظر بالا برود؟



شکل ۱۴. مسئلهٔ ۹

بخش ۷ـ۲ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک‌بعدی

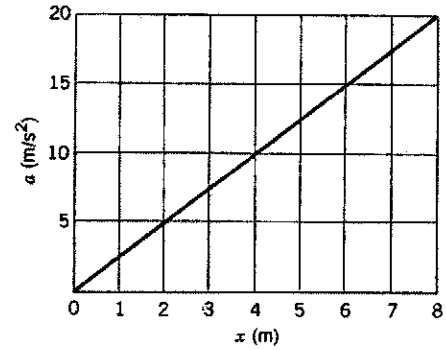
۱۰. جسمی به جرم ۵٫۰kg روی خط راستی بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. طی حرکت نیرویی وابسته به مکان بر آن وارد می‌شود، که به صورت شکل ۱۵ است. این نیرو، طی تغییر مکان ذره از مبدأ تا $x =$ ۸٫۰m چقدر کار انجام می‌دهد؟



شکل ۱۵. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جسمی به جرم ۱۰kg در راستای محور x حرکت می‌کند. تابع شتاب جسم برحسب مکان، به‌صورت شکل ۱۶ است. کارخالص انجام شده روی ذره، طی حرکت آن از $x =$ ۰ تا $x =$ ۸٫۰m چقدر

است؟

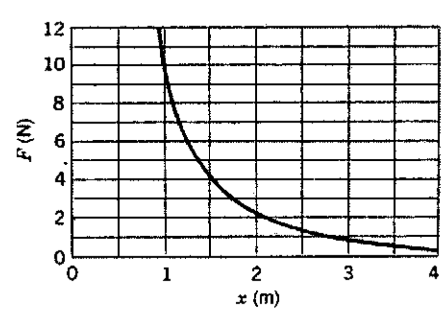


شکل ۱۶. مسئلهٔ ۱۱

۱۲. ثابت نیروی فنری $15{,}0\ \mathrm{N/cm}$ است. (الف) چقدر کار لازم است تا فنر، از حالت آزاد، به اندازهٔ $7{,}60\ \mathrm{mm}$ کشیده شود؟ (ب) چقدر کار لازم است تا فنر را، از این حالت، $7{,}60\ \mathrm{mm}$ دیگر بکشیم؟

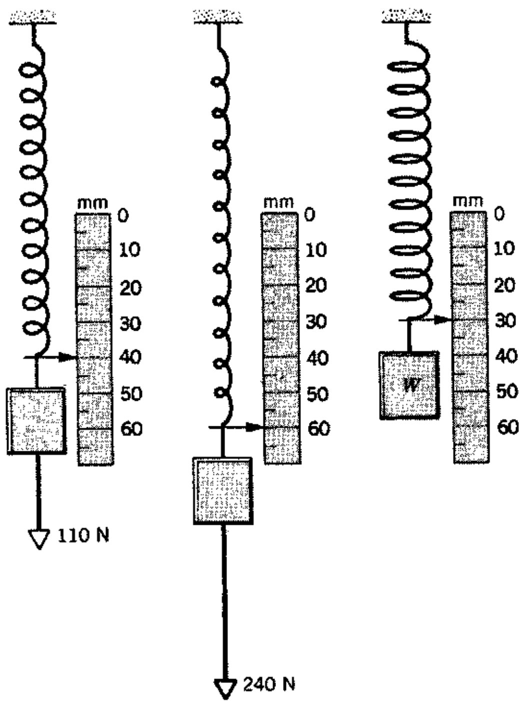
۱۳. نیروی وارد بر جسمی، $F = F_0(x/x_0 - 1)$ است. کار انجام شده طی حرکت جسم از $x = 0$ تا $x = 3x_0$ را (الف) با رسم منحنی $F(x)$ و حساب کردن مساحت زیرمنحنی و (ب) با محاسبهٔ تحلیلی انتگرال به‌دست بیاورید.

۱۴. (الف) کار انجام شده توسط نیروی شکل ۱۷ را، طی تغییر مکان ذره از $x = 1\mathrm{m}$ تا $x = 3\mathrm{m}$، تخمین بزنید. بازه‌ها را کوچکتر کنید و ببینید که تا چه حد می‌توانید به جواب دقیق $6\mathrm{J}$ نزدیک شوید. (ب) معادلهٔ تحلیلی این منحنی، $F = A/x^2$ است که در آن $A = 9\mathrm{Nm}^2$. کار را با انتگرال‌گیری به‌دست بیاورید.



شکل ۱۷. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. شکل ۱۸ فنری را نشان می‌دهد که یک شاخص به انتهای آن متصل است، مجاور فنر، خط‌کشی که برحسب میلی‌متر مدرج شده، آویزان است. مطابق شکل، سه وزنهٔ متفاوت را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) اگر هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، شاخص چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن W چقدر است؟



شکل ۱۸. مسئلهٔ ۱۵

بخش ۷ـ۳ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دو بعدی

۱۶. با انتگرال‌گیری در امتداد قوس، نشان بدهید که کار گرانش، در مثال ۴ برابر با $-mgh$ است.

۱۷. جسمی به جرم $0{,}675\mathrm{kg}$ روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و به ریسمانی متصل است که از سوراخی در میز می‌گذرد؛ جسم با سرعت ثابت روی دایره‌ای افقی به مرکز این سوراخ حرکت می‌کند. (الف) اگر شعاع دایره $0{,}500\mathrm{m}$ و سرعت جسم $10{,}0\mathrm{m/s}$ باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ب) مشاهده می‌شود که اگر $0{,}200\mathrm{m}$ دیگر از ریسمان را به درون سوراخ بکشیم، و در نتیجه شعاع دایره را به $0{,}300\mathrm{m}$ برسانیم، کشش ریسمان ۴٫۶۳ برابر می‌شود. کل کاری که ریسمان، طی این کاهش شعاع، روی جسمِ گردان انجام می‌دهد چقدر است؟

بخش ۷ـ۴ انرژی جنبشی و قضیهٔ کار-انرژی

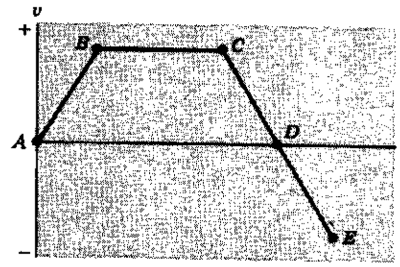
۱۸. انرژی جنبشی هر یک از این اجسام را در سرعتهای مشخص شده حساب کنید. (الف) یک بازیکن فوتبال به جرم $110\mathrm{kg}$ و با سرعت $8{,}1\mathrm{m/s}$؛ (ب) گلوله‌ای به جرم $4{,}2\mathrm{g}$ و با سرعت $950\mathrm{m/s}$؛ ناو هواپیمابر نیمیتس به جرم ۹۱۴۰۰ تن و با سرعت ۳۲٫۰ گره.

۱۹. یک الکترون رسانش در مس، در دمای نزدیک به صفر مطلق، $4{,}2\mathrm{eV}$ انرژی جنبشی دارد. سرعت آن چقدر است؟

۲۰. پروتونی در یک شتابدهندهٔ خطی شتاب می‌گیرد، در هر مرحلهٔ دستگاه، پروتون در جهت حرکتش شتاب $3{,}60 \times 10^{15}\mathrm{m/s}^2$

می‌گیرد. اگر پروتون با سرعت اولیهٔ $۲٫۴۰ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s}$ به یکی از این مراحل، که طول آن ۳٫۵۰cm است وارد شود (الف) سرعت پروتون در پایان این مرحله و (ب) مقدار انرژی جنبشی‌ای که در اثر این شتاب به انرژی قبلی‌اش افزوده می‌شود. چقدر است؟ جرم پروتون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg}$ است. انرژی را برحسب الکترون ولت بیان کنید.

۲۱. نیرویی بر ذره‌ای، که روی خط راست حرکت می‌کند، وارد می‌شود. نمودار سرعت‌ـزمان ذره در شکل ۱۹ نشان داده شده است. علامت (مثبت یا منفی) کاری را که نیرو، در هر یک از بازه‌های AB، BC، CD، و DE، روی ذره انجام می‌دهد پیدا کنید.



شکل ۱۹. مسئلهٔ ۲۱

۲۲. برای سفر به ماه، یک موشک ساترن V به جرم $۲٫۹ \times ۱۰^{۵}\mathrm{kg}$ که حامل یک فضاپیمای آپولو است، باید به سرعت گریز ۱۱٫۲km/s (یعنی ۲۵۰۰۰mi/h) در نزدیکی سطح زمین برسد. سوخت موشک باید حاوی چقدر انرژی باشد؟ آیا عملاً سیستم به همین مقدار انرژی نیاز دارد یا کمتر یا بیشتر؟ چرا؟

۲۳. اتومبیلی به وزن ۲۸۰۰lb را در نظر بگیرید. این اتومبیل از چه ارتفاعی باید سقوط کند تا انرژی جنبشی آن برابر با همین انرژی در زمانی باشد که با سرعت ۵۵mi/h حرکت می‌کند؟ آیا جواب به وزن اتومبیل بستگی دارد؟

۲۴. اتومبیلی به جرم ۱۱۰۰kg، با سرعت ۴۶km/h در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. راننده طوری ترمز می‌کند که اتومبیل ۵۱kJ انرژی جنبشی از دست می‌دهد. (الف) سرعت اتومبیل در این حالت چقدر است؟ (ب) ترمز باید چقدر دیگر از انرژی جنبشی اتومبیل را بگیرد تا اتومبیل کاملاً متوقف شود؟

۲۵. بازیکنی توپ بیسبال را با سرعت ۱۲۰ft/s (یعنی ۳۶٫۶m/s) پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن دیگری توپ را، در همان ارتفاع بگیرد، سرعت توپ به ۱۱۰ft/s (یعنی ۳۳٫۵m/s) کاهش یافته است. چقدر انرژی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ وزن توپ بیسبال ۹٫۰oz است ($m = ۲۵۵\mathrm{g}$).

۲۶. زمین سالی یک بار به دور خورشید می‌گردد. چقدر کار باید بر زمین انجام داد تا نسبت به خورشید ساکن شود؟ برای به‌دست آوردن داده‌های عددی به پیوست ج رجوع کنید، و چرخش زمین به دور محور خودش را در نظر نگیرید.

۲۷. پدر و پسری در حال دویدن‌اند. جرم پسر نصف جرم پدر اما انرژی جنبشی‌اش دو برابر انرژی جنبشی پدر است. پدر به اندازهٔ ۱٫۰۰m/s به سرعت خودش اضافه می‌کند و انرژی جنبشی‌اش با انرژی جنبشی پسر برابر می‌شود. سرعت پسر و سرعت اولیهٔ پدر چقدر بوده است؟

۲۸. پرتابه‌ای به جرم ۰٫۵۵۰kg با انرژی جنبشی اولیهٔ ۱۵۵۰J از لبهٔ صخره‌ای پرتاب می‌شود؟ نقطهٔ اوج پرتابه ۱۴۰m بالاتر از نقطهٔ پرتاب است. (الف) مؤلفهٔ افقی سرعت پرتابه چقدر است؟ (ب) مؤلفهٔ عمودی سرعت پرتابه، درست پس از پرتاب، چقدر بوده است؟ (ج) در لحظه‌ای در حین پرواز، مؤلفهٔ عمودی سرعت پرتابه ۶۵٫۰m/s می‌شود. در این لحظه، پرتابه چقدر بالاتر، یا پایین‌تر، از نقطهٔ پرتاب است؟

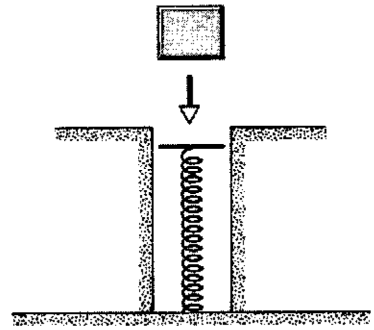
۲۹. دنباله‌داری به جرم $۸٫۳۸ \times ۱۰^{۱۱}\mathrm{kg}$، با سرعت نسبی ۳۰km/s، به زمین برخورد می‌کند. (الف) انرژی جنبشی دنباله‌دار را برحسب "مگاتن TNT " حساب کنید؛ انفجار ۱ میلیون تن TNT انرژی‌ای برابر با $۴٫۲ \times ۱۰^{۱۵}\mathrm{J}$ آزاد می‌کند. (ب) قطر حفره‌ای که در اثر یک انفجار بزرگ ایجاد می‌شود، با توان یک سوم انرژی‌آزاد شده متناسب است، و قطر حفرهٔ حاصل از انفجار ۱ مگاتن TNT برابر با ۱km است. قطر حفرهٔ حاصل از برخورد این دنباله‌دار چقدر است؟ (ممکن است که درگذشته، آثار جوی حاصل از برخورد دنباله‌دارها به زمین، موجب انقراض بسیاری ازگونه‌های جانوران و گیاهان شده باشد؛ گمان می‌رود که داینوسورها هم دراثر پیامدهای چنین برخوردی منقرض شده باشند.)

۳۰. یک "بشقاب" پلاستیکی چرخان [فریزبی] به جرم ۱۲۵g، با سرعت ۱۲٫۳m/s، از ارتفاع ۱٫۰۶m بالای سطح زمین پرتاب می‌شود. هنگامی که بشقاب به ارتفاع ۲٫۳۲m می‌رسد، سرعت آن ۹٫۵۷m/s می‌شود. (الف) گرانش چقدر کار روی بشقاب انجام داده است؟ (ب) چقدر انرژی جنبشی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ چرخش بشقاب را در نظر نگیرید.

۳۱. توپی موقع واجهیدن از یک پیاده‌روی بتونی، ۰٫۱۵٪ از انرژی جنبشی‌اش را از دست می‌دهد. این توپ را باید با چه سرعت اولیه‌ای در امتداد قائم از ارتفاع ۱۲٫۴m به طرف پایین پرتاب کرد تا، پس از واجهیدن، دوباره به همان ارتفاع برگردد؟ فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است.

۳۲. یک توپ لاستیکی که از ارتفاع ۶ft رها شده است چندین بار به زمین می‌خورد و از آن وامی‌جهد؛ در هر برخورد، ۱۰٪ انرژی توپ از دست می‌رود. چند برخورد باید انجام شود تا توپ دیگر نتواند به ارتفاع بالاتر از ۳ft برسد؟

۳۳. جسمی به جرم ۲۶۳g روی فنری قائم که ثابت آن $k = ۲٫۵۲\mathrm{N/cm}$ است می‌افتد (شکل ۲۰). جسم به فنر می‌چسبد و آن‌را ۱۱٫۸cm فشرده می‌کند تا خودش به حالت سکون لحظه‌ای برسد. در طی فشرده شدن فنر (الف) نیروی گرانش و (ب) فنر چقدر کار انجام می‌دهند؟ (ج) سرعت جسم، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر بوده است؟ (د) اگر سرعت اولیهٔ جسم دو برابر شود، بیشترین مقدار فشردگی فنر چقدر می‌شود؟



شکل ۲۰. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. با تعمیم اثبات حالت یک‌بعدی معادلهٔ ۱۹، نشان بدهید که این معادله در حالتهای دو و سه‌بعدی هم درست است.

بخش ۷ـ۵ توان

۳۵. زنی به جرم ۵۷kg از پلکانی به ارتفاع ۴٫۵m در مدت ۳٫۵s بالا می‌رود. توان متوسطی که باید مصرف کند چقدر است؟

۳۶. یک دستگاه بالابر، ۱۰۰ نفر اسکی‌باز به وزن متوسط ۶۶۷N را طی ۵۵٫۰s، با سرعت ثابت تا ارتفاع ۱۵۲m بالا می‌برد. توان خروجی موتور بالابر، به فرض اینکه هیچ اتلاف ناشی از اصطکاکی در کار نباشد، چقدر است؟

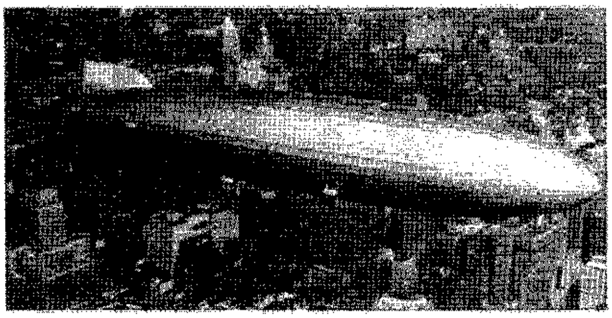
۳۷. شناگری با سرعت ۰٫۲۲m/s در آب شنا می‌کند. نیروی مقاومت آب، که با حرکت او مخالفت می‌کند، ۱۱۰N است. شناگر با چه توانی شنا می‌کند؟

۳۸. دونده‌ای به جرم ۶۸٫۲kg مسافت ۷٫۰۴m ابتدای مسابقه را در مدت ۱٫۶۰s می‌دود. دونده از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب او در این مدت ثابت است. سرعت او در پایان ۱٫۶۰s چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی‌اش چقدر است؟ (ج) توان متوسط او، طی این ۱٫۶۰s، چقدر است؟

۳۹. اسبی گاری‌ای را با نیروی ۴۲٫۰lb که با زاویهٔ ۲۷٫۰° بالای سطح افقی اعمال می‌شود می‌کشد و با سرعت ۶٫۲۰mi/h حرکت می‌کند. (الف) اسب در مدت ۱۲٫۰min چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان خروجی اسب را، برحسب hp حساب کنید.

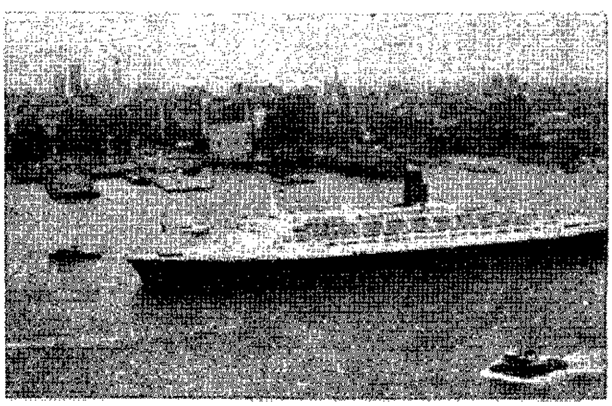
۴۰. یک شرکت سازندهٔ اتومبیل می‌گوید که حداکثر توانی که موتوراتومبیلی به جرم ۱۲۳۰kg می‌تواند تحویل بدهد، ۹۲٫۴kW است. حداقل زمان لازم برای اینکه این اتومبیل از حالت سکون به سرعت ۲۹٫۱m/s (یعنی ۶۵mi/h) برسد چقدر است؟ در یک آزمون، این زمان برابر با ۱۲٫۳s اندازه‌گیری شده است. علت اختلاف بین این دو زمان چه می‌تواند باشد؟

۴۱. کشتی هوایی هیدنبورگ، شکل ۲۱ بالونی بود محتوی گاز هیدروژن که می‌توانست با استفاده از ۴۸۰۰hp توان موتورهایش، با سرعت ۷۷ گره حرکت کند. نیروی مقاومت هوا (برحسب نیوتون) برای این بالون در این سرعت چقدر است؟



شکل ۲۱. مسئلهٔ ۴۱

۴۲. توان کشتی مجلل ”ملکه الیزابت دوم“ (شکل ۲۲) از یک نیروگاه الکتریکی دیزلی جدید تأمین می‌شود، که جایگزین ماشینهای بخار اولیهٔ آن شده است. بیشینهٔ توان خروجی ۹۲MW است که در این توان، کشتی با سرعت ۳۲٫۵ گره حرکت می‌کند. در این بیشترین سرعت کشتی، پروانه‌های کشتی چه نیرویی بر آب وارد می‌کنند؟



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۴۲

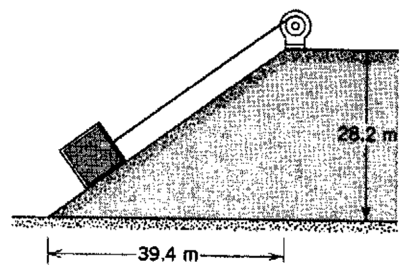
۴۳. اتومبیلی به جرم ۱۶۰۰kg، با سرعت ۲۶m/s (یعنی ۹۴km/h) در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. اگر کل نیروهای مقاوم ۷۲۰N باشد، توان خروجی موتور چند اسب بخار است؟

۴۴. در هر دقیقه، ۷۳۸۰۰m^3 آب از آبشاری به ارتفاع ۹۶٫۳m به پایین می‌ریزد. فرض کنید ۵۸٫۰٪ انرژی جنبشی‌ای که آب در طی سقوط کسب می‌کند، به کمک یک مولد هیدروالکتریکی، به انرژی الکتریکی تبدیل شود. توان خروجی مولد را حساب کنید. (چگالی آب ۱۰۰۰kg/m^3 است.)

۴۵. فرض کنید میزان مصرف بنزین اتومبیل شما ۳۰mi/gal است. (الف) با ۱kWh انرژی، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) اگر سرعت اتومبیل ۵۵mi/h باشد، آهنگ مصرف انرژی چقدر است؟ گرمای سوختن بنزین ۱۴۰MJ/gal است.

۴۶. توان موتور تلمبهٔ آبی ۶٫۶hp است. با این تلمبه از چه عمقی می‌توان آب را با آهنگ ۲۲۰gal/min بیرون کشید؟

۴۷. یک جرثقیل قطعهٔ بزرگی ازگرانیت به جرم ۱۳۸۰kg را با سرعت ثابت ۱٫۳۴m/s، از سطح شیبداری بالا می‌کشد (شکل ۲۳). ضریب اصطکاک جنبشی بین گرانیت و سطح شیبدار ۰٫۴۱ است. توان جرثقیل چقدر است؟



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. اتومبیلی به وزن ۳۷۰۰lb ($m = ۱۶۸۰\,kg$) از حالت سکون شروع به حرکت درجاده‌ای افقی می‌کند و، طی ۳۳s، به سرعت ۴۵mi/h (یعنی ۷۲km/h) می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی اتومبیل در پایان این ۳۳s چقدر است؟ (ب) توان خالص متوسطی که اتومبیل، طی این ۳۳s، دریافت کرده است چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه شتاب اتومبیل ثابت بوده باشد، توان لحظه‌ای آن در پایان این ۳۳s چقدر است؟

۴۹. جسمی به جرم m از حالت سکون به‌طور یکنواخت شتاب می‌گیرد و طی زمان t_f به سرعت v_f می‌رسد. (الف) نشان بدهید که کار انجام شده روی جسم، به‌صورت تابعی از زمان، برحسب v_f و t_f برابر است با

$$W = \frac{۱}{۲} m \frac{v_f^۲}{t_f^۲} t^۲$$

(ب) توان مصرفی جسم را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۵۰. نیرویی بر ذره‌ای به جرم ۲٫۸۰kg اثر می‌کند؛ مکان ذره، برحسب زمان، $x = ۳t - ۴t^۲ + t^۳$ است، که درآن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) کار این نیرو، طی ۴٫۰s اول چقدر است؟ (ب) این نیرو در لحظهٔ $t = ۳٫۰\,s$ با چه آهنگی روی ذره کار انجام می‌دهد؟

۵۱. جرم یک آسانسور باری، وقتی کاملاً بار شده باشد، ۱۲۲۰kg است. این آسانسور باید طی ۴۳٫۰s، به‌اندازهٔ ۵۴٫۵m به‌طرف پایین برود. جرم وزنهٔ مقابله ۱۳۸۰kg است. توان خروجی موتور آسانسور، برحسب hp، چقدر است؟ ازکار لازم برای راه انداختن و متوقف کردن آسانسور صرفنظر کنید، یعنی فرض کنید سرعت آسانسور ثابت است.

۵۲. اتومبیلی به جرم m، که توان موتور آن مقدار ثابت P است، می‌تواند پس از پیمودن مسافت x از حالت سکون، به سرعت v برسد. نشان بدهید که v از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v = \left(\frac{۳xP}{m}\right)^{۱/۳}$$

۵۳. (الف) نشان بدهید که توان خروجی هواپیمایی که با سرعت ثابت v به‌طورافقی پرواز می‌کند متناسب با $v^۳$ است. نیروی اصطکاک آئرودینامیکی را $D = bv^۲$ بگیرید. (ب) توان موتورها را به چه نسبتی زیاد کنیم تا سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۵٫۰٪ زیاد شود؟

۵۴. یک ماشین تیزکن، چرخی به شعاع ۲۰٫۷cm دارد و در هر ثانیه ۲٫۵۳ دور می‌زند. ابزاری را که باید تیز شود با نیروی ۱۸۰N بر لبهٔ چرخ می‌فشاریم. این ماشین چه توانی دارد؟ ضریب اصطکاک بین ابزار و چرخ ۰٫۳۲ است.

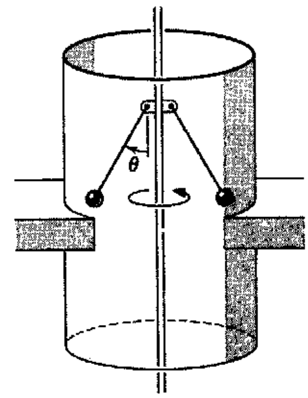
۵۵. یک پله برقی، دو طبقه راکه فاصله‌شان از هم ۸٫۲۰m است به هم مرتبط می‌کند. طول پله برقی ۱۳٫۳m و سرعت حرکت آن در راستای خودش ۶۲٫۰cm/s است. (الف) فرض کنید پله باید هر دقیقه ۱۰۰ نفر، به جرم متوسط ۷۵٫۰kg، را جابه‌جا کند. در این صورت، موتور آن چقدرتوان باید تحویل بدهد؟ (ب) مردی به جرم ۸۳٫۵kg از پله برقی متحرک بالا می‌رود و طی ۹٫۵۰s به طبقهٔ بالا می‌رسد. موتور پله برقی چقدر کار روی او انجام می‌دهد؟ (ج) اگر همین مرد، وسط راه برگردد و به طرف پایین حرکت کند، چنان‌که در ارتفاع ثابتی باقی بماند، آیا موتور روی اوکار انجام می‌دهد؟ اگر می‌دهد، چقدر توان برای این کار مصرف می‌شود؟ (د) آیا راهی (دیگر) به نظرتان می‌رسد که مرد بتواند روی پله برقی راه برود، بی‌آنکه توانی از موتور را مصرف کند؟

۵۶. یک لوکوموتیو ۱٫۵MW، هنگامی که با توان کامل کارمی‌کند، قطار را طی ۶٫۰min از سرعت ۱۰m/s به سرعت ۲۵m/s می‌رساند. (الف) با چشمپوشی از اصطکاک، جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) سرعت قطار را در این بازه به‌صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به‌دست بیاورید. (ج) نیروی شتابدهنده به قطار را به‌صورت تابعی از زمان، در این بازه، به‌دست بیاورید (د) مسافتی را که قطار در این مدت می‌پیماید حساب کنید.

۵۷. نیروی مقاوم در برابر حرکت اتومبیل ناشی از دو عامل است: اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از سرعت v است، و مقاومت آئرودینامیک، که متناسب با $v^۲$ است. برای اتومبیل خاصی به وزن ۱۲۰۰۰N، کل نیروی مقاوم F برابر است با $F = ۳۰۰ + ۱٫۸v^۲$، که در آن F برحسب نیوتون و v برحسب متر بر ثانیه است. موتور چه توانی باید داشته باشد تا بتواند، در سرعت ۸۰km/h، به اتومبیل ۰٫۹۲m/s² شتاب بدهد؟

۵۸. یک تنظیم‌کنندهٔ سرعت شامل دو گلوله، هر یک به جرم ۲۰۰g، است که با میله‌های صلب و سبک به طول ۱۰٫۰cm به محور قائم چرخانی متصل‌اند (شکل ۲۴). میله‌ها به محور لولا شده‌اند، چنان‌که با چرخش محور، گلوله‌ها هم با آن می‌چرخند و از محور فاصله می‌گیرند. اما اگر زاویهٔ θ به ۴۵٫۰° برسد، کره‌ها به دیوارهٔ استوانه‌ای که سیستم

درون آن می‌چرخد می‌رسند (الف) حداقل آهنگ دوران، برحسب دور بر دقیقه، برای اینکه گلوله‌ها به دیواره برسند چقدر است؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره‌ها و دیواره ۳۵ر۰ باشد، هنگامی که سیستم با سرعت $300 \mathrm{rev/min}$ می‌چرخد، چقدر توان در اثر مالش گلوله‌ها بر دیواره اتلاف می‌شود؟



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۵۸

بخش ۷ـ۶ چارچوبهای مرجع

۵۹. دو ناظر را در نظر بگیرید که چارچوب یکی به زمین متصل است و چارچوب دیگری، مثلاً به قطاری که با سرعت ثابت $\mathbf{u}$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. هر دو ناظر مشاهده می‌کنند که ذره‌ای، که در ابتدا نسبت به قطار ساکن است، با نیروی ثابتی که در مدت زمان t برآن وارد می‌شود، به طرف جلو شتاب می‌گیرد. (الف) نشان بدهید که از دید هر دو ناظر، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره، اما یکی از ناظرها این کمیت را $\frac{1}{2}ma^2t^2$ می‌سنجد و دیگری $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. در اینجا m جرم، و a شتاب ذره است، که از دید هر دو ناظر یکی است. (ب) اختلاف کار انجام شده توسط نیروی یکسان از دید دو ناظر را، برحسب اختلاف مسافتِ اثر این نیرو از دید این دو ناظر توضیح بدهید. اختلاف انرژی جنبشی پایانی ذره از دید دو ناظر را برحسب کاری که ذره می‌تواند انجام بدهد تا، نسبت به چارچوب هر ناظر، به حالت سکون برسد توضیح بدهید.

بخش ۷ـ۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد

۶۰. انرژی جنبشی پروتونی را حساب کنید که سرعت آن $2{,}94 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ است. جواب خود را هم برحسب ژول و هم برحسب MeV بیان کنید.

۶۱. الکترونی با چنان سرعتی حرکت می‌کند که با آن می‌شود کمربند استوای زمین را طی $1\,\mathrm{s}$ر۰ دور زد. (الف) سرعت این الکترون را، برحسب سرعت نور، بیان کنید. (ب) انرژی جنبشی آن‌را برحسب الکترون‌ولت حساب کنید. (ج) اگر از فرمول کلاسیک برای محاسبهٔ انرژی جنبشی استفاده کنیم، چند درصد خطا خواهیم داشت؟

۶۲. سرعت الکترونی c۹۹۹ر۰ است. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت آن ۰۵ر۰٪ زیاد شود، انرژی جنبشی آن چند درصد زیاد می‌شود؟

۶۳. قضیهٔ کارـانرژی در هر سرعتی درست است. چقدر کار باید انجام داد تا سرعت الکترونی از صفر به (الف) c۵۰ر۰، (ب) c۹۹ر۰، و (ج) c۹۹۹ر۰ برسد؟

۸

پایستگی انرژی

در فصل ۷ قضیهٔ کار-انرژی را بررسی کردیم؛ طبق این قضیه، کار نیروهای وارد برهر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره. دراین فصل خواهیم دید که کار ردهٔ خاصی از نیروها بر یک سیستم (که می‌تواند پیچیده‌تر از یک ذرهٔ ساده باشد) تنها به حالت اولیه و نهایی سیستم بستگی دارد، نه به مسیر میان حالت اولیه و نهایی. چنین نیروهایی، که **نیروهای پایستار** نامیده می‌شوند، این خاصیت را دارند که می‌توانند در پیکربندی سیستم انرژی ذخیره کنند. انرژی ذخیره شده را **انرژی پتانسیل** می‌نامند. نیروهای دیگر، یعنی **نیروهای ناپایستار**، نمی‌توانند به این طریق انرژی ذخیره کنند.

موضوع اصلی این فصل **پایستگی انرژی** است، که یکی از اصول مهم راهنما در فیزیک است. نشان می‌دهیم که در ذخیره‌سازی، تبدیل، یا انتقال انرژی سیستمهای مکانیکی، کل انرژی ثابت می‌ماند. مطالعه را از سیستمهای مکانیکی بی‌اصطکاک ساده، که در آنها فقط انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نقش دارند، شروع می‌کنیم. بعد سیستمهای شامل اصطکاک و دیگرنیروهای اتلافی را هم وارد می‌کنیم. با تعمیم بیشتر، می‌شود شکلهای دیگر انرژی مثل گرما و انرژی الکترومغناطیسی را هم وارد همین چارچوب کرد و به اصل پایستگی انرژی رسید، که یکی از فراگیرترین و کلی‌ترین قوانین فیزیک است.

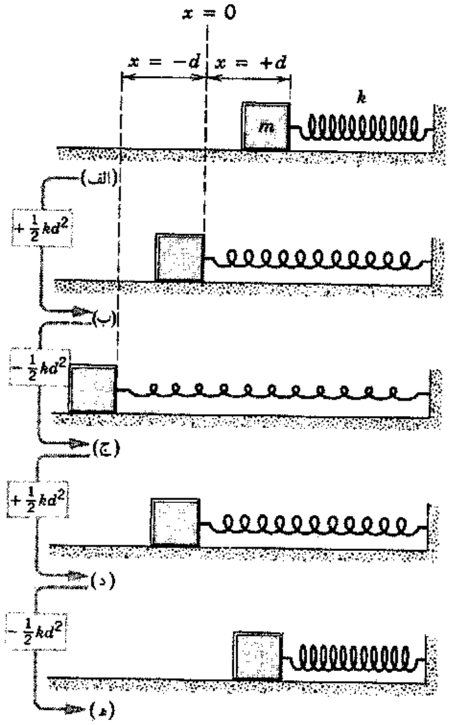
۸ـ۱ نیروهای پایستار

برای نشان دادن رفتار سیستمهای پایستار، حرکت جسمی را، تحت تأثیر سه نیروی مجزا، بررسی می‌کنیم: نیروی فنر، $F = -kx$؛ نیروی گرانشی، $F = mg$؛ و نیروی اصطکاک، $F = \mu N$.

۱. نیروی فنر. شکل ۱ جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که به فنری با ثابت نیروی k متصل است؛ جسم، بدون اصطکاک، روی سطحی افقی می‌لغزد. در ابتدا، شکل ۱الف، عاملی خارجی فنر را فشرده است، چنان‌که جسم از نقطهٔ $x = 0$ در حالت فنر آزاد، به نقطهٔ $x = +d$ جابه‌جا شده است. عامل خارجی در $t = 0$ یکباره برداشته می‌شود و از آن پس فنر بر جسم کار انجام می‌دهد. با حرکت جسم از $x = +d$ به $x = 0$، فنر، طبق معادلهٔ ۹ فصل ۷، به اندازهٔ $+\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد. طبق قضیهٔ کار-انرژی، این کار به شکل انرژی جنبشی جسم ظاهر می‌شود.

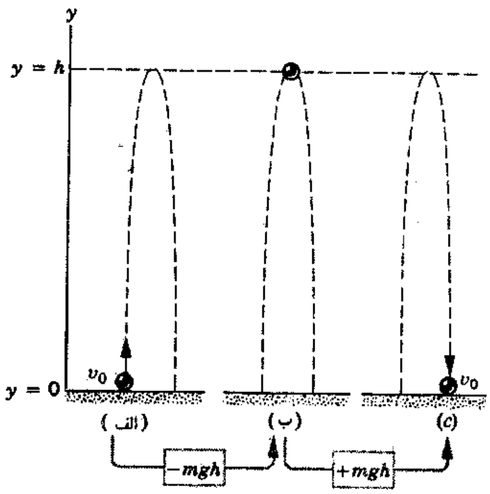
با گذشتن جسم از نقطهٔ $x = 0$، شکل ۱ب، علامت نیروی فنر عوض می‌شود؛ از این پس فنر سرعت جسم را کم می‌کند، و بر آن کار منفی انجام می‌دهد. هنگامی که جسم به سکون لحظه‌ای می‌رسد، شکل ۱ج، مقدار کار منفی‌ای که نیروی فنر بین $x = 0$ و $x = -d$ انجام داده برابر با $-\frac{1}{2}kd^2$ است. به همین ترتیب، از $x = -d$ تا $x = 0$ نیروی فنر $+\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد، و از $x = 0$ تا $x = +d$ به اندازهٔ $-\frac{1}{2}kd^2$. در این لحظه جسم در وضعیت اولیه است (شکلهای ۱الف و ۱هـ را با هم مقایسه کنید)، و اگرکارهای انجام شده در چهار بخش جداگانه را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که کل کاری که فنر، در یک چرخهٔ کامل روی جسم انجام می‌دهد صفر است.

۲. نیروی گرانش. شکل ۲ سیستمی متشکل از یک توپ را نشان می‌دهد که تحت اثر گرانش زمین قرار دارد. جسم توسط عاملی خارجی به بالا پرتاب می‌شود. این عامل به آن سرعت v_0 و در نتیجه انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌دهد. با بالا رفتن توپ، زمین روی آن کار انجام می‌دهد و سرانجام توپ را، در $y = h$، به حالت سکون لحظه‌ای در می‌آورد. کار زمین بر این توپ، هنگام صعود از $y = 0$ تا $y = h$ برابر با $-mgh$ است (نیروی ثابت mg ضربدر مسافت h علامت منفی به خاطر آن است که هنگام صعود توپ، نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت یکدیگرند). قضیهٔ کار-انرژی، تغییر انرژی جنبشی، $-\frac{1}{2}mv_0^2$، را به کارِ خالص تنها نیروی موجود (گرانش)، $-mgh$، مربوط می‌کند. با سقوط توپ از $y = h$ به $y = 0$، نیروی گرانش به اندازهٔ $+mgh$ کار انجام می‌دهد؛ بنابراین، مشابه با بخش بالارونده مسیر، انرژی باید



شکل۱. جسمی در اثر نیروی فنر به طرف چپ حرکت می‌کند و از (الف) $x = +d$ به (ب) $x = 0$، و سپس (ج) $x = -d$ می‌رود. بعد به طرف راست حرکت می‌کند و به (د) $x = 0$، و سپس (ه) $x = +d$ می‌رود. کار نیروی فنر بین هر دو موقعیت متوالی، در طرف چپ نشان داده شده است. توجه کنید که کل کار نیروی فنر، در یک رفت و برگشت صفر است.

از ۰ افزایش پیدا کند و به $\frac{1}{2}mv_0^2$ برسد. کل کار نیروی گرانش، در این رفت و برگشت، صفر است.



شکل۲. توپی در خلاف جهت گرانش زمین، به بالا پرتاب می‌شود. در (الف) توپ در لحظهٔ پرتاب است؛ در (ب) به نقطهٔ اوج مسیرش رسیده است؛ و در (ج) به ارتفاع اولیه بازگشته است. کار نیروی گرانشی زمین، بین هر دو موقعیت متوالی، در پایین شکل مشخص شده است. توجه کنید که کل کار نیروی گرانش روی توپ، در یک رفت و برگشت صفر است.

۳. نیروی اصطکاک. به عنوان سومین مثال، قرصی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر ریسمانی به طول R متصل است. به قرص سرعت اولیهٔ v_0 داده می‌شود، و ریسمان قرص را مقید می‌کند که بر دایره‌ای به شعاع R روی سطحی افقی حرکت کند (شکل ۳). این سطح بر قرص نیروی اصطکاک وارد می‌کند. تنها نیرویی که روی قرص کار انجام می‌دهد همین نیروی اصطکاک است، که از سطح وارد می‌شود. این نیرو همواره در خلاف جهت سرعت قرص است؛ بنابراین، کار نیروی اصطکاک روی قرص همواره منفی است. هنگامی که قرص به نقطهٔ شروع حرکتش برمی‌گردد، کار نیروی اصطکاک در این مسیر بسته مطمئناً غیرصفر است؛ کل کار در این مسیر بسته، یک مقدار منفی است. در پایان مسیر بسته، قرص با انرژی جنبشی کمتری به نقطهٔ شروع برمی‌گردد.

به تفاوت میان این سه مثال توجه کنید. در دو مثال اول (نیروی فنر و نیروی گرانش) هنگامی که جسم، پس از یک رفت و برگشت به نقطهٔ شروع بازمی‌گردد، کل کار انجام شده بر آن صفر است (و بنابراین انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند). در مثال سوم، کل کار نیروی اصطکاک در مسیر بسته مخالف صفر است، و انرژی جنبشی کم می‌شود. این تفاوت اساسی در رفتار این دو نوع نیرو، اولین راه برای تشخیص نیروهای پایستار را به ما نشان می‌دهد:

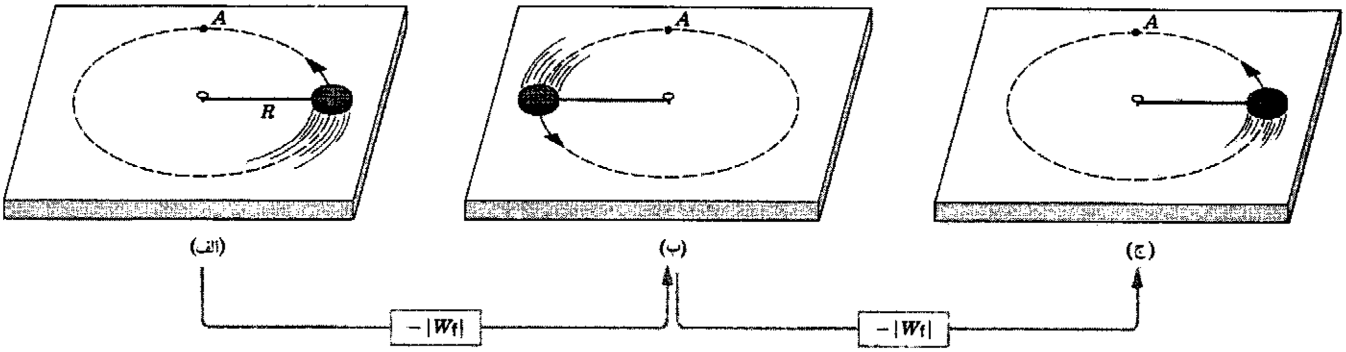
> اگر نیرویی که جسمی را حرکت می‌دهد در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) هیچ کار خالصی روی جسم انجام ندهد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این‌صورت ناپایستار است.

نیروی بازگردانندهٔ کشسان (نیروی فنر) و نیروی گرانش، دو نمونه از نیروهای پایستارند، و اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار است.[۱]

راه دیگر تشخیص نیروهای پایستار از نیروهای ناپایستار، بررسی کاری است که نیرو در مسیرهای مختلف، با نقاط شروع و پایان یکسان، روی ذره انجام می‌دهد. مثلاً، کار نیروی فنر بر جسم شکل ۱ را، هنگامی که جسم از $x = +d$ به $x = -d/۲$ می‌رود، در راستای دو مسیر (شکل ۴)، به‌دست می‌آوریم: مسیر ۱ به‌طور مستقیم، مسیر ۲ از $x = +d$ تا $x = -d$، و سپس از $x = -d$ تا $x = -d/۲$. کار فنر در راستای مسیرهای ۱ و ۲ را، به‌ترتیب، $W_۱$ و $W_۲$ می‌نامیم.

---

۱. هنگامی که جسمی تحت اثر نیروی اصطکاک حرکت می‌کند، دائماً جوشهای میکروسکوپیک تشکیل و شکسته می‌شوند (بخش ۶-۲). وقتی جسم مسیری را که آمده است برمی‌گردد، تغییرات سطح معکوس نمی‌شود؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپیک مسلماً ناپایستار است. اما نیروهای بین اتمی سطح، که عامل اصطکاک‌اند، نیروهای الکترواستاتیک‌اند، که پایستار هستند (فصل ۳۰). اگر هنگام بازگشت، همهٔ اتمهای جابه‌جا شده را به جای اولشان برمی‌گرداندیم، درمی‌یافتیم که نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپیک هم پایستار است. چنین فرایندی فوق‌العاده نامحتمل است (در واقع، در برگشت، جوشهای جدیدی تشکیل می‌شود و تعداد دیگری از اتمها هم جابه‌جا می‌شوند)؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از لحاظ ماکروسکوپیک ناپایستار است.



شکل۳. قرصی روی دایره‌ای درسطح افقی حرکت می‌کند، و سطح اصطکاک دارد. موقعیتهای نشان داده شده در شکل: (الف) یک نقطهٔ شروع دلبخواه، (ب) نیم دور بعد، و (ج) نیم دورِ دیگر. کار نیروی اصطکاک بین هر دو موقعیت متوالی در پایین شکل مشخص است. توجه کنید که کل کار نیروی اصطکاک روی قرص در یک دورِکامل صفر نیست، بلکه برابر با مقدار منفی $-2|W_f|$ است.

داریم

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{+d}^{-d/2}$$
$$= -\frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - d^2] = \frac{3}{8}kd^2$$

و

$$W_2 = \int_{+d}^{-d} (-kx)dx + \int_{-d}^{-d/2} (-kx)dx$$
$$= -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{+d}^{-d} - \frac{1}{2}kx^2\Big|_{-d}^{-d/2}$$
$$= 0 - \frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - (-d)^2] = \frac{3}{8}kd^2$$

بنابراین، $W_1 = W_2$، و کار انجام شده در دو مسیر یکسان است.

اما حالا رفتار نیروی اصطکاک ناپایستار سیستم شکل ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیستم از نقطهٔ A شروع به حرکت کند، یک‌بار یک‌چهارم دور بزند، و یک‌بار ۵/۴ دور (و هر دو بار دقیقاً به یک نقطه برسد). اندازهٔ کار (منفی) نیروی اصطکاک، در مسیر دوم پنج برابر مسیر اول است. بنابراین، در مورد نیروی اصطکاک، کار به مسیر بین نقطهٔ شروع و نقطهٔ پایان بستگی دارد.

به‌این ترتیب، به دومین روش تشخیص نیروهای پایستار می‌رسیم:

اگر کار نیرویی بر جسمی، از نقطهٔ شروع حرکت تا نقطهٔ پایان، مستقل از مسیر طی شده بین دو نقطه باشد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این‌صورت، نیرو ناپایستار است.

به کمک شکل ۵ می‌شود نشان داد که دو شرط پایستار بودن نیرو با یکدیگر هم‌ارزند. در شکل ۵الف، ذره یک مسیر بسته را می‌پیماید؛ از a به b می‌رود و برمی‌گردد. اگر فقط نیروی پایستار $\mathbf{F}$ بر ذره اثر کند، کل کار انجام شده بر ذره طی این چرخه باید صفر باشد. یعنی

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

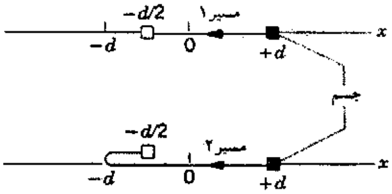
یا

$$\int_{a \atop \text{مسیر ۱}}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{b \atop \text{مسیر ۲}}^{a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (1)$$

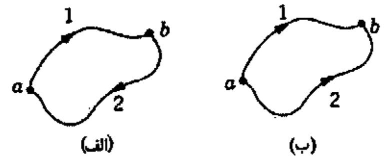
که در آن، $W_{ab,1}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از a به b در امتداد مسیر ۱" و $W_{ab,2}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از b به a در امتداد مسیر ۲" است. معادلهٔ ۱ بیان راضی اولین شرط پایستاری نیروست.

با تغییر جهت حرکت ذره در هر مسیر، جای حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری (برای تعیین کار) عوض می‌شود، و جابه‌جایی تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین، کار انجام شده بر ذره از a تا b، با کاری که از b تا a انجام می‌شود رابطه‌ای دارد به‌صورت

$$\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_b^a \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(برای هر مسیری)}$$



شکل۴. جسمی که درسیستم شکل ۱ داشتیم (و اینجا با مربع مشخص شده است). از طریق دو مسیر متفاوت، از $x = +d$ به $x = -d/2$ می‌رود.



شکل۵. (الف) ذره‌ای، تحت اثر یک نیروی پایستار، مسیر بسته‌ای را می‌پیماید؛ از نقطهٔ a شروع می‌کند، به نقطهٔ b می‌رود، و دوباره به نقطهٔ a برمی‌گردد. (ب) ذره از طریق دو مسیر مختلف، از نقطهٔ a به نقطهٔ b می‌رود.

یا، در مورد مسیر ۲، به‌صورت

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ معادلات ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

یا

$$\int_{a\ (\text{مسیر } ۱)}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a\ (\text{مسیر } ۲)}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۳)$$

و این بیان ریاضی دومین تعریف نیروی پایستار است: کار نیرو برای همهٔ مسیرهای بین a و b یکسان است. بنابراین، تعریف اول مستقیماً به تعریف دوم منجر می‌شود و (با استدلالی مشابه) تعریف دوم هم به تعریف اول می‌انجامد؛ یعنی این دو تعریف با یکدیگر هم‌ارزند.

۸ـ۲ انرژی پتانسیل

با معرفی یک مفهوم جدید، انرژی پتانسیل، درک تازه‌ای از تحلیل سیستمهای شامل نیروهای پایستار حاصل می‌شود. چنان‌که خواهیم دید، انرژی پتانسیل را تنها برای نیروهای پایستار، مثلاً نیروی فنر یا نیروی گرانش، می‌توان تعریف کرد؛ انرژی پتانسیل برای نیروهای ناپایستار، مثل نیروی اصطکاک، وجود ندارد.

انرژی پتانسیل که آن‌را با U نشان می‌دهیم، انرژی پیکربندی سیستم است. این انرژی، انرژی ذخیره شده در سیستم به‌خاطر وضعیت یا جهت‌گیری خاص اجزای سیستم است (مثلاً، انرژی ناشی از فشردن سیستم جسم‌ـفنر یا جداکردن اجزای سیستم توپ‌ـزمین از هم).

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن فقط یک نیرو وجود دارد، و فرض کنید آن نیرو پایستار باشد. هنگامی که پیکربندی سیستم عوض می‌شود، مثلاً با حرکت اجزای آن، نیروی پایستار کار W انجام می‌دهد. تغییر انرژی پتانسیل، ΔU، متناظر با این تغییر پیکربندی را

$$\Delta U = -W \qquad (۴)$$

تعریف می‌کنیم: تغییر انرژی پتانسیل در این فرایند برابر است با منفی کاری که نیروی پایستار انجام می‌دهد.

هنگامی که پیکربندی سیستم جسم‌ـفنر در شکل ۱، از شکل ۱ د (که در آن فنر در حالت آزاد است) به شکل ۱ هـ (که در آن جسم در حالت سکون لحظه‌ای است) تبدیل می‌شود، نیروی فنر به اندازهٔ $W = -\frac{1}{2}kd^2$ روی جسم کار انجام می‌دهد. بنابراین، تغییر انرژی پتانسیل سیستم $\Delta U = -W = +\frac{1}{2}kd^2$ است. اما از قضیهٔ کارـانرژی می‌دانیم که تغییر انرژی جنبشی جسم $\Delta K = W = -\frac{1}{2}kd^2$ است. پس برای سیستم جسم‌ـفنر نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K = 0 \qquad (۵)$$

معادلهٔ ۵ را برای سیستم جسم‌ـفنر به‌دست آوردیم؛ اما این معادله، در واقع، نتیجه‌ای کلی است که مستقیماً از معادلهٔ ۴ و قضیهٔ کارـانرژی، $W = \Delta K$، به‌دست می‌آید. این نتیجه می‌گوید که در سیستمی که همهٔ نیروهای آن پایستار باشند، هر تغییری در انرژی پتانسیل باید با تغییر مخالفی در انرژی جنبشی خنثی شود.

مثلاً، فرض کنید جسم را از $x = +d$، که فنر فشرده شده است، رها می‌کنیم (شکل ۱الف) فنر جسم را می‌راند و به آن شتاب می‌دهد. جابه‌جایی از حالت تعادل کم می‌شود. فنر روی جسم کار مثبت انجام می‌دهد و بنابراین، طبق معادلهٔ ۴، تغییر انرژی پتانسیل منفی می‌شود. با کاهش انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی زیاد می‌شود.

معادلهٔ ۵ را این‌طور هم می‌توان نوشت

$$\Delta(U + K) = 0 \qquad (۶)$$

تغییر $U + K$، در مجموع، طی این فرایندها صفر است. اگرتغییر حاصل‌جمع $U + K$ صفر باشد، مقدار این حاصل‌جمع باید طی حرکت ثابت بماند. این ثابت را انرژی مکانیکی سیستم پایستار می‌نامیم و آن‌را با E نشان می‌دهیم

$$U + K = E \qquad (۷)$$

معادلهٔ ۷ نمایش ریاضی قانون پایستگی انرژی مکانیکی است. در هر سیستم بسته‌ای که اجزای آن تنها از طریق نیروهای پایستار برهم‌کنش داشته باشند (مثل سیستم جسم‌ـفنر) انرژی می‌تواند از شکل جنبشی به پتانسیل و برعکس تبدیل شود، اما تغییر کل انرژی صفر است: حاصل‌جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثابت می‌ماند. شکل ۶ نمایشی از تقسیم انرژی بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را برای سیستم جسم و فنر، طی نوسان آزاد آن، نشان می‌دهد.

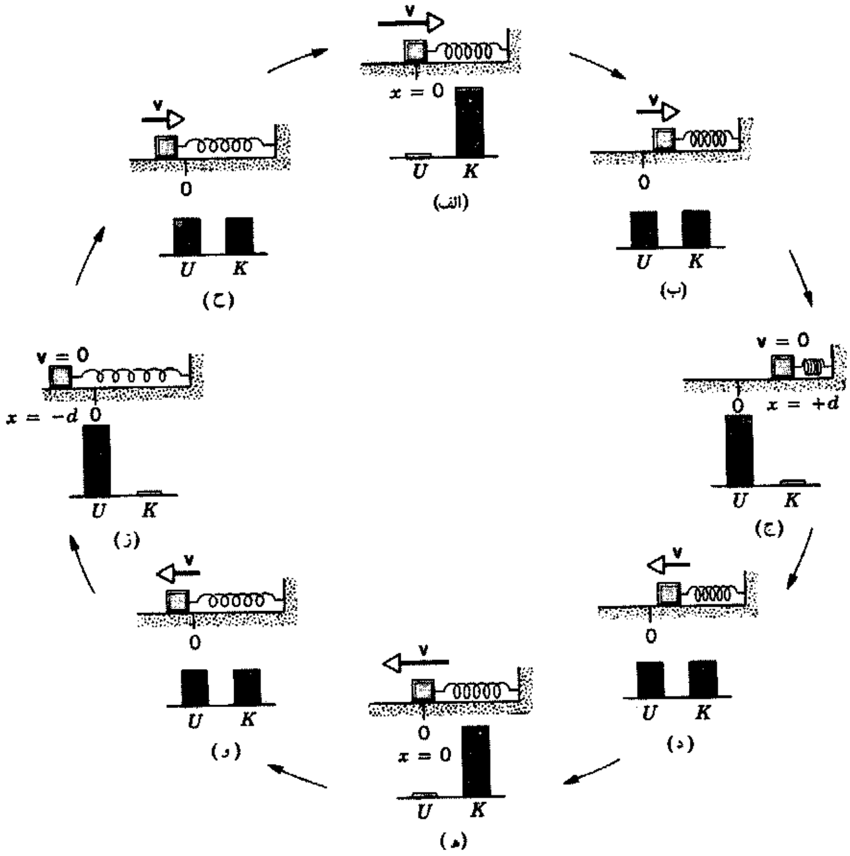
فرض کنید که بیش از یک نیروی پایستار برجسمی اثر کند. مثلاً در شکل ۷، جسم تحت تأثیر دو نیرو، $\mathbf{F}_{\text{نیرو}}$ و $\mathbf{F}_{\text{گرانش}}$، قرار دارد، که هر یک از آنها روی جسم کار انجام می‌دهد. قضیهٔ کارـانرژی، که در استنتاج معادلهٔ ۵ به‌کار رفت، همیشه مربوط به کل کاری است که همهٔ نیروهای وارد بر جسم، در این مورد $W_{\text{گرانش}} + W_{\text{فنر}}$، انجام می‌دهند. با استفاده از معادلهٔ ۴ ($\Delta U = -W$)، به‌کار هر نیرو می‌توانیم یک انرژی پتانسیل وابسته کنیم. بنابراین، معادلهٔ ۵ به این شکل در می‌آید

$$\Delta U_{\text{فنر}} + \Delta U_{\text{گرانش}} + \Delta K = 0$$

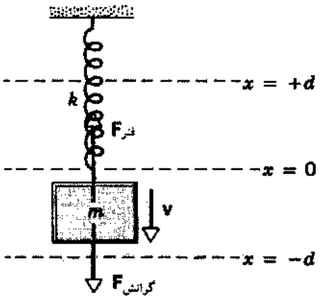
و معادلهٔ ۷ به این شکل

$$U_{\text{فنر}} + U_{\text{گرانش}} + K = E \qquad (۸)$$

انرژی پتانسیل، خاصیتی مربوط به کل سیستم است نه مربوط به بخش خاصی از سیستم. مثلاً، این توپ شکل ۲ نیست که انرژی پتانسیل دارد، بلکه سیستم متشکل از زمین+توپ است که چنین



شکل۶. جسمی که به فنری متصل است، روی سطح افقی بدون اصطکاکی نوسان می‌کند. انرژی مکانیکی E سیستم ثابت می‌ماند. اما، طی حرکت سیستم، نحوهٔ تقسیم آن بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل تغییر می‌کند. در زمانهای معینی (الف، ه) تمام انرژی به شکل جنبشی است؛ در زمانهای دیگری (ج، ز) تمام انرژی به شکل پتانسیل است؛ و در زمانهایی دیگر (ب، د، و، ح) انرژی به تساوی میان این دو تقسیم شده است.



شکل۷. جسمی به جرم m، که از فنری آویزان است، در راستای قائم بین $x=+d$ و $x=-d$ نوسان می‌کند. جسم تحت تأثیر دو نیروی پایستار حرکت می‌کند، نیروی فنر $\mathbf{F}_{فنر}$ و نیروی گرانش زمین $\mathbf{F}_{گرانش}$.

خاصیتی دارد. هنگامی که توپ تا ارتفاع h بالا می‌رود، انرژی پتانسیل سیستم به‌اندازهٔ mgh زیاد می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه کم می‌شود. هنگامی که توپ سقوط آزاد می‌کند و به اندازهٔ همین h پایین می‌آید، انرژی پتانسیل سیستم به اندازهٔ mgh کم می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه زیاد می‌شود.

چون جرم توپ خیلی کمتر از زمین است. تقریباً همهٔ افزایش انرژی جنبشی سیستم توپ+زمین به توپ می‌رسد. به همین علت است که گاهی می‌گوییم انرژی پتانسیل توپ، درحالی‌که "انرژی پتانسیل سیستم توپ+زمین" دقیقتر است. در سیستمهای دیگری که جرم دو ذره تقریباً با هم برابر باشد، هر دو ذره می‌توانند، در اثر تغییر انرژی پتانسیل، مقدار قابل‌ملاحظه‌ای انرژی جنبشی به‌دست بیاورند. روش محاسبهٔ چگونگی تقسیم انرژی جنبشی بین دو جسم را در فصل ۹ بررسی خواهیم کرد.

۸ـ۳ سیستمهای پایستار یک‌بعدی

با استفاده از معادلهٔ ۴، می‌توانیم تغییر انرژی پتانسیل ذره‌ای را که حرکت آن یک‌بعدی است و فقط یک نیروی پایستار $F(x)$ بر آن وارد می‌شود به‌دست بیاوریم

$$\Delta U = -W = -\int_{x_\circ}^{x} F(x)dx \qquad (۹)$$

ذره از مختصهٔ اولیهٔ $x_\circ$ به مختصهٔ نهایی x می‌رود. چون انرژی پتانسیل فقط به مکان بستگی دارد، تغییر انرژی پتانسیل بین $x_\circ$ و x برابر با $\Delta U = U(x) - U(x_\circ)$ است. نتیجه می‌شود که

$$U(x) - U(x_\circ) = -\int_{x_\circ}^{x} F(x)dx \qquad (۱۰)$$

اگر $x_\circ$ را یک نقطهٔ مرجع دلبخواه بگیریم، می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. انرژی پتانسیل نقطهٔ مرجع را هر مقداری می‌شود گرفت، چون فقط تغییرات انرژی پتانسیل است که معنی دارد. با انتخاب مقدار $U(x_\circ)$ تابع $U(x)$ به‌دست می‌آید که می‌توانیم با استفاده

از آن، مقدار انرژی پتانسیل را در هر نقطه، مثلاً x_1 یا x_2، حساب کنیم. با تغییر $U(x_0)$، مقادیر $U(x_1)$ و $U(x_2)$ هم به یک اندازه تغییر می‌کنند، اما اختلاف انرژی پتانسیل، $U(x_2) - U(x_1)$، تغییر نمی‌کند. بنابراین، تحلیل رفتار دینامیکی سیستم مستقل از مقداری است که برای $U(x_0)$ انتخاب می‌کنیم.

انتخاب نقطهٔ مرجع برای $U(x)$، از یک نظر شبیه به انتخاب چارچوب مرجع برای انرژی جنبشی است. چنان‌که در بخش ۷ـ۶ دیدیم، ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند ممکن است مقادیر متفاوتی برای انرژی جنبشی یک جسم به‌دست بیاورند. مقادیری هم که ناظرهای مختلف برای U و K، و انرژی مکانیکی E اندازه می‌گیرند ممکن است متفاوت باشند، اما از دیدگاه همهٔ آنها E ثابت، یعنی انرژی مکانیکی پایسته است.

سرعت ذره، طی حرکت آن از x_0 به x، از v_0 به v تغییر می‌کند و طبق قضیهٔ کارـانرژی، کار نیروی F برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (11)$$

از ترکیب معادلات ۹، ۱۰، و ۱۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \\ &= E\end{aligned} \qquad (12)$$

کمیت طرف راست معادلهٔ ۱۲ تنها به مکان اولیهٔ x_0 و سرعت اولیهٔ v_0 بستگی دارد، که مقادیری معین‌اند؛ پس این مقدار طی حرکت ثابت است. این ثابت، همان انرژی مکانیکی E است. توجه کنید که در این معادله نیرو و شتاب ظاهر نمی‌شوند، و معادله فقط شامل مکان و سرعت است. معادلهٔ ۱۲ شکل دیگری از قانون پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار است.

در حل مسائلی که در آنها تنها با نیروهای پایستار سروکار داریم می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۱۲ به‌جای قوانین نیوتون، کار را ساده‌تر کنیم. البته این معادله هم از قوانین نیوتون به‌دست آمده است، اما یک قدم به جواب نزدیکتر است (به اصطلاح، یک انتگرالِ اول حرکت است). در خیلی از موارد در حل مسائل، بی‌آنکه نیروها را تحلیل کنیم یا قوانین نیوتون را بنویسیم، به دنبال کمیتی می‌گردیم که طی حرکت ثابت بماند؛ در این مورد، آنچه ثابت می‌ماند انرژی مکانیکی است و می‌توانیم از معادلهٔ ۱۲ استفاده کنیم.

در مورد حرکت یک‌بعدی، رابطهٔ بین نیرو و انرژی پتانسیل، معادلهٔ ۹، را می‌شود چنین نوشت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (13)$$

برای نشان دادن صحت این رابطه، کافی است $F(x)$ را به همین شکل بالا در معادلهٔ ۹ بگذارید تا ببینید که به یک اتحاد می‌رسید. رابطهٔ ۱۳ دیدگاه دیگری برای توصیف انرژی پتانسیل به‌دست می‌دهد: انرژی پتانسیل تابعی است از مکان که نیرو منفی مشتق آن است. در اینجا نیروی F توسط سیستمی اعمال می‌شود که انرژی پتانسیل آن U است.

حالا طرز محاسبهٔ انرژی پتانسیل را با دو مثال از نیروهای پایستار که در بخش ۸ـ۱ بررسی کردیم، یعنی سیستم جسم‌ـفنر و سیستم توپ‌ـزمین، نشان می‌دهیم.

نیروی فنر

نقطهٔ مرجع x_0 جسم در سیستم جسم‌ـفنر شکل ۱ را جایی می‌گیریم که در آن فنر به حالت آزاد است ($x_0 = 0$)؛ انرژی پتانسیل سیستم را هم در این وضعیت برابر با صفر انتخاب می‌کنیم $[U(x_0) = 0]$. انرژی پتانسیل سیستم جسم‌ـفنر را می‌توانیم با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ ۱۰، و محاسبهٔ انتگرال به‌ازای نیروی فنر، $F(x) = -kx$، به‌دست بیاوریم

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx)dx$$

یا

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (14)$$

اگر جسم به اندازهٔ x از مکان مرجع جابه‌جا شده باشد، انرژی پتانسیل سیستم $\frac{1}{2}kx^2$ می‌شود. x چه مثبت باشد چه منفی، یعنی فنر چه به اندازهٔ x کشیده شود و چه به همین اندازه فشرده، انرژی ذخیره شده یکسان است.

اگر از معادلهٔ ۱۴ مشتق بگیریم، می‌بینیم که معادلهٔ ۱۳ صادق است

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx = F$$

فرض کنید سیستم جسم‌ـفنر را تا فاصلهٔ x_m از نقطهٔ مرجع می‌کشیم؛ در این حالت، انرژی پتانسیل $\frac{1}{2}kx_m^2$ است. اگر فنر را از این وضعیت، و از حالت سکون، رها کنیم، انرژی مکانیکی سیستم هم $\frac{1}{2}kx_m^2$ می‌شود، زیرا در لحظهٔ رها شدن فنر انرژی جنبشی صفر است. در این مورد، معادلهٔ ۱۲ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= E \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2\end{aligned} \qquad (15)$$

با این رابطه می‌شود سرعت را به‌ازای هر مقدار جابه‌جایی محاسبه کرد

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} \qquad (16)$$

چنان‌که انتظار می‌رود، از معادلهٔ ۱۶ نتیجه می‌شود که سرعت، به‌ازای $x = \pm x_m$، صفر است. در لحظه‌ای که جسم از نقطهٔ مرجع

$(x = x_۰ = ۰)$ می‌گذرد، سرعت $v_۰$ برابر است با

$$v_۰ = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_{\rm m} \qquad (۱۷)$$

انرژی مکانیکی را، هم برحسب سرعت $v_۰$ در نقطهٔ مرجع $(E = ۱/۲ mv_۰^۲)$ و هم برحسب حداکثر جابه‌جایی از نقطهٔ مرجع $(E = ۱/۲ kx_{\rm m}^۲)$ می‌توان بیان کرد.

نیروی گرانش

برای سیستم توپ-زمین، مختصهٔ قائم را به‌جای x با y نشان می‌دهیم. نقطهٔ مرجع $y_۰ = ۰$ را سطح زمین می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم $U(y_۰) = ۰$. حالا می‌توانیم انرژی پتانسیل $U(y)$ سیستم را از معادلهٔ ۱۰، با $F(y) = -mg$، محاسبه کنیم

$$U(y) - ۰ = -\int_۰^y -mg\, dy$$

$$U(y) = mgy \qquad (۱۸)$$

توجه کنید که این انرژی پتانسیل، در معادلهٔ ۱۳ صدق می‌کند: $-dU/dy = -mg = F$.

سرعت اولیهٔ توپ در نقطهٔ مرجع $v_۰$ است، و از معادلهٔ ۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + mgy = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \qquad (۱۹)$$

به کمک این معادله، که با معادلهٔ ۲۵ فصل ۲ هم‌ارز است، می‌توانیم سرعت را به‌ازای هر ارتفاع y به‌دست بیاوریم.

این مثال نشان می‌دهد که تحلیل سیستمهای دینامیکی با رهیافت انرژی و رهیافت نیرو، یعنی به دو زبان کمی متفاوت، چگونه است. رهیافت نیرو برای تحلیل سیستم چنین است: "توپ با سرعت اولیهٔ $v_۰$ شروع به حرکت می‌کند. زمین نیروی $-mg$ بر آن وارد می‌کند و به آن شتاب $-g$ می‌دهد. شتاب رو به پایین موجب می‌شود که سرعت کم شود، و سرانجام در ارتفاع h به صفر برسد. از اینجا به‌بعد، توپ درگرانش رو به پایین زمین شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند، و با سرعت $-v_۰$ به زمین می‌رسد."

رهیافت انرژی چنین است: "توپ با انرژی جنبشی $۱/۲mv_۰^۲$ شروع به حرکت می‌کند. با بالا رفتن توپ، انرژی پتانسیل سیستم توپ-زمین زیاد می‌شود، پس انرژی جنبشی باید کم شود تا انرژی مکانیکی E ثابت بماند. در نقطهٔ اوج حرکت، همهٔ انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل شده است. در سقوط توپ، این فرایند معکوس می‌شود، یعنی انرژی پتانسیل دوباره به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، و هنگامی که توپ به زمین می‌خورد همهٔ انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل شده است." البته نتیجهٔ هر دو رهیافت یکی است، در اغلب موارد، رهیافت انرژی مفیدتر است و بصیرت بیشتری فراهم می‌کند. همچنین، مواردی وجود دارد که کار کردن با انرژی، که اسکالر است، از کار کردن با نیرو، که بردار است، ساده‌تر است.

مثال ۱. اتاقک آسانسوری به جرم $m = ۹۲۰{\rm kg}$ از سطح خیابان به‌بالاترین طبقهٔ مرکز تجارت جهانی در نیویورک، به ارتفاع $h = ۴۱۲{\rm m}$ بالاتر از سطح زمین، حرکت می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل اتاقک چقدر است؟

حل: دقیقترگفته باشیم، البته منظورمان تغییر انرژی پتانسیل سیستم اتاقک-زمین است. از معادلهٔ ۱۸ داریم

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mgh = (۹۲۰{\rm kg})(۹٫۸{\rm m/s^۲})(۴۱۲{\rm m})$$
$$= ۳٫۷ \times ۱۰^۶{\rm J} = ۳٫۷{\rm MJ}$$

این مقدار تقریباً ۱kWh است؛ شرکت برق بهای انرژی الکتریکی را برحسب همین "واحد" با مشتریانش حساب می‌کند.

مثال ۲. فنر یک تفنگ فنری به اندازهٔ $d = ۳٫۲{\rm cm}$ از حالت آزاد خود فشرده شده است؛ گویی به جرم $({\rm m} = ۱۲{\rm g})$ در لوله قرار دارد. اگر تفنگ شلیک شود، گوی با چه سرعتی از لوله خارج می‌شود؟ ثابت نیروی فنر، k، برابر با $۷٫۵{\rm N/cm}$ است. اصطکاک ناچیز است و لولهٔ تفنگ افقی است.

حل: می‌توانیم مستقیماً معادلهٔ ۱۲ را به‌کار ببریم؛ مکان اولیهٔ فنر $x_۰ = d$، و سرعت اولیهٔ گوی $v_۰ = ۰$ است. در حالت نهایی فنر در حالت آزاد است $(x = ۰)$ و گوی با سرعت v حرکت می‌کند. پس

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰ = ۰ + \frac{۱}{۲}kd^۲$$

از این معادله v را به‌دست می‌آوریم

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (۰٫۰۳۲{\rm m})\sqrt{\frac{۷۵۰{\rm N/m}}{۱۲\times ۱۰^{-۳}{\rm kg}}} = ۸٫۰{\rm m/s}$$

مثال ۳. یک واگن تفریحی (شکل ۸) پر از مسافر، به آرامی به ارتفاع $y = ۲۵{\rm m}$ می‌رود، و از آنجا به طرف پایین شتاب می‌گیرد. با چشمپوشی از اصطکاک سیستم، حساب کنید که این واگن با چه سرعتی به پایین مسیر می‌رسد؟

حل: در نگاه اول، به نظر می‌رسد حل مسئله غیرممکن باشد، زیرا هیچ چیزی دربارهٔ شکل مسیر واگن نمی‌دانیم. اما در غیاب اصطکاک، ریل کاری روی واگن انجام نمی‌دهد؛ تنها نیرویی که روی واگن کار انجام می‌دهد گرانش است. انرژی مکانیکی در بالاترین نقطهٔ مسیر، که آن‌را با $E_{\rm t}$ نشان می‌دهیم

$$E_{\rm t} = U_{\rm t} + K_{\rm t} = mgy + ۰$$

۸ـ۴ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حلِ کامل

هدف از تحلیل سیستمهای مکانیکی، معمولاً این است که حرکت ذرات را برحسب زمان توصیف کنیم. در فصلهای ۵ و ۶ نحوهٔ حل این مسئله، با استفاده از قوانین نیوتون، را نشان دادیم؛ این روش را روش دینامیکی می‌نامیم. روش دیگری وجود دارد، که گاه مفیدتر هم هست. این روش، روش انرژی است که دراین بخش درباره‌اش صحبت می‌کنیم.

معادلهٔ ۱۲ رابطهٔ میان مختصه و سرعت یک حرکت یک‌بعدی است در حالتی که نیرو فقط به مکان بستگی داشته باشد. (در یک‌بعد، هر نیرویی که فقط به مکان بستگی داشته باشد حتماً پایستار است؛ در دو یا سه‌بعد، چنانکه در بخش ۸ـ۵ خواهیم دید، الزاماً چنین نیست.) در طی وصول به معادلهٔ ۱۲، نیرو و شتاب حذف شده‌اند. برای اینکه این تحلیل کامل شود، باید سرعت را هم حذف کنیم تا مکان به‌صورت تابعی از زمان به‌دست بیاید.

برای انجام این کار، از معادلهٔ ۱۲ شروع می‌کنیم

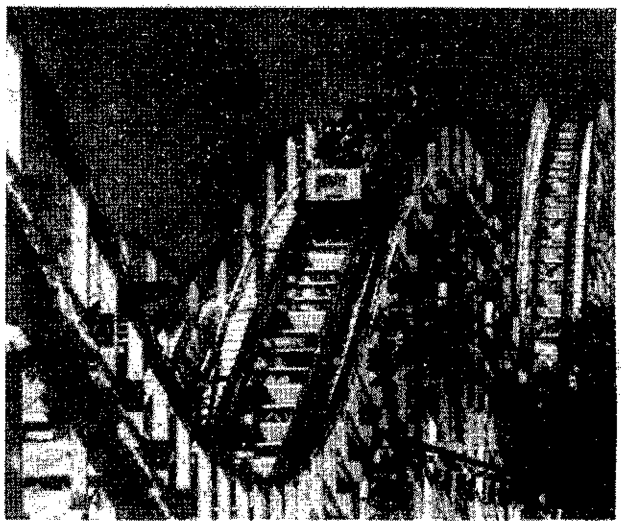
$$U(x) + \frac{۱}{۲}mv^۲ = E$$

از این رابطه v را به‌دست می‌آوریم

$$v = \pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه، $U(x)$ انرژی پتانسیل متناظر با نیرویی است که در سیستم عمل می‌کند، و E انرژی مکانیکی (ثابت)ای است که به سیستم داده می‌شود. از معادلهٔ ۲۰ معلوم می‌شود که، به‌ازای یک مقدار معین E، حرکت به ناحیه‌هایی از محور x محدود می‌شود که در آنها $E \geq U(x)$ باشد. یعنی، سرعت نمی‌تواند موهومی باشد و انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد، پس $[E - U(x)]$ باید بزرگتر از یا مساوی با صفر باشد. به‌علاوه، با رسم منحنی $U(x)$ برحسب x می‌توانیم توصیف کیفی خوبی از انواع ممکن حرکت به‌دست بیاوریم. این توصیف مبتنی است بر اینکه سرعت متناسب با جذر تفاضل E و U است.

به عنوان مثال، تابع انرژی پتانسیل شکل ۹الف را در نظر بگیرید. (اگرچه این تابع شبیه به مقطع مسیر واگن تفریحی است، اما به‌یاد داشته باشید که نمایندهٔ انرژی پتانسیل سیستم پایستاری است که حرکت در آن منحصر به یک‌بعد است. واگن تفریحی‌ای که روی ریل حرکت می‌کند، حرکتی دوبعدی یا سه‌بعدی دارد.) لازمهٔ واقعی بودن حرکت این است که $E \geq U(x)$ باشد؛ پس کمترین انرژی مکانیکی ممکن $E_۰$ است. به‌ازای این مقدار انرژی $E = E_۰ = U$ است، و انرژی جنبشی باید صفر باشد. یعنی ذره باید در نقطهٔ $x_۰$ ساکن باشد. اگر انرژی سیستم را کمی بیشتر کنیم، و به $E_۱$ برسانیم، ذره فقط می‌تواند بین $x_۱$ و $x_۲$ حرکت کند. با حرکت ذره از $x_۰$، به‌سوی $x_۱$ یا $x_۲$، سرعت آن کم می‌شود. در $x_۱$ یا $x_۲$، ذره می‌ایستد و جهت حرکت آن



شکل۸. وسیله‌ای برای تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی.

که در آن $y = ۰$ را پایین‌ترین نقطهٔ مسیر گرفته‌ایم. هنگامی که واگن به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر می‌رسد، انرژی مکانیکی، E_b، برابر است با

$$E_b = U_b + K_b = ۰ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

مرجع U را چنان گرفته‌ایم که در $y = ۰$ داشته باشیم $U = ۰$ پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که $E_t = E_b$ باشد. پس

$$mgy = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

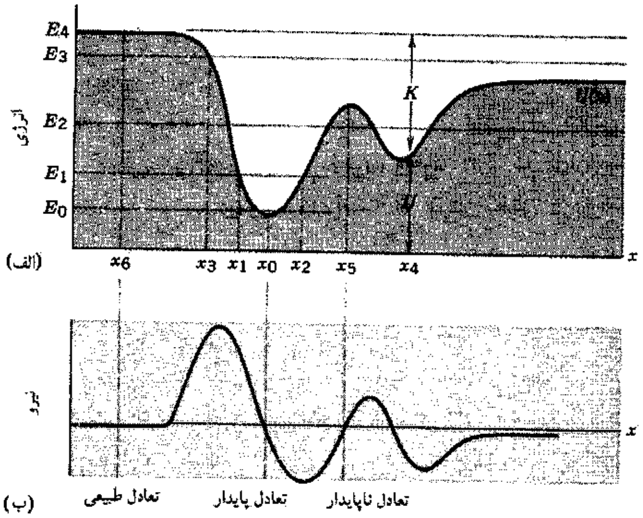
از این معادله v را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{۲gy} = \sqrt{(۲)(۹{,}۸\mathrm{m/s^۲})(۲۵\mathrm{m})} = ۲۲\mathrm{m/s}$$

اگر جسمی از ارتفاع $۲۵\mathrm{m}$ رها شود و در راستای قائم سقوط کند هم با همین سرعت به زمین می‌رسد. ریل اندازهٔ سرعت واگن "افتادن" را تغییر نمی‌دهد؛ فقط جهت حرکت را تغییر می‌دهد. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم واگن و محتویات آن است.

با گذشتن واگن از نقاط پست و بلند مسیر، سرعت آن زیاد و کم می‌شود. تا آنجا که هیچ نقطه‌ای از مسیر از نقطهٔ اولیه بلندتر نباشد، سیستم انرژی مکانیکی کافی دارد که از تپه‌های بین راه بگذرد و به نقطهٔ پایان برسد.

مزیت روش انرژی بر روش نیرو در این مسئله، کاملاً روشن است. برای استفاده از قوانین نیوتون باید شکل دقیق مسیر را بدانیم و تازه باید مؤلفه‌های نیرو و شتاب را در هر نقطه‌ای حساب کنیم. این کار می‌تواند کار بسیار مشکلی باشد. در عوض، با استفاده از قوانین نیوتون، اطلاعات بیشتری نسبت به روش انرژی به‌دست می‌آید، از جمله مدتی که طول می‌کشد تا واگن به پایین مسیر برسد.



شکل۹. (الف) یک تابع انرژی پتانسیل $U(x)$. (ب) نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل.

معکوس می‌شود. به همین دلیل، دو نقطهٔ x_1 و x_2 را نقاط بازگشت حرکت می‌نامند. در انرژی E_2، چهار نقطهٔ بازگشت وجود دارد و ذره در یکی از دو درهٔ پتانسیل نوسان می‌کند. در انرژی E_3، فقط یک نقطهٔ بازگشت وجود دارد، که x_3 است. اگر ذره در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی x باشد، در نقطهٔ x_3 می‌ایستد و از آن پس در جهت مثبت x حرکت خواهد کرد. به‌ازای انرژیهای بیش از E_4، نقطهٔ بازگشتی وجود ندارد، جهت حرکت ذره همواره ثابت می‌ماند. اندازهٔ سرعت ذره، با توجه به مقدار انرژی پتانسیل در هر نقطه، تغییرمی‌کند؛ چنانکه در شکل برای نقطهٔ x_4 نشان داده شده است، انرژی جنبشی در هر نقطه عبارت است از اختلاف انرژی مکانیکی (مثلاً E_4 در شکل ۹الف) با انرژی پتانسیل $U(x)$ درآن نقطه.

در نقطه‌ای که $U(x)$ کمینه باشد، مثلاً در $x = x_0$، شیب منحنی صفر است، بنابراین نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن باقی خواهد ماند. علاوه بر این، اگر ذره را کمی، به هر طرف، جابه‌جا کنیم، نیرو، $F(x) = -dU/dx$، می‌خواهد که آن‌را برگرداند؛ بنابراین، ذره حول نقطهٔ تعادل نوسان خواهد کرد. به همین دلیل، این نقطهٔ تعادل را نقطهٔ تعادل پایدار می‌نامند. شکل ۹ب نیروی $F(x)$ متناظر با انرژی پتانسیل $U(x)$ را نشان می‌دهد. اگر ذره کمی به طرف چپ x_0 برود (یعنی به xهای کوچکتر)، نیرو مثبت می‌شود و ذره را به‌سوی xهای بزرگتر می‌راند (یعنی دوباره به طرف x_0 برمی‌گرداند). اگر ذره به طرف راست x_0 برود، نیروی وارد بر ذره منفی می‌شود و باز هم آن‌را به طرف x_0 می‌راند.

در نقطه‌ای که $U(x)$ بیشینه باشد هم، مثلاً در $x = x_5$، شیب منحنی صفر است و نیرو صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$ است. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن می‌ماند. اما اگر ذره، حتی خیلی کم، از این نقطه جابه‌جا شود، نیروی $F(x)$ آن‌را از نقطهٔ تعادل دورتر می‌کند به همین دلیل، چنین نقطهٔ تعادلی را نقطهٔ تعادل ناپایدار می‌نامند. اگر ذره، در شکل ۹ب، از نقطهٔ متناظر با x_5 به طرف راست برود (به طرف xهای بزرگتر) نیروی مثبتی ایجاد می‌شود که آن‌را به طرف xهای باز هم بزرگتر می‌راند.

در بازه‌ای که $U(x)$ درآن ثابت باشد، مثلاً در اطراف $x = x_6$، شیب منحنی صفر است، پس نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی، $F(x_6) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. چنین بازه‌ای را بازهٔ تعادل خنثی می‌نامند، زیرا اگر ذره را کمی جابه‌جا کنیم، هیچ نیروی دافعه یا بازگرداننده‌ای برآن وارد نمی‌شود.

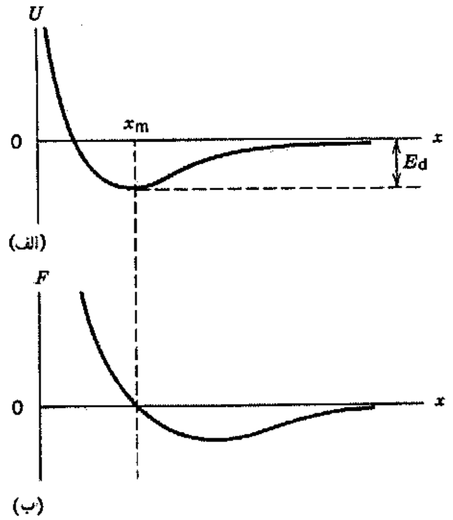
از این بحث روشن می‌شود که با دانستن تابع انرژی پتانسیل در ناحیه‌ای از محورِ x که ذره در آن حرکت می‌کند، می‌توانیم اطلاعات زیادی دربارهٔ حرکت جسم به‌دست بیاوریم.

مثال ۴. تابع انرژی پتانسیل نیروی بین اتمهای یک مولکول دو اتمی را (تقریباً) می‌توان چنین نوشت

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}$$

در این رابطه، a و b دو ثابت مثبت‌اند و x فاصلهٔ بین دو اتم است. (الف) فاصلهٔ دو اتم در حالت تعادل، (ب) نیروی بین دو اتم، و (ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول (یعنی برای اینکه اتمها از حالت تعادل به موقعیت $x = \infty$ بروند) چقدر است؟

حل: (الف) شکل ۱۰الف $U(x)$ را به‌صورت تابعی از x نشان



شکل۱۰. مثال ۴. (الف) انرژی پتانسیل و (ب) نیروی بین اتمهای یک مولکول دواتمی به‌صورت تابعی از فاصلهٔ x بین دو اتم. توجه کنید که انرژی پتانسیل را به‌ازای فاصلهٔ بی‌نهایت اتمها از هم صفر گرفته‌ایم.

می‌دهد. تعادل در نقطهٔ x_m حاصل می‌شود، که در آن $U(x)$ کمینه می‌شود. این نقطه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m}=0$$

یعنی

$$\frac{-12a}{x_m^{13}}+\frac{6b}{x_m^{7}}=0$$

یا

$$x_m=\left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ ۱۳، نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل به‌دست می‌آید

$$F(x)=-\frac{dU}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}}-\frac{b}{x^{6}}\right)=\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^{7}}$$

شکل ۱۰ب نمودار نیرو را برحسب فاصلهٔ بین اتمها نشان می‌دهد. در جایی‌که نیرو مثبت باشد (از $x=0$ تا $x=x_m$)، اتمها یکدیگر را دفع می‌کنند (نیرو درجهت افزایش x است). در جایی‌که نیرو منفی باشد (از $x=x_m$ تا $x=\infty$)، اتمها یکدیگر را جذب می‌کنند (نیرو در جهت کاهش x است). در $x=x_m$، نیرو صفر است؛ این یک نقطهٔ تعادل است، این تعادل پایدار است.

(ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول به اتمهایش را انرژی تفکیک، E_d، می‌نامند. از منحنی انرژی پتانسیل در شکل ۱۰الف، نتیجه می‌شود که اگر $E\geq 0$ باشد، اتمها را می‌توان تا $x=\infty$، متناظر با $U=0$، از هم جدا کرد. حداقل انرژی لازم $E=0$ است، یعنی حالتی که اتمها در حالت نهایی‌شان بینهایت از هم دور $(U=0)$ و ساکن هستند $(K=0)$. در حالت تعادل مولکول، همهٔ انرژی به شکل پتانسیل است، پس (شکل ۱۰الف) خواهیم داشت $E=U(x_m)$ که کمیتی منفی است. مقدار انرژی‌ای که باید به مولکول، در حالت تعادلش، بدهیم تا انرژی آن از این مقدار منفی به صفر برسد، همان است که آن‌را انرژی تفکیک E_d نامیدیم. پس،

$$U(x_m)+E_d=0$$

یا

$$E_d=-U(x_m)=-\frac{a}{x_m^{12}}+\frac{b}{x_m^{6}}$$

و با جایگذاری مقدار x_m خواهیم داشت

$$E_d=\frac{b^2}{4a}$$

E_d کمیتی مثبت است، و باید هم باشد. این انرژی را می‌توانیم با انجام کار خارجی به مولکول بدهیم، مثلاً با استفاده از نیروهای الکتریکی، یا با زیاد کردن انرژی جنبشی یکی از اتمهای مولکول نسبت به دیگری.

جواب تحلیلی برای $x(t)$ (اختیاری)

تابع $x(t)$ می‌تواند توصیف کاملی از حرکت یک‌بعدی ذره به‌دست بدهد. این تابع، مکان x ذره را در همهٔ زمانهای t تعیین می‌کند. برای پیدا کردن $x(t)$، کار را از معادلهٔ ۲۰ شروع می‌کنیم. این معادله را چنین می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}$$

یا

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}=dt \qquad (21)$$

از دو طرف این معادله، بین مکان اولیه ($x=x_0$ در $t=t_0$) تا مکان دلبخواه x در زمان t، انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}=\int_{t_0}^{t}dt=t-t_0 \qquad (22)$$

با محاسبهٔ انتگرال طرف چپ معادلهٔ ۲۲، علی‌الاصول می‌توانیم معادلهٔ حاصل را حل کنیم و $x(t)$ را به‌دست بیاوریم.

در معادلهٔ ۲۲، علامت جلوی رادیکال بستگی به این دارد که $\mathbf{v}$ در جهت مثبت x است یا در جهت منفی x. با تغییر $\mathbf{v}$ در طی حرکت، ممکن است لازم شود که انتگرال‌گیری را برای بخشهای مختلف حرکت جداگانه انجام بدهیم.

در بعضی موارد، می‌شود انتگرال معادلهٔ ۲۲ را محاسبه کرد و یک جواب تحلیلی برای $x(t)$ به‌دست آورد. در موارد دیگر، ممکن است راحت‌تر باشد که با استفاده از کامپیوتر مسئله را به‌صورت عددی حل کنیم؛ این را در بخش بعد نشان می‌دهیم. در اینجا جواب تحلیلی را برای ذره‌ای به جرم m که در یک بعد حرکت می‌کند، و فنری با ثابت نیروی k برآن نیرو وارد می‌کند، به‌دست می‌آوریم. در چنین مواردی، $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ است. فرض کنید که در $t=0$، ذره در $x=x_0$ است، و سرعت آن $v=0$ است. پس انرژی مکانیکی، E، طبق معادلهٔ ۱۲ برابر با $\frac{1}{2}kx_0^2$ است. در این مورد، معادلهٔ ۲۲ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{x_0^2-x^2}}=t$$

این انتگرال، به شکل استانداردی است که جواب آن در جدولهای انتگرال یافت می‌شود

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

در مورد مسئلهٔ ما معلوم می‌شود که

$$\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_\circ^{\text{۲}} - x^{\text{۲}}}} = -\cos^{-\text{۱}}\left(\frac{x}{x_\circ}\right)\Big|_{x_\circ}^{x} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

این نتیجه را، پس از کمی عملیات، می‌شود چنین نوشت

$$x(t) = x_\circ \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

حرکت یک‌بعدی ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی فنر حرکت می‌کند، سینوسی است. به تجربه می‌دانیم که این حرکت نوسانی است (یعنی، ذره روی یک مسیر می‌رود و برمی‌گردد)؛ این نتیجه نشان می‌دهد که نوسان سینوسی است. حرکت نوسانی را، به‌صورت کلی‌تر، در فصل ۱۵ بررسی خواهیم کرد؛ در آنجا همین نتیجه را برای $x(t)$ با استفاده از قوانین نیوتون هم به‌دست خواهیم آورد.

حل عددی

قبلاً در مورد نیروی وابسته به زمان (بخش ۶ـ۶) یا وابسته به سرعت (بخش ۶ـ۷) روشی عددی برای حل معادلهٔ حرکت ارائه کردیم. در مورد نیروهای وابسته به زمان هم می‌توانیم چنین روشی را به کار بگیریم. عملیاتی که در اینجا به آن می‌پردازیم مبتنی بر قوانین نیوتون است نه روشهای انرژی.

فرض کنید نیروی $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم m وارد شود. در $t = \circ$، ذره در $x_\circ$ واقع شده و سرعت آن $v_\circ$ است. می‌خواهیم بدانیم که حرکت حاصل چگونه است، یعنی می‌خواهیم $x(t)$ و $v(t)$ را در همه زمانها داشته باشیم.

حرکت را به رشته‌ای از بازه‌های زمانی کوچک δt تقسیم می‌کنیم. هر بازه آنقدر کوچک است که شتاب را در سراسر آن می‌شود ثابت گرفت. (در بازه‌ای که به قدر کافی کوچک باشد، x چندان تغییری نمی‌کند؛ پس $F(x)$ تقریباً ثابت می‌ماند، و $a = F/m$ هم همین‌طور.)

در بازهٔ اول، که از $t = \circ$ تا $t = \delta t$ است، شتاب برابر با مقدار اولیهٔ $a_\text{۱} = F(x_\circ)/m$ است. (در اینجا شاخصهای زیر حروف نشاندهندهٔ شمارهٔ بازهٔ زمانی‌اند و کمیت مربوط را در پایان آن بازه مشخص می‌کنند. بنابراین، $v_\text{۲}$ یعنی سرعت در پایان بازهٔ دوم.) حالا به‌راحتی می‌توانیم معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت را برای هر بازه به‌کار ببریم. معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ سرعت در پایان بازهٔ اول را می‌دهد

$$v_\text{۱} = v_\circ + a_\text{۱}\,\delta t$$

معادلهٔ ۱۹ فصل ۲ هم مکان در پایان بازهٔ اول را می‌دهد

$$x_\text{۱} = x_\circ + v_\circ\,\delta t + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}a_\text{۱}(\delta t)^\text{۲}$$

با استفاده از این مکان جدید ($x_\text{۱}$)، شتاب (تقریباً ثابت) ذره در بازهٔ دوم، $a_\text{۲} = F(x_\text{۱})/m$، را به‌دست می‌آوریم؛ و بعد معادلات شتاب ثابت را برای بازهٔ دوم می‌نویسیم

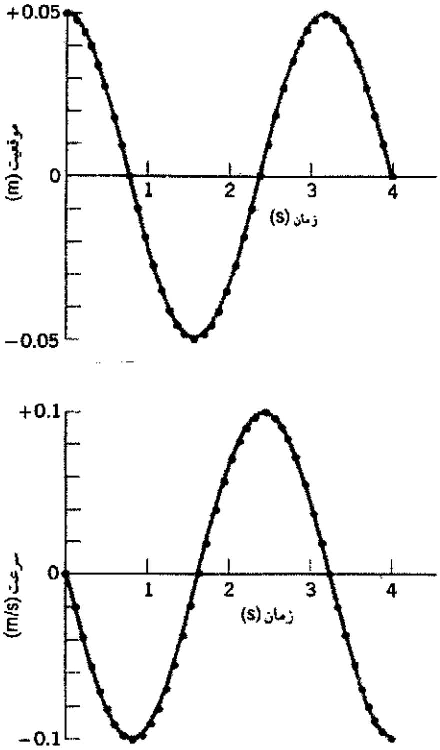
$$v_\text{۲} = v_\text{۱} + a_\text{۲}\delta t$$

و

$$x_\text{۲} = x_\text{۱} + v_\text{۱}\delta t + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}a_\text{۲}(\delta t)^\text{۲}$$

این عملیات را می‌توانیم، برای هر چند بازه که بخواهیم، دنبال کنیم. هر چه بازهٔ δt را کوچکتر بگیریم، نتیجهٔ محاسبات دقیقتر می‌شود.

مثلاً، نیروی فنر $F(x) = -kx$ با $k = \text{۹٫۶}\,\text{N/m}$ را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم $m = \text{۲٫۵}\,\text{kg}$ وارد می‌شود. فرض کنید که ذره در $t = \circ$، از نقطهٔ $x_\circ = \circ\text{٫۵}\,\text{m}$ و با سرعت $v_\circ = \circ$، شروع به حرکت کند. شکل ۱۱ نتایج محاسبهٔ عددی $x(t)$ و $v(t)$ را، با استفاده از ۴۰۰ بازه، هر یک به اندازهٔ $\circ\text{٫}\circ\text{۱}\,\text{s}$، نشان می‌دهد. یک برنامهٔ کامپیوتری برای انجام این محاسبهٔ عددی در پیوست ط آمده است. با استفاده از این برنامه می‌توانیم هر حرکت یک‌بعدی حاصل از نیروی وابسته به مکان را تحلیل کنیم، حتی اگر از انتگرال



شکل ۱۱. حل عددی برای حرکت ذره‌ای که تحت اثر نیروی فنر $F = -kx$ است. نقاط شکل مقادیری را نشان می‌دهد که مستقیماً از کامپیوتر گرفته شده‌اند. برای اینکه شکل واضح باشد، از هر ۱۰ نقطهٔ کامپیوتری فقط یکی نشان داده شده است. منحنیها از این نقاط گذرانده شده‌اند، و کاملاً شبیه همان منحنیهای سینوس و کسینوس‌اند که از جواب تحلیلی حاصل می‌شوند.

معادلهٔ ۱۰ شکل تحلیلی‌ای برای انرژی پتانسیل به‌دست نیاید یا نتوانیم انتگرال معادلهٔ ۲۲ را به شکل تحلیلی محاسبه کنیم.

نتایج شکل ۱۱ خیلی آشنا به‌نظر می‌رسند: این منحنیها شبیه منحنیهای سینوس و کسینوس‌اند. در واقع، معادلهٔ ۲۲ را قبلاً حل کرده و جواب تحلیلی این سیستم را به‌دست آورده‌ایم، و دیده‌ایم که معادلهٔ حرکت یک تابع کسینوس است. رهیافت عددی هم مؤید همین نتیجه است.

۵ـ۸ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی (اختیاری)

تا اینجا مفاهیم انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی را برای سیستمهای یک‌بعدی، که در آنها نیرو در راستای حرکت است، بررسی کردیم. نتایج این بررسی را می‌توانیم به‌راحتی به حرکت سه‌بعدی تعمیم بدهیم و در این مورد هم عبارتی برای پایستگی انرژی به‌دست بیاوریم.

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن ذره‌ای روی مسیری حرکت می‌کند و نیروی وارد بر ذره ناشی از اجزای دیگر سیستم است. اگر کارِ نیروی $\mathbf{F}$ فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای حرکت و مستقل از مسیر باشد، این نیرو پایستار است. انرژی پتانسیل U را مشابه با سیستمهای یک‌بعدی تعریف می‌کنیم، و می‌بینیم که تابعی از سه مختصهٔ فضایی است؛ یعنی، $U = U(x, y, z)$. تعمیم معادلهٔ ۹ به حرکت سه‌بعدی چنین است

$$\Delta U = -\int_{x_\circ}^{x} F_x dx - \int_{y_\circ}^{y} F_y dy - \int_{z_\circ}^{z} F_z dz \qquad (۲۳)$$

یا، به شکل جمع و جورتر و با نماد برداری

$$\Delta U = -\int_{\mathbf{r}_\circ}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (۲۴)$$

در این رابطه، ΔU تغییرانرژی پتانسیل سیستم در طی مسیراست؛ مسیر حرکت ذره از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$، که بردار مکان $\mathbf{r}_\circ$ تعریف می‌شود، شروع می‌شود و به نقطهٔ (x, y, z)، که با بردار مکان $\mathbf{r}$ تعریف می‌شود، ختم می‌شود. F_x، F_y، و F_z مؤلفه‌های نیروی پایستار $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$اند.

تعمیم معادلهٔ ۱۲ به حرکت سه‌بعدی چنین است

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_\circ^2 + U(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \qquad (۲۵)$$

یا، با نماد برداری

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_\circ \cdot \mathbf{v}_\circ + U(\mathbf{r}_\circ) \qquad (۲۶)$$

که در آن $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ و $\mathbf{v}_\circ \cdot \mathbf{v}_\circ = v_{\circ x}^2 + v_{\circ y}^2 + v_{\circ z}^2 = v_\circ^2$ است. معادلهٔ ۲۵ را، برحسب انرژی مکانیکی E، می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E$$

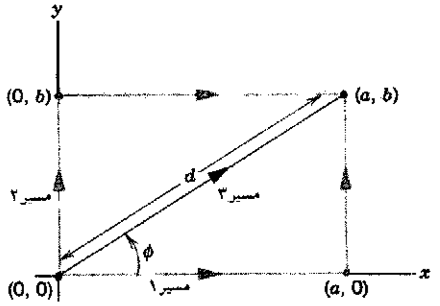
سرانجام، تعمیم سه‌بعدی معادلهٔ ۱۳ چنین است[1]

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (۲۷)$$

اگر این عبارت $\mathbf{F}$ را در معادلهٔ ۲۴ بگذاریم، یک اتحاد به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد دو معادلهٔ ۲۴ و ۲۷ هم‌ارزند. به زبان برداری، می‌گوییم که نیروی پایستار $\mathbf{F}$، منفیِ گرادیان انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ است. می‌توانید نشان بدهید که برای حرکت در راستای محور x، همهٔ این عبارات تبدیل می‌شوند به معادلات یک‌بعدی متناظرشان، که قبلاً به‌دست آورده بودیم، در معادلات ۲۴ و ۲۷، $\mathbf{F}$ نشاندهندهٔ نیرویی است که توسط سیستمی با انرژی پتانسیل U اعمال می‌شود.

مثال ۵. در سیستمی از ذرات، که حرکتشان مقید به صفحهٔ xy است، نیرو به شکل $\mathbf{F}(x, y) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = -ky\mathbf{i} - kx\mathbf{j}$ است که درآن k یک مقدار ثابت مثبت است. (این نیرو ذره‌ای را که در نقطهٔ دلبخواه (x, y) واقع شده است به طرف خط قطری $y = -x$ می‌راند. برای تحقیق این موضوع می‌توانید خط $y = -x$ را بکشید و مؤلفه‌های نیروی F_x و F_y را در نقاط مختلف صفحهٔ xy رسم کنید.) (الف) نشان بدهید که کار این نیرو، طی حرکت ذره از مبدأ $(\circ, \circ)$ به نقطهٔ (a, b)، در راستای هر سه مسیر شکل ۱۲ یکسان است. (ب) با فرض اینکه این نیرو پایستار است، انرژی پتانسیل متناظر با آن، یعنی $U(x, y)$ را به‌دست بیاورید. نقطهٔ مرجع را $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = \circ$ بگیرید و فرض کنید $U(\circ, \circ) = \circ$.

حل: (الف) کار در مسیر ۱ را می‌شود با تقسیم مسیر به دو بخش به‌دست آورد: مسیر a۱ از $x = \circ$ تا $x = a$ در راستای محور x، و مسیر b۱ از نقطهٔ $(a, \circ)$ به نقطهٔ (a, b) در راستای قائم، کار در مسیر



شکل۱۲. مثال ۵. سه مسیر مختلف برای محاسبهٔ کارذره، در حرکت از مبدأ $(\circ, \circ)$ به نقطهٔ (a, b).

---

۱. مشتق پاره‌ای، $\partial/\partial x$، یعنی مشتق $U(x, y, z)$ نسبت به x، در حالی‌که y و z ثابت‌اند. به همین ترتیب، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ هم به معنی مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای مربوط‌اند وقتی که متغیرهای دیگر ثابت باشند.

$1a$ برابر است با

$$W_{1a} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int F_x dx + \int F_y dy$$
$$= \int (-ky)dx + \int (-kx)dy$$

در مسیر $1a$، $y=0$ و $dy=0$ است. پس هر دو انتگرال بالا صفرند و $W_{1a}=0$ می‌شود. در مسیر $1b$، $d\mathbf{s}=dy\mathbf{j}$ و $x=a$ است، پس

$$W_{1b} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)dy$$
$$= (-ka)\int_0^b dy = -kab$$

بنابراین، کل کار در مسیر ۱ برابر است با

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab$$

در مسیر ۲ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم

$$W_{2a} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)dy = 0$$
$$W_{2b} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)dx$$
$$= (-kb)\int_0^a dx = -kab$$

در مسیر ۳، $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ است، و خواهیم داشت

$$W_3 = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int (-ky\,dx - kx\,dy)$$

اگر متغیر r را روی پاره‌خطی بگیریم که از $(0,0)$ شروع می‌شود و به (a,b) ختم می‌شود، $y = r\sin\phi$ و $dy = dr\sin\phi$ است (ϕ در راستای این خط ثابت است). همچنین $x = r\cos\phi$ و $dx = dr\cos\phi$ است. r را متغیر انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. مقدار r از ۰ در مبدأ، تا $d=(a^2+b^2)^{1/2}$ در نقطهٔ (a,b)، تغییر می‌کند. به این ترتیب، انتگرال مربوط به W_3 به‌صورت زیر در می‌آید

$$W_3 = \int_0^d [-k(r\sin\phi)(dr\cos\phi) - k(r\cos\phi)(dr\sin\phi)]$$
$$= -2k\sin\phi\cos\phi\int_0^d r\,dr = -kd^2\sin\phi\cos\phi$$

با توجه به اینکه $\sin\phi = b/d$ و $\cos\phi = a/d$ است، در رابطهٔ بالا $W_3 = -kab$ می‌شود. بنابراین، $W_1 = W_2 = W_3$ است. این نتیجه ثابت نمی‌کند که $\mathbf{F}$ حتماً پایستار است (برای اثبات این موضوع باید کار را برای همهٔ مسیرهای بین این دو نقطه حساب کرد)، اما تا حدود زیادی اطمینان می‌دهد که $\mathbf{F}$ ممکن است پایستار باشد.

(ب) انرژی پتانسیل را می‌شود از معادلهٔ ۲۴ به‌دست آورد، و در واقع قبلاً آن‌را، با محاسبهٔ کار در مسیر ۳، عملاً به‌دست آورده‌ایم. تنها تفاوت در این است که، به‌جای (a,b)، باید تا نقطهٔ دلبخواه (x,y) انتگرال بگیریم. کافی است اسم نقطهٔ (a,b) را (x,y) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\Delta U = U(x,y) - U(0,0) = -W = kxy$$

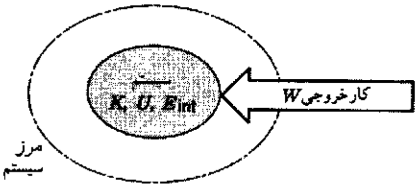
که در آن فرض کرده‌ایم $U(0,0)=0$. باید بتوانید نشان بدهید که می‌توانیم معادلهٔ ۲۷ را برای این تابع انرژی پتانسیل به‌کار ببریم و نیروی $\mathbf{F}(x,y)$ را پیدا کنیم.

اگر این نیرو را کمی تغییر بدهیم، چنان‌که $\mathbf{F} = -k_1y\mathbf{i} - k_2x\mathbf{j}$ شود، از روش قسمت (الف) معلوم می‌شود که این نیرو در مورد $k_1 \neq k_2$ پایستار نیست (مسئلهٔ ۴۶). حتی اگر $k_1 = -k_2$ باشد هم، این نیرو همچنان ناپایستار است. چنین نیرویی کاربرد مهمی در کانونی کردن مغناطیسی ذرات باردار دارد، اما نمی‌شود آن‌را با یک تابع انرژی پتانسیل نشان داد، چون پایستار نیست.

۶ـ۸ پایستگی انرژی در دستگاه ذرات

اگر جسمی با یک یا چند جسم در محیط خودش برهم‌کنش کند، می‌توانیم سیستم را متشکل از هر چند تا جسم که بخواهیم تعریف کنیم. سیستم را هر طور که تعریف کنیم، پایستگی انرژی برقرار خواهد بود، به شرط آنکه در این سیستم همهٔ انرژیها و انتقالهای انرژی میان سیستم و محیط را کاملاً در نظر بگیریم.

شکل ۱۳ سیستم دلبخواهی را نشان می‌دهد که دور آن یک منحنی بستهٔ فرضی به‌نام مرز سیستم رسم شده است. سیستم محصور در منحنی انرژی‌ای دارد که می‌تواند شامل اشکال مختلف انرژی باشد؛ بعضی از این اشکال را روی شکل مشخص کرده‌ایم، انرژی جنبشی K، انرژی پتانسیل U، و انرژی داخلی E_{int}. در اینجا U به‌معنی انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش اجزای مختلف سیستم با هم است؛ برهم‌کنشهای اجزای سیستم با محیط، نه برحسب تغییر انرژیهای



شکل ۱۳. یک سیستم محصور در مرز، با انرژی جنبشی K، انرژی پتانسیل U (تنها مربوط به برهم‌کنش اجزای سیستم با یکدیگر)، و انرژی داخلی E_{int}. محیط می‌تواند با انجام کار خارجی W، با سیستم انرژی مبادله کند.

پتانسیل، بلکه برحسب کار (خارجی) W نشان داده شده‌اند. بعداً، در همین بخش، تعریف دقیقی از انرژی داخلی، برحسب انرژیهای جنبشی و پتانسیل میکروسکوپیک مولکولهای سازندهٔ اجزای سیستم، ارائه می‌کنیم. مثالهایی از تغییرات انرژی داخلی عبارت‌اند از تغییر آرایش مولکولهای سیستم (مثلاً جوشهای میکروسکوپیک ناشی از اصطکاک لغزشی) و تغییر سرعت مولکولهای سیستم که به صورت تغییر دما ظاهر می‌شود. (دما را در فصل ۲۲ بررسی می‌کنیم و در فصل ۲۳ آن‌را به انرژی درونی مربوط می‌کنیم.)

انرژی سیستم، با کاری که محیط روی آن انجام می‌دهد، می‌تواند تغییر کند؛ شکل ۱۳ نمایش این موضوع است. (کار داخلی‌ای که بخشی از سیستم بر بخشی دیگر، درون مرزهای سیستم، انجام می‌دهد انرژی کل را تغییر نمی‌دهد، فقط می‌تواند انرژی را از شکلی به شکلی دیگر تبدیل کند؛ مثلاً از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی.) بنابراین، رابطهٔ پایستگی انرژی سیستم را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\rm int} = W \qquad (۲۸)$$

که در آن، W کار خارجی همهٔ نیروهایی است که محیط از طریق آنها روی سیستم عمل می‌کند.

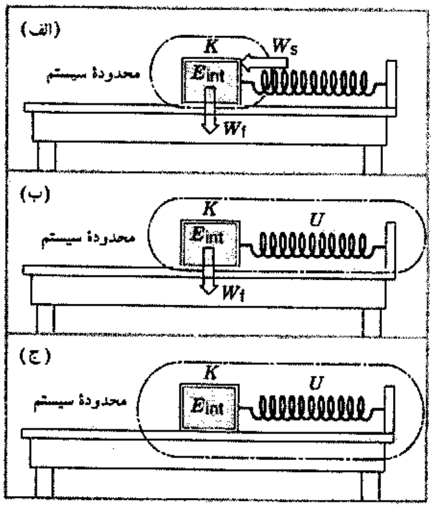
شکل ۱۳، همچنین قرارداد مهم علامت کار خارجی را نشان می‌دهد. کار مثبتِ محیط روی سیستم، انرژی سیستم را زیاد می‌کند. کار منفی محیط روی سیستم (که با کار مثبتِ سیستم بر محیط هم‌ارز است) انرژی سیستم را کم می‌کند.

این اصول را با بررسی سیستم جسم‌ـفنر شکل ۱ نشان می‌دهیم؛ در اینجا فرض می‌کنیم که بین جسم و میزی که جسم بر آن می‌لغزد اصطکاک وجود دارد. ابتدا سیستم را خود جسم تعریف می‌کنیم (شکل ۱۴الف). شکل دو انتقالِ انرژی به داخل مرزهای سیستم را نشان می‌دهد: کار پایستار مثبت W_s که فنر روی جسم انجام می‌دهد و کار ناپایستار منفیِ W_f که نیروی اصطکاک روی جسم انجام می‌دهد. برای این سیستم، پایستگی انرژی را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta K + \Delta E_{\rm int} = W_s + W_f \qquad (۲۹)$$

در این مورد ΔU صفر است، زیرا انرژی پتانسیل سیستم داخل مرز تغییری نمی‌کند. فنر جزء سیستم نیست، پس انرژی پتانسیل فنر به‌حساب نمی‌آید؛ در مقابل، فنر بخشی از محیط است و روی سیستم کار پایستار W_s را انجام می‌دهد. به جهت پیکانهای شکل ۱۴الف، که انتقال انرژی را نشان می‌دهند توجه کنید؛ معادلهٔ ۲۹ نشان می‌دهد که کار مثبت فنر (که فرض کرده‌ایم نسبت به طول طبیعی‌اش فشرده شده است) انرژی جسم را زیاد می‌کند، و کار منفی سطح افقی، انرژی جسم را کم می‌کند.

حالا سیستم را متشکل از جسم و فنر در نظر بگیرید (شکل ۱۴ب). این سیستم جدید انرژی پتانسیل دارد، که مربوط به نیروی فنر است. نیروی اصطکاک تنها نیروی خارجی‌ای است که روی سیستم کار انجام می‌دهد. با این تعریف جدیدِ سیستم، پایستگی انرژی به‌صورت زیر



شکل ۱۴. جسمی، تحت تأثیر فنری، روی میزی حرکت می‌کند؛ میز به آن نیروی اصطکاک وارد می‌کند. (الف) سیستم فقط شامل جسم است؛ نیروی فنر و نیروی اصطکاک روی سیستم کار انجام می‌دهند، و انرژی آن‌را تغییر می‌دهند. (ب) در این مورد، سیستم شامل جسم و فنر است، و هم انرژی جنبشی دارد هم انرژی پتانسیل. (ج) در این مورد، سیستم شامل میز هم هست. نیروی اصطکاک، در اینجا، یک نیروی داخلی است و در انرژی داخلی سیستم مؤثر است.

نوشته می‌شود

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\rm int} = W_f \qquad (۳۰)$$

انرژی سیستم، در این حالت $U + K + E_{\rm int}$ است؛ در این مورد، انتقال انرژی بین فنر و جسم، تغییری در انرژی سیستم ایجاد نمی‌کند. نیروی فنر یک نیروی داخلی است که می‌تواند انرژی را ، در داخلِ سیستم، از یک شکل به شکلی دیگر تبدیل کند $(U \leftrightarrow K)$، اما نمی‌تواند کل انرژی سیستم را تغییر بدهد. کار منفی اصطکاک سطح افقی می‌تواند انرژی سیستم را تغییر بدهد.

سرانجام، این بار سیستم را چنان تعریف می‌کنیم که میز را هم در بر بگیرد (شکل ۱۴ج). در این مورد هیچ نیروی خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، وجود ندارد که بتواند به داخل مرزهای سیستم انرژی منتقل کند. با این تعریف برای سیستم، کار خارجی صفر است؛ پس

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\rm int} = 0 \qquad (۳۱)$$

در این مورد، نیروی اصطکاک هم، مثل نیروی فنر، یک نیروی داخلی است. انرژی، در داخل سیستم؛ می‌تواند از شکل انرژی مکانیکی $U+K$ متعلق به مجموعهٔ فنرـجسم، به انرژی داخلی مجموعهٔ میزـجسم تبدیل شود، اما انرژی کل (مکانیکی+درونی) ثابت می‌ماند. مثلاً فرض کنید جسم‌را، در حالتی که فنر فشرده شده است، از حالت سکون رها کنیم.

جسم روی میز می‌لغزد و سرانجام متوقف می‌شود. در این حالت، $\Delta K = ۰$ است (زیرا $K_{\rm f} = K_{\rm i} = ۰$)؛ پس، $\Delta E_{\rm int} = -\Delta U$. اتلاف انرژی پتانسیل اولیهٔ سیستم، موجب افزایش انرژی داخلی آن می‌شود. از این تحلیل نمی‌توانیم تغییرات انرژی داخلی جسم و میز را، به‌طور جداگانه به‌دست بیاوریم؛ فقط می‌توانیم کل تغییرانرژی داخلی سیستم را محاسبه کنیم.

نیروی اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستارِ اتلافی است. در یک سیستم مکانیکی بسته، از نوعی که در اینجا توصیف شد، نیروی اصطکاک باعث می‌شود که انرژی مکانیکی به انرژی داخلی تبدیل شود. در اینجا انرژی مکانیکی پایسته نیست، و اتلاف انرژی مکانیکی با همان مقدار افزایش انرژی داخلی جبران می‌شود. (همهٔ نیروهای ناپایستار هم تلف‌کننده نیستند، بعضی از نیروهای ناپایستار، مثلاً نیروی مغناطیسی، می‌توانند انرژی مکانیکی سیستم را افزایش بدهند. حتی نیروی اصطکاک هم، تحت شرایطی، می‌تواند باعث افزایش انرژی مکانیکی سیستم شود. آیا می‌توانید برای این مورد اخیر مثالی بزنید؟)

توجه کنید که در مثالهای بالا انرژی پتانسیل ماکروسکوپیک فنر را به شکل یک جملهٔ مجزا نوشته‌ایم. می‌توانستیم انرژی ذخیره شده در فنر را هم جزء انرژی داخلی سیستم به‌حساب بیاوریم، اما برای سادگی ترجیح داده‌ایم که جملات ماکروسکوپیک را که به‌راحتی می‌شود منشأ آنها را پیدا کرد، جداکنیم؛ به این ترتیب، $E_{\rm int}$ شامل بقیهٔ جملات میکروسکوپیک است، که در U گنجانده نشده‌اند؛ یعنی بازآرایی مولکولهای فنر در U گنجانده شده است، ولی بازآرایی مولکولهای جسم و میز در $E_{\rm int}$ گنجانده شده است. این تقسیم‌بندی کم‌وبیش دلبخواه، تنها برای ساده کردن توصیف این سیستم خاص است.

معادلهٔ ۲۸، نخستین گام درگذار از قانون پایستگی انرژی مکانیکی به قانون کلی پایستگی انرژی است. این قانون، به زبان غیر ریاضی می‌گوید که

> در یک سیستم بسته، انرژی می‌تواند از شکلی به شکلی دیگر تبدیل شود، اما نمی‌تواند خلق شود یا از بین برود؛ کل انرژی سیستم ثابت می‌ماند.

منظور از "بسته بودن" سیستم آن است که هیچ کار خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، روی سیستم انجام نمی‌شود. این بیانِ پایستگی انرژی، تعمیمی از تجربه است، و تا کنون هیچ آزمایش یا مشاهده‌ای آن‌را نقض نکرده است.

در تاریخ فیزیک، گاهگاهی به‌نظر آمده است که این قانون نقض می‌شود، اما این نقض ظاهری موجب شده است به دنبال شکل جدیدی از انرژی بگردیم تا با گنجاندن آن در قانون کلی‌تری از پایستگی انرژی بتوانیم مشاهده را توضیح بدهیم. مثلاً در دههٔ ۱۹۲۰ بررسیهای تجربی زیادی دربارهٔ واپاشی بتایی هسته‌ها انجام شد؛ دراین نوع واپاشی پرتوزا، هستهٔ اتم الکترون می‌گسیلد، براساس انرژی‌هسته، پیش از واپاشی و پس از آن، انتظار می‌رود که الکترون گسیل شده انرژی معینی داشته باشد. تجربه نشان می‌دهد که انرژی الکترون کمتر از این مقدار است. پیشنهادهای زیادی برای توجیه این انرژی "گمشده" مطرح شد. یکی از پیشنهادها این بود که الکترون، پس از خروج از هسته به الکترونهای عادی اتم برمی‌خورد وبخشی از انرژی‌اش را، در این برخوردها از دست می‌دهد. اگر چنین چیزی درست می‌بود، می‌بایست طی این فرایند انرژی داخلی سیستم شامل الکترونهای گسیلیده و اتمهای واپاشیده زیاد می‌شد، و این افزایش انرژی داخلی می‌بایست به شکل افزایش دمای نمونهٔ پرتوزا ظاهر می‌شد. اما آزمایشهای دقیقی که در این مورد انجام شد، چنین افزایشی را نشان نداد، و این فرضیه رد شد. در سال ۱۹۳۰ ولفگانگ پاؤلی، فیزیکدان سوئیسی، فرضیهٔ درست را ارائه کرد. پاؤلی اظهارکرد که درواپاشی بتایی، علاوه بر الکترون، ذرهٔ دیگری هم گسیل می‌شود که حامل انرژی "گمشده" است. معلوم شد که این ذره، که آن‌را نوترینو نامیده‌اند، بسیار غریب است. فرضیهٔ پاؤلی به سرعت، با روشهای غیرمستقیم، تأیید شد. اما ۲۵ سال طول کشید تا نوترینو مستقیماً مشاهده شود. این پیش‌بینی وجود نوترینو، که براساس اطمینان به پایستگی انرژی بود، نقش مهمی در پیشرفت فیزیک ذرات بنیادی در دهه‌های بعدی داشت. نوترینو یکی از اساسی‌ترین ذرات بنیادی است که با بررسی خواص و برهمکنشهای آن با ذرات دیگر، درک بیشتر و بهتری از ساختار درونی ماده فراهم آمده است.

مثال ۶. توپ بیسبالی به جرم $m = ۰٫۱۴۳\,{\rm kg}$ از بالای برج سیرز به ارتفاع h برابر با ۴۴۳m (یعنی ۱۴۵۰ft) رها می‌شود، و به سرعت حدی $v = ۴۲\,{\rm m/s}$ می‌رسد (بخش ۶ـ۷). تغییر انرژی داخلی توپ و هوای اطراف آن، هنگامی که توپ به زمین رسیده است، چقدر است؟

حل: سیستم را شامل توپ بیسبال، هوای اطراف آن، و زمین می‌گیریم. هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود؛ جاذبهٔ گرانش زمین بر توپ و نیروی اصطکاک هوا برتوپ، هر دو نیروهای داخلی این سیستم‌اند. تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_{\rm f} - U_{\rm i} = ۰ - mgh \\ &= -(۰٫۱۴۳\,{\rm kg})(۹٫۸۰\,{\rm m/s^۲})(۴۴۳\,{\rm m}) = -۶۲۱\,{\rm J}\end{aligned}$$

تغییر انرژی جنبشی، طی سقوط توپ، برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_{\rm f} - K_{\rm i} = \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰ \\ &= \frac{۱}{۲}(۰٫۱۴۳\,{\rm kg})(۴۲\,{\rm m/s})^۲ = ۱۲۶\,{\rm J}\end{aligned}$$

(از حرکت زمین در اثر جاذبهٔ گرانشی توپ چشم پوشیده‌ایم.) طبق معادلهٔ ۲۸، پایستگی انرژی را می‌توان چنین نوشت، $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\rm int} = ۰$ ، زیرا کار خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود. از این رابطه معلوم می‌شود که

$$\Delta E_{\rm int} = -\Delta U - \Delta K = -(-۶۲۱\,{\rm J}) - ۱۲۶\,{\rm J} = ۴۹۵\,{\rm J}$$

این افزایش انرژی داخلی، می‌تواند به‌صورت افزایش دمای توپ و هوای اطراف آن، یا شاید به‌صورت انرژی جنبشی هوای واقع‌شده در مسیر توپ افتان، ظاهر شود. تنها با معادلهٔ ۲۸ نمی‌شود گفت که انرژی به کدام‌یک از این شکلها در می‌آید. برای این کار، باید توپ یا هوا را جدا کنیم و به عنوان سیستم در نظر بگیریم و کاری را که نیروهای خارجی روی این سیستم انجام می‌دهد حساب کنیم. به‌علاوه باید نیروی اصطکاک بین توپ و هوا، و همچنین جزئیات حرکت توپ را بدانیم؛ خلاصه، اوضاع پیچیده‌تر از آن می‌شود که اینجا به آن بپردازیم.

در این مسئله فرض کردیم که افزایش انرژی داخلی، در سیستمی که تعریف کردیم باقی می‌ماند. در عمل، اختلاف دمای توپ یا هوا با محیط اطرافشان منجر به نوع دیگری از انتقال انرژی می‌شود که آن‌را گرما می‌نامند (گرما را در فصل ۲۵ مطالعه خواهیم کرد.)

مثال ۷. جسمی به جرم ۴٫۵kg، با سرعت اولیهٔ $v = ۵٫۰\,\mathrm{m/s}$ روی سطح شیبداری با زاویهٔ °۳۰ به طرف بالای سطح پرتاب می‌شود. مشاهده می‌شود که جسم سرعتش به‌تدریج کم می‌شود و پس از پیمودن مسافت $d = ۱٫۵\,\mathrm{m}$ روی سطح شیبدار به حالت سکون (لحظه‌ای) می‌رسد. (الف) این جسم، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست می‌دهد؟ (ب) جسم، از حالت سکون، دوباره شروع به حرکت می‌کند و به پایین سطح شیبدار برمی‌گردد. با فرض اینکه اتلاف انرژی مکانیکی در اثر اصطکاک در این مرحله هم به اندازهٔ مرحلهٔ قبلی باشد، جسم با چه سرعتی به نقطهٔ آغاز حرکت برمی‌گردد؟

حل: (الف) اینجا هم، مثل مثال ۶، از تغییرات انرژی زمین چشم می‌پوشیم و فقط تغییر انرژی جنبشی جسم را در نظر می‌گیریم. تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = mgh - ۰\\ &= (۴٫۵\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})(۱٫۵\mathrm{m})(\sin ۳۰^\circ) = ۳۳\mathrm{J}\end{aligned}$$

تغییر انرژی جنبشی، از پایین سطح شیبدار تا بالای آن، برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_f - K_i = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲\\ &= -\frac{۱}{۲}(۴٫۵\mathrm{kg})(۵٫۰\mathrm{m/s})^۲ = -۵۶\mathrm{J}\end{aligned}$$

تغییر انرژی مکانیکی برابراست با

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = ۳۳\mathrm{J} - ۵۶\mathrm{J} = -۲۳\mathrm{J}$$

توجه کنید که، طبق معادلهٔ ۲۸، این اتلاف انرژی مکانیکی را می‌شود به‌صورت $-\Delta E_{\mathrm{int}} + W_f$ نوشت. در اینجا ΔE_{int} کمیتی مثبت است که افزایش انرژی داخلی جسم را (نه جسم + سطح‌شیبدار) را نشان می‌دهد؛ W_f کار خارجی (منفی)ای است که نیروی اصطکاکِ سطح شیبدار روی جسم انجام می‌دهد. بدون داشتن اطلاعات اضافی نمی‌شود این دو کمیت را جداگانه حساب کرد.

(ب) $\Delta K'$ را تغییر انرژی جنبشی، از شروع حرکت جسم از پایین سطح شیبدار تا بازگشت جسم به همان نقطه، می‌گیریم، تغییر انرژی پتانسیل در این مسیر، یعنی $\Delta U'$، صفر است. از معادلهٔ ۲۸ نتیجه می‌شود

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_{\mathrm{int}} + W'_f)$$

مقدار کمیت درون پرانتز برابر با $-۴۶\mathrm{J} = ۲(-۲۳\mathrm{J})$ است، زیرا فرض بر این است که اتلاف انرژی مکانیکی در برگشت، برابر با اتلاف انرژی مکانیکی در رفت است. پس، $\Delta K' = K_f - K_i = -۴۶\mathrm{J}$، و انرژی جنبشی در پایین سطح شیبدار برابر است با

$$K_f = ۵۶\mathrm{J} - ۴۶\mathrm{J} = ۱۰\mathrm{J}$$

سرعت جسم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$v_f = \sqrt{\frac{۲K_f}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۰\mathrm{J})}{۴٫۵\mathrm{kg}}} = ۲٫۱\mathrm{m/s}$$

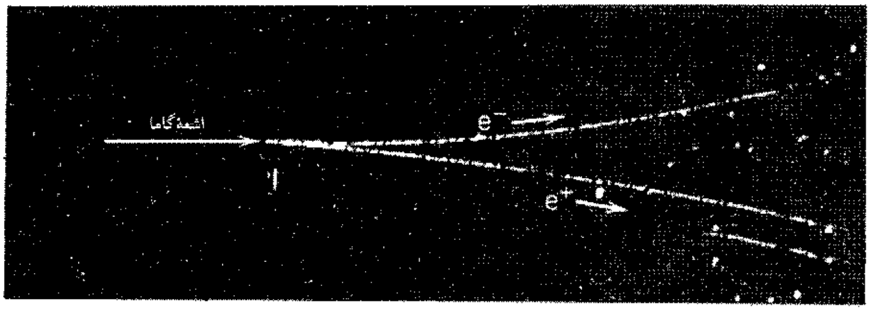
اساس میکروسکوپیک انرژی داخلی (اختیاری)

جسمی را، که می‌تواند جسم مثال قبل در حرکت بر سطح شیبدار یا توپ مثال ۶ باشد، در نظر بگیرید. قضیهٔ کار_انرژی را برای یک ذرهٔ خاص (مثلاً یک اتم) در این سیستم مرکب می‌توانیم به شکل $\Delta K_i = W_i$ بنویسیم؛ که شاخص i یکی از N ذرهٔ تشکیل‌دهندهٔ جسم را مشخص می‌کند. W_i به‌معنی کل کار حاصل از همهٔ نیروهای وارد بر این ذره است. می‌شود قضیهٔ کار_انرژی را جداگانه برای هر ذره نوشت و N معادلهٔ حاصل را با هم جمع کرد. نتیجه خواهد شد

$$\Sigma \Delta K_i = \Sigma W_i \qquad (۳۲)$$

که در آن، شاخص i از ۱ تا N تغییر می‌کند. در طرف راست معادلهٔ ۳۲، کل کار انجام شده بر جسم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: $\Sigma W_i = W_{\mathrm{int}} + W_{\mathrm{ext}}$. جملهٔ W_{int} شامل کار نیروهایی است که اتمها یا مولکولهای جسم بر یکدیگر وارد می‌کنند، و جملهٔ W_{ext} شامل کار همهٔ نیروهای خارجی است. در طرف چپ معادلهٔ ۳۲ هم، کل انرژی جنبشی را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: یکی K، که نشاندهندهٔ حرکت انتقالی کل جسم است، دیگری K_{int} که نمایندهٔ مجموع حرکتهای کتره‌ای داخلی اتمها و مولکولهای جسم است. (چگونگی این تقسیم را در فصل ۹، در بررسی حرکت مرکز جرم، توضیح می‌دهیم؛ فعلاً فقط فرض می‌کنیم که چنین تقسیمی ممکن است.) پس می‌توانیم معادلهٔ ۳۲ را چنین بنویسیم

$$\Delta K + \Delta K_{\mathrm{int}} = W_{\mathrm{int}} + W_{\mathrm{ext}} \qquad (۳۳)$$



شکل۱۵. انرژی تابش گاما به یک پوزیترون و یک الکترون تبدیل شده است. این دو ذره در اتاقک حبابی که در آن تولید شده‌اند ردهای مرئی از خودشان به‌جا می‌گذارند. ردها خمیده‌اند زیرا یک میدان مغناطیسی قوی در اتاقک نیرویی تولید می‌کند که همواره بر سرعت ذرات عمود است، اما جهت آن درمورد الکترون و پوزیترون (که بار مخالف دارند) در دو جهت مخالف یکدیگر است.

فرض برآن است که در سطح میکروسکوپیک همهٔ نیروها پایستارند؛ بنابراین، به‌جای کل کار داخلی می‌توانیم انرژی پتانسیل کل بین اتمی یا بین مولکولی را بگذاریم: $W_{\rm int} = -\Delta U - \Delta U_{\rm int}$. این را می‌شد $-\Delta U_{\rm int}$ نوشت، اما راحت‌تر است که بعضی از انرژیهای پتانسیل میکروسکوپیک را که محاسبه‌شان ساده است، مثلاً انرژی پتانسیل فنر را، در جملهٔ U بگنجانیم. با این جایگذاری، و با جابه‌جا کردن جملات، نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{\rm int} + \Delta K_{\rm int}) = W_{\rm ext} \qquad (۳۴)$$

با جایگذاری $\Delta E_{\rm int} = \Delta U_{\rm int} + \Delta K_{\rm int}$، معادلهٔ ۲۸ به‌دست می‌آید. بنابراین، جملهٔ انرژی مستقیماً از اعمال قضیهٔ کار-انرژی، در شکل میکروسکوپیک، بر اجسام، به‌دست می‌آید.

۸ـ۷ جرم و انرژی[1] (اختیاری)

یکی از انواع معمولی پرتوزایی، که در آزمایشگاه به آسانی مشاهده می‌شود، گسیل پوزیترون است؛ در این فرایند، هستهٔ اتم یک پوزیترون گسیل می‌کند؛ پوزیترون ذره‌ای با همان جرم الکترون است ولی بار الکتریکی مخالف (مثبت) دارد. هنگامی که پوزیترون به الکترونهای مادهٔ معمولی برخورد می‌کند، فرایندی به نام نابودی الکترون-پوزیترون مشاهده می‌شود. در این فرایند، الکترون و پوزیترون هر دو ناپدید می‌شوند و به جایشان فقط تابش الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود. این فرایند را می‌توانیم چنین نمایش بدهیم

$e^+ + e^- \rightarrow$ تابش الکترومغناطیسی

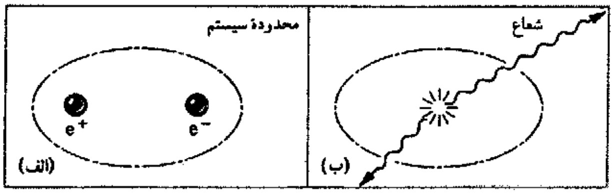
که در آن e^+ و e^-، به‌ترتیب، نشانهٔ پوزیترون و الکترون‌اند. شکل ۱۵ فرایند معکوس این فرایند را نشان می‌دهد، که در آن تابش گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ این فرایند را تولید زوج می‌نامند.

سیستمی (مانند شکل ۱۶الف)، را که شامل یک پوزیترون و یک الکترون است در نظر بگیرید؛ فرض کنید انرژیهای جنبشی این دو ذره بسیار کوچک و فاصلهٔ دو ذره آنقدر زیاد است که انرژی پتانسیل سیستم هم (که ناشی از نیروی الکترواستاتیکی میان ذرات است) قابل چشمپوشی است. سرانجام، پوزیترون و الکترون به‌هم می‌رسند و نابود می‌شوند و تابش حاصل، از مرزهای سیستم خارج می‌شود (شکل ۱۶ب). با اندازه‌گیریهای مناسب در محیط، می‌توانیم انرژی تابش خارج شده از سیستم را تعیین کنیم؛ نتیجه می‌شود که در هر رویداد نابودی، تابش به اندازهٔ ۱٫۰۲۲MeV انرژی از سیستم خارج می‌کند. هنگامی که اتمهای محیط این تابش را جذب می‌کنند، نیروهای الکترومغناطیسی وابسته به تابش ۱٫۰۲۲MeV کار روی محیط انجام می‌دهند. معادلهٔ ۲۸ نشاندهندهٔ کاری است که محیط روی سیستم انجام می‌دهد، پس در این مورد محیط کار منفی، به مقدار ۱٫۰۲۲MeV−، روی سیستم انجام داده است.

اگر معادلهٔ ۲۸ را برای این سیستم به‌کار ببریم، می‌بینیم که پایستگی انرژی ظاهراً نقض می‌شود؛ طرف راست معادله برابر است با مقداری منفی، W، اما تغییر انرژی در طرف چپ، که برای برقرار بودن تساوی لازم است، مشهود نیست. می‌شود مثلاً فرض کرد که انرژی داخلی سیستم به اندازهٔ W کاهش پیدا کرده است، اما به هیچ‌وجه معلوم نیست که چه نوع انرژی داخلی‌ای در سیستم اولیه بوده که حالا در سیستم نهایی نیست.

حل این معما را می‌شود در معادلهٔ معروف آلبرت اینشتین، که جرم و انرژی را به هم مربوط می‌کند، پیدا کرد. اینشتین این معادله را در سال ۱۹۰۵، یعنی مدتها پیش از انجام آزمایشهایی از نوع نابودی الکترون-پوزیترون، پیشنهاد کرد

$$E_0 = mc^2 \qquad (۳۵)$$



شکل۱۶. (الف) سیستمی شامل یک پوزیترون e^+ و یک الکترون e^-. (ب) پس از نابودی پوزیترون و الکترون، تابش حاصل، از مرز سیستم خارج می‌شود.

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱، به‌تعویق انداخت.

که در آن c سرعت نور است.[1] این معادله می‌گوید که جرم شکلی از انرژی است، و ذره‌ای به جرم m، انرژی سکون E_0 دارد که مقدار آن mc^2 است. این انرژی سکون را می‌توانیم انرژی داخلی اجسام ساکن تلقی کنیم. پس الکترون و پوزیترون، صرفاً به‌خاطر جرمشان، انرژی داخلی دارند. انرژی داخلی هر یک از این دو ذره را می‌توانیم به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9.11\times 10^{-31}\,\text{kg})(3.00\times 10^{8}\,\text{m/s})^2}{1.60\times 10^{-13}\,\text{J/MeV}}$$

$$= 0.511\,\text{MeV}$$

بنابراین، کل انرژی داخلی (انرژی سکون) این دو ذره $2(0.511\,\text{MeV}) = 1.022\,\text{MeV}$، و تغییر انرژی سکون این سیستم برابر با $-1.022\,\text{MeV}$ است. کار منفی انجام شده روی سیستم شکل ۱۶، معادل است با مقدار کاهشی که در انرژی سکون سیستم پدید می‌آید. اگر انرژی سکون ذرات را هم به درستی در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که انرژی پایسته است.

از معادلهٔ ۳۵، ضمناً نتیجه می‌شود که هرگاه به جسم مادی ساکنی، به اندازهٔ ΔE انرژی بیفزاییم، جرم آن‌را به اندازهٔ $\Delta m = \Delta E/c^2$ زیاد کرده‌ایم. اگر فنری را فشرده کنیم و انرژی پتانسیل آن‌را به اندازهٔ ΔU زیاد کنیم، جرم آن به اندازهٔ $\Delta U/c^2$ زیاد می‌شود. اگر دمای جسمی را زیاد کنیم، تا انرژی داخلی آن به اندازهٔ ΔE_{int} زیاد شود، جرم جسم را به اندازهٔ $\Delta E_{\text{int}}/c^2$ زیاد کرده‌ایم. این تغییر جرمها، بسیار کوچک‌اند، و در مورد اجسام عادی، معمولاً خارج از توانایی ما برای سنجش جرم‌اند (زیرا c^2 عددی بسیار بزرگ است)؛ اما در واپاشیها و واکنشهای ذرات هسته‌ای و زیرهسته‌ای، تغییر نسبی جرم ممکن است به قدر کافی بزرگ و قابل سنجش باشد.

به‌این ترتیب، تغییر انرژی پتانسیل U و انرژی داخلی E_{int} سیستم در داخل مرزهای شکل ۱۳ را می‌شود به تغییر انرژی سکون E_0 سیستم مربوط کرد. در این صورت، معادلهٔ ۲۸ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E_0 + \Delta K = W \qquad (36)$$

در اینجا W انرژی‌ای است (که به شکل کار) بین سیستم و محیط مبادله می‌شود. توجه کنید که طرف چپ معادلهٔ ۳۶ فقط دو جمله دارد: انرژی سکون (شامل همهٔ انواع انرژی سیستمهای ساکن) و انرژی حرکتی (جنبشی). در مورد نابودی الکترون-پوزیترون (با $\Delta K = 0$)، معادلهٔ ۳۶ مستقیماً نشان می‌دهد که کار خارجی (منفی) مربوط به تابش، ناشی از کاهش انرژی سکون سیستم اولیه است.

حالا سیستم را در زمانی در نظر بگیرید که تابش گسیل شده است، اما هنوز محیط آن‌را جذب نکرده است؛ در این حالت، از معادلهٔ ۳۵ نتیجهٔ دیگری هم به‌دست می‌آید. برای اینکه انرژی در این زمان میانی هم پایسته بماند، باید به تابش جرمی برابر با $\Delta m = \Delta E_0/c^2$ نسبت داد. پس معادلهٔ ۳۵ می‌گوید که انرژی جرم دارد.

پس نتیجه می‌شود که پایستگی انرژی با پایستگی جرم هم‌ارز است. چنانکه اینشتین نوشت: "در فیزیک پیش نسبیتی دو قانون پایستگی داریم که اهمیت بنیادی دارند؛ یکی قانون پایستگی انرژی و دیگری قانون پایستگی جرم، که در آنجا کاملاً مستقل از هم ظاهر شوند. نظریهٔ نسبیت این دو را درهم می‌برد و به یک اصل تبدیل می‌کند."

معادلهٔ ۳۶ را می‌توانیم برای سیستمهای بستهٔ دیگری هم که شامل ذرات و تابش باشند به‌کار ببریم. مثلاً خورشید را، به عنوان سیستم در نظر بگیرید. خورشید هر ثانیه $4\times 10^{26}\,\text{J}$ انرژی تابش می‌کند. در اینجا هم، مثل مورد نابودی الکترون-پوزیترون، این انرژی تابشی را به کاهش انرژی سکون سیستم نسبت می‌دهیم؛ تغییر جرم متناظر با این تغییر انرژی سکون در هر ثانیه برابر است با [1]

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4\times 10^{26}\,\text{J}}{(3\times 10^{8}\,\text{m/s})^2} = -4\times 10^{9}\,\text{kg}$$

این کاهش جرم، با استانداردهای معمولی، کاملاً قابل‌ملاحظه است اما در مقایسه با کل جرم خورشید ($2\times 10^{30}\,\text{kg}$) بسیار کوچک است. در هر سال، جرم خورشید فقط به اندازهٔ 6×10^{-14} برابر جرم کل آن کم می‌شود.

سیستم را ابرنواختر ۱۹۸۷ (شکل ۱۷) می‌گیریم و مرز را دور آن می‌کشیم. در ۴۰۰ سال گذشته، این اولین ابرنواختری است که با چشم غیرمسلح مشاهده شده است.[2] ابرنواختر ستاره‌ای است که ذخیرهٔ سوخت گرماهسته‌ای‌اش را تمام کرده است و دارد به طرز چشمگیری منفجر می‌شود. گفته می‌شود که ابرنواختر ۱۹۸۷، طی زمانی در حدود ۱۰ ثانیه، در حدود ۱۰٪ انرژی سکون خودش را، که تقریباً معادل دو برابر جرم خورشید است، به تابش و دیگرانواع انرژی تبدیل کرده است. تغییر انرژی سکون متناظر با دو برابر جرم خورشید، می‌شود

$$\Delta E_0 = \Delta m c^2 = -2(2\times 10^{30}\,\text{kg})(3\times 10^{8}\,\text{m/s})^2$$

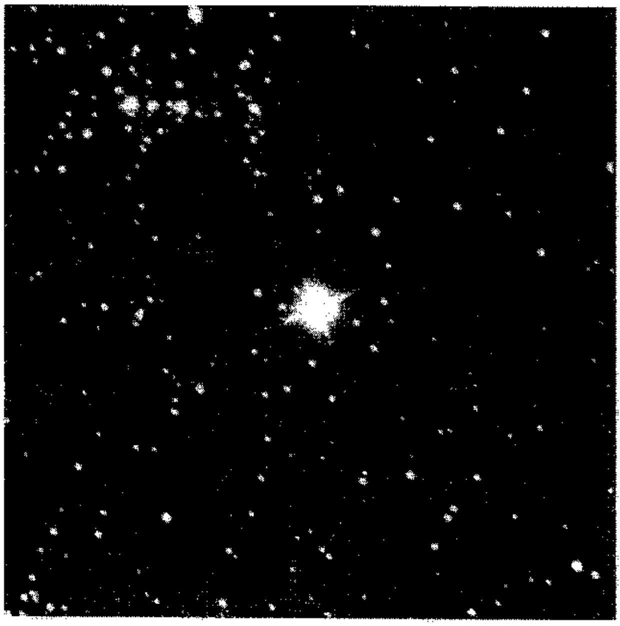
$$= -4\times 10^{47}\,\text{J}$$

انرژی تابش شده در این ۱۰ ثانیه، متناظر با توان $4\times 10^{46}\,\text{W}$ تقریباً برابر است با انرژی تابشی حاصل از کل ستاره‌های دیگر و کهکشانهایی که در جهان مرئی می‌بینیم!

---

۱. اگرچه فیزیکدانها نتایج محاسبات نسبیتی را می‌پذیرند، اما تعبیری از معادلهٔ ۳۵ که مورد قبول همه باشد وجود ندارد. رجوع کنید به
"The Concept of Mass," Lev B. Okun, *Physics Today*, June 1989, p. 31.

۲. نگاه کنید به
"The Great Supernova of 1987", Stan Woosley and Tom Weaver, *Scientific American*, August 1989, p. 32.



شکل ۱۷. ابرنواختر ۱۹۸۷. نور این ستاره (در مرکز عکس) کاملاً نور ستاره‌های دیگر را تحت‌الشعاع قرار داده است.

مثال ۸. دو گلولهٔ گلی، هر یک به جرم ۳۵g را به طرف هم پرتاب می‌کنیم. سرعت هرگلوله ۱٫۷m/s است. گلوله‌ها رودررو با هم برخورد می‌کنند و به هم می‌چسبند. جرم گلولهٔ حاصل چقدر با مجموع جرم دو گلولهٔ اولیه فرق دارد؟

حل: دو گلوله را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم و معادلهٔ ۳۶ را به‌کار می‌بریم. انرژی جنبشی این سیستم تغییر کرده است (و مقدار این تغییر منفی است): انرژی جنبشی پس از برخورد صفر است و پیش از برخورد K_i، که برابر با مجموع انرژی جنبشی گلوله‌هاست. کار خارجی هم وجود ندارد، پس

$$\Delta K + \Delta E_\circ = (\circ - K_i) + \Delta E_\circ = \circ$$

یا

$$\Delta E_\circ = K_i = ۲\left(\frac{۱}{۲}mv^۲\right) = (\circ٫\circ۳۵\text{kg})(۱٫۷\text{m/s})^۲ = \circ٫۱\circ۱\text{J}$$

این افزایش انرژی سکون می‌تواند به شکل انرژی داخلی باشد، و مثلاً موجب افزایش دمای سیستم مرکب شود. افزایش جرم متناظر با این افزایش انرژی برابر است با

$$\Delta m = \frac{\Delta E_\circ}{c^۲} = \frac{\circ٫۱\circ۱\text{J}}{(۳٫\circ\circ \times ۱\circ^۸\text{m/s})^۲} = ۱٫۱ \times ۱\circ^{-۱۸}\text{kg}$$

چنین افزایش ناچیزی در جرم، کاملاً خارج از محدودهٔ توانایی ما در اندازه‌گیری است.

مثال ۹. در آزمایشی که در سال ۱۹۸۹ در شتابدهندهٔ خطی استانفورد انجام شد، ذرات Z° از برخورد سربه‌سر (باریکه‌ای از) الکترون (و باریکه‌ای از) پوزیترون که انرژی جنبشی یکسان داشتند، تولید شد. انرژی جنبشی این دو پرتو حداقل باید چقدر باشد تا ذرهٔ Z°، که انرژی سکون آن ۹۱٫۲GeV است، تولید شود (۱GeV = ۱۰^۹eV)؟

حل: در اینجا هم، مثل مورد مثال ۸، فرض کنید که هیچ کار خارجی (یعنی تابشی) در فرایند قبل از برخورد یا پس از برخورد در میان نیست. تغییر انرژی سکون از حالت اولیه (یک الکترون و یک پوزیترون، هر یک با انرژی سکون ۰٫۵۱۱MeV) تا حالت نهایی (Z°) برابر است با

$$\Delta E_\circ = ۹۱٫۲\text{GeV} - ۲(\circ٫۵۱۱\text{MeV}) = ۹۱٫۲\text{GeV}$$

می‌بینیم که در اینجا کل انرژی سکون الکترون و پوزیترون (۱٫۰۲۲MeV = ۰٫۰۰۱۰۲۲GeV) کاملاً قابل چشم‌پوشی است. از معادلهٔ ۳۶ نتیجه می‌شود که

$$\Delta K = -\Delta E_\circ = -۹۱٫۲\text{GeV} = K_f - K_i$$

اگر فرض کنیم Z° در حالت سکون تولید می‌شود، $K_f = \circ$ است و بنابراین انرژی الکترون و پوزیترون باید هر یک ۴۵٫۶GeV = (۹۱٫۲GeV)(۰٫۵) باشد. در این مثال، برخلاف مثال قبل، تغییر نسبی انرژی سکون (یا جرم) سیستم کاملاً چشمگیر است: جرم نهایی در حدود ۱۰۰۰۰۰ برابر جرم اولیه است.[۱]

۸ـ۸ کوانتش انرژی (اختیاری)

در بخش قبل دیدیم که چگونه پایستگی انرژی با نسبیت سازگار است: براساس نسبیت باید مفهوم انرژی را گسترش داد و انرژی سکون سیستم را هم وارد آن کرد تا پایستگی انرژی پا بر جا بماند. در اینجا پایستگی انرژی را در حالت حدی دیگری بررسی می‌کنیم: در حد کوانتومی سیستمهایی که در مقیاس اتمی یا هسته‌ای‌اند.

اگر به سیستم جسم‌ـفنر مقداری انرژی اولیه بدهیم و آن‌را رها کنیم، سیستم به جلو و عقب نوسان خواهد کرد. اگر اصطکاک هم در کار باشد، حرکت به‌تدریج میرا می‌شود. افت انرژی سیستم در اثر کار خارجی نیروی اصطکاک، هموار و پیوسته به‌نظر می‌رسد.

اما حالا نوسانگری متشکل از یک مولکول دو اتمی را در نظر بگیرید: دو اتم که با یک نیروی فنروار به هم جفت شده‌اند. اگر به این

۱. نگاه کنید به
"The Stanford Linear Collider," John R. Rees, *Scientific American*, October 1989, p. 58.

سیستم انرژی بدهیم و بگذاریم که نوسان کند، خواهیم دید که تابش گسیل خواهد کرد و سرانجام، تا آنجا که بتواند، انرژی تلف خواهد کرد.
اما این نوسانگر اتمی فرق مهمی با سیستم جسم‌ـفنر دارد: در مقیاس اتمی، تغییرات حرکت پیوسته نیست، بلکه به شکل پرشهای گسسته است. پایستگی انرژی، در این مقیاس میکروسکوپیک هم وجود دارد. اختلاف انرژی حالت اولیه و حالت نهایی برابر است با انرژی ΔE که تابش با خود می‌برد، یعنی

$$|\Delta E| = E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{f}} \qquad (۳۷)$$

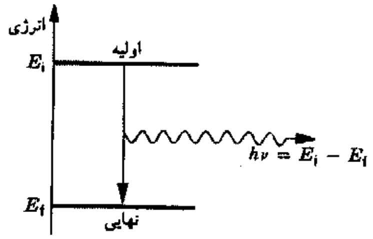
توجه کنید که اگر سیستم انرژی از دست بدهد، $E_{\mathrm{i}} > E_{\mathrm{f}}$ است.
گسیل تابش در مقیاس اتمی گسسته است: فقط تغییر انرژیهای معینی هستند که مجازند، برخلاف موارد کلاسیک که در آنها می‌توانیم تغییرانرژی را متغیری پیوسته در نظر بگیریم. چنانکه در فصل ۴۹ خواهیم دید، تغییر انرژیهای مجاز یک نوسانگر، با فرکانس ν آن چنین رابطه‌ای دارند

$$E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{f}} = h\nu \qquad (۳۸)$$

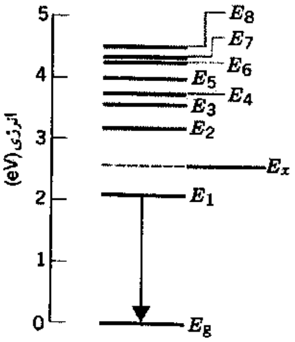
که در آن، h ثابتی به نام ثابت پلانک است، به مقدار

$$h = ۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J\cdot s}$$
$$= ۴٫۱۴ \times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{eV\cdot s}$$

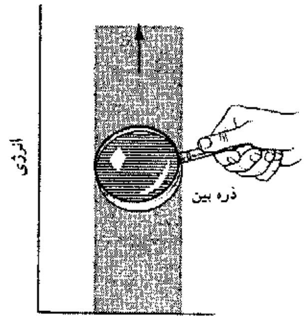
شکل ۱۸ نمایشی است از فرایندی که در آن سیستمی (مثلاً یک اتم یا هسته) از انرژی اولیهٔ E_{i} به انرژی نهایی E_{f} می‌برد، و تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد. این بستهٔ گسستهٔ انرژی را کوانتوم انرژی می‌نامند. و می‌گویند که حالتهای انرژی کوانتیده‌اند، یعنی مقادیر گسستهٔ معینی دارند.
شکل ۱۹ مثالی از چند حالت کوانتیدهٔ انرژی اتم سدیم را نشان می‌دهد. اتم می‌تواند در هر یک از این حالتهای انرژی باشد، اما نمی‌تواند در حالتی میان این مقادیر باشد. چنین ساختاری موجب می‌شود که گسیل تابش از اتمها گسسته باشد؛ مثلاً، هنگامی که اتم سدیم از حالت انرژی $E_۱$ (نخستین حالت برانگیخته) به حالت E_{g} (حالت پایه) می‌جهد، نور زردی گسیل می‌کند که



شکل۱۸. سیستمی از حالت اولیه‌اش تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد و به حالت نهایی می‌رود.



شکل۱۹. چند تراز انرژی اتم سدیم، متناظر با حالتهای کوانتومی مختلفی که اتم می‌تواند در آنها باشد. پایین‌ترین حالت، E_{g}، را حالت پایه می‌نامند. هنگامی که اتم از حالت انرژی $E_۱$ به حالت پایه می‌رود (پیکان در شکل) نور زرد مشخصهٔ سدیم را گسیل می‌کند. اتم فقط می‌تواند در حالتهایی که مشخص شده است باشد؛ یعنی انرژی آن مثلاًنمی‌تواند E_x، بین $E_۱$ و $E_۲$ باشد.



شکل۲۰. ترازهای انرژی یک آونگ هم کوانتیده‌اند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که با هیچ دقتی نمی‌شود از هم متمایزشان کرد. هیچ "ذره‌بینی" نمی‌تواند ساختار کوانتیدهٔ یک آونگ را آشکارکند.

مشخصهٔ سدیم است (همان نوری که در لامپهای بخار سدیم دیده می‌شود).
شکل ۲۰ ساختار "کوانتیدهٔ" یک نوسانگر کلاسیک، مثلاً یک آونگ، را نشان می‌دهد، حالتها ممکن است گسسته باشند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که پرش بین آنها را می‌توان فرایندی پیوسته در نظر گرفت. فرض کنید فرکانس آونگ یک دور بر ثانیه باشد ($\nu = ۱/\mathrm{s}$). طبق معادلهٔ ۳۸، مقدار "کوانتوم انرژی" برابر است با

$$h\nu = (۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J\cdot s})(۱\mathrm{s}^{-۱}) = ۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{J}$$

این کمیتِ ناچیز فوق‌العاده کوچکتر از قدرت تفکیک ما در سنجش انرژی اجسام ماکروسکوپیک، مثل آونگ، است؛ بنابراین، ساختارِ گسسته مشاهده‌پذیر نیست. مثلاً درآونگ، این تغییرانرژی متناظر است با تغییر دامنهٔ نوسان به مقداری از مرتبهٔ $۱۰^{-۳۲}\mathrm{m}$، یا در حدود $۱/۱۰^{۲۲}$ برابر قطر اتم! پس می‌توانیم از رفتار کوانتومی اجسام عادی چشم بپوشیم، بی‌آنکه خطایی کرده باشیم.
پایستگی انرژی در مقیاس میکروسکوپیک را می‌توانیم با

مشاهدهٔ تابشی که از اتمها یا هسته‌ها، هنگام پرش از ترازی به تراز دیگر، گسیل می‌شود بیازماییم؛ چه در فرایند گسیل تابش (مثل شکل ۱۸) و چه در فرایند معکوس، که در آن اتمی که در حالت پایه (پایین‌ترین تراز انرژی) است یک کوانتوم تابش جذب می‌کند و به تراز بالاتری می‌جهد. آزمایشهایی از این نوع را، که شامل گسیل و جذب‌اند، می‌شود با دقتی فوق‌العاده انجام داد، دقتی از مرتبهٔ ۱ قسمت در 10^{15} از اختلاف انرژی بین حالتها. هر آزمایشی از این نوع با پایستگی انرژی در این مقیاس میکروسکوپیک سازگار بوده است.

پرسشها

۱. آسانسوری از طبقه بالای ساختمانی پایین می‌آید و متوقف می‌شود. انرژی پتانسیل آن چه می‌شود؟

۲. جاده‌های کوهستانی به‌ندرت مستقیماً بالا می‌روند، بلکه می‌پیچند و به تدریج بالا می‌روند. چرا؟

۳. بالشتکهای هوا احتمال صدمات ناشی از تصادف اتومبیل را به مقدار زیادی کم می‌کنند. برحسب انتقال انرژی توضیح بدهید که چرا.

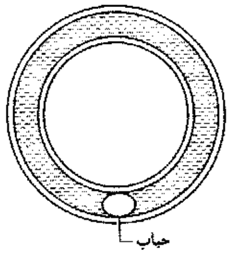
۴. زمانی که در پرش با نیزه، نیزهٔ فایبرگلاس جای نیزهٔ چوبی را گرفت، تحولی در این رشته ایجاد شد. چرا؟

۵. جسمی را از دست رها می‌کنید و می‌بینید که به اندازهٔ یک و نیم برابرارتفاع اولیه‌اش از کف زمین وامی‌جهد. از این مشاهده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. توپی که به زمین می‌افتد نمی‌تواند به بالاتر از ارتفاع اولیه‌اش برگردد. اما قطره‌های آبی که از پایین آبشار به بالا می‌جهند، گاهی از بالاترین نقطهٔ آبشار هم بالاتر می‌روند. چرا؟

۷. زمین لرزه‌های شدید می‌توانند چنان انرژی‌ای آزاد کنند که برای تخریب یک شهر کافی است. درست پیش از زمین لرزه، این انرژی کجا بوده است؟

۸. شکل ۲۱ یک لولهٔ شیشه‌ای حلقوی را نشان می‌دهد که به دیواری نصب شده است. لوله پر از آب است و تنها یک حباب هوا دارد که در ته لوله در حالت سکونِ لحظه‌ای است. حرکت بعدی این حباب را برحسبِ انتقال انرژی توضیح بدهید. یک بار از نیروهای گرانروی و اصطکاک چشم بپوشید و یا بار آنها را کاملاً در نظر بگیرید.



شکل ۲۱. پرسش ۸

۹. در مثال ۳ (شکل ۸) دیدیم که سرعت واگن تفریحی در پایین مسیر، به شکل مسیربستگی ندارد. آیا اگر اصطکاک هم وجود داشت، این حرف می‌توانست درست باشد؟

۱۰. با در نظرگرفتن اینکه انرژی پتانسیل دو مولکول یکسان به فاصلهٔ بین مراکز آنها بستگی دارد، توضیح بدهید که چرا مایعی که به شکل لایه‌ای نازک است، انرژی پتانسیل بیشتری دارد تا مایعی با همان جرم که به شکل کره باشد.

۱۱. اینکه یک آونگ نوسان‌کننده سرانجام می‌ایستد، آیا قانون پایستگی انرژی مکانیکی را نقض می‌کند؟

۱۲. در یک مقالهٔ علمی[1] آمده است که حرکت در شکل راه رفتن و دویدن بازده خیلی کمی دارد، و بازده حرکت پرندگان، ماهیها، و دوچرخه‌سواران خیلی بیشتر است. آیا توضیحی برای این ادعا دارید؟

۱۳. اتومبیلی در بزرگراهی حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند و اتومبیل روی جاده می‌لغزد تا بایستد. انرژی جنبشی اتلاف‌شدهٔ اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۴. در پرسش بالا، فرض کنید راننده چنان ترمز کند که اتومبیل نلغزد، در این مورد، انرژی جنبشی از دست رفتهٔ اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۵. اتومبیلی از حالت سکون شتاب می‌گیرد و به سرعت v می‌رسد، و طی این مدت چرخهای محرک آن نمی‌لغزند. انرژی مکانیکی اتومبیل از کجا می‌آید؟ مثلاً آیا می‌شود گفت که این انرژی از نیروی اصطکاک (ایستایی) جاده بر اتومبیل تأمین می‌شود؟

۱۶. در مورد کاری که در مقابل نیروی اصطکاک انجام می‌شود، تغییر انرژی داخلی مستقل از سرعت (یا چارچوب مرجع لخت) ناظر است. یعنی، مقدار انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی داخلی در اثراصطکاک، از دید ناظرهای مختلف یکسان است. این امر، با توجه به اینکه دو ناظر مختلف، در حالت کلی مقادیر مختلفی برای کار خالص و تغییر انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند، چه توضیحی دارد؟

۱۷. چند مثال فیزیکی برای تعادل ناپایدار، تعادل خنثی، و تعادل پایدار بزنید.

۱۸. در مقاله‌ای[2] آمده است: "جالب است بدانیم که همهٔ انرژی ورودی سوخت، سرانجام به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و در اطراف مسیر اتومبیل پخش می‌شود." سازوکارهای متحمل این تبدیل را بررسی کنید؛ از جمله اصطکاک جاده، مقاومت هوا، ترمز، رادیوی اتومبیل، چراغهای اتومبیل، باتری، اتلاف درون موتور و اتلاف در سیستم حرکت‌دهنده، بوق، و غیره. فرض کنید که جاده مستقیم و افقی است.

---

۱. نگاه کنید به

"The Energetic Cost of Moving About," V. A. Tucker, *American Scientist*, July-August 1975, p. 413.

2. "Energy and the Automobile," Gene Waring, *The Physics Teacher*, p. 494.

۱۹. منشأ هر چند تا از منابع انرژی فعلی را که می‌توانید به‌خورشید مربوط کنید. فکر می‌کنید منبعی وجود دارد که نشود آن‌را به‌خورشید مربوط کرد؟

۲۰. با استفاده از مفاهیم کار و انرژی، توضیح بدهید که چگونه کودکان می‌توانند تاب را از حالت سکون به حالت حرکت با دامنه‌ای بزرگ برسانند.[1]

۲۱. دو قرص با فنری سخت به هم متصل‌اند. آیا می‌توان قرص بالایی را آنقدر به پایین فشرد که پس از رها شدن، به بالا بجهد و قرص پایینی را هم با خودش از روی میز بلند کند (شکل ۲۲)؟ آیا در این مورد انرژی مکانیکی می‌تواند پایسته بماند؟

شکل ۲۲. پرسش ۲۱

۲۲. دربارهٔ "پایستگی انرژی" که (الف) در این فصل به‌کار رفته است و (ب) در ارتباط با "بحران انرژی" (مثلاً خاموش کردن چراغها) بحث کنید. این دو مورد چه تفاوتی دارند.

۲۳. توان الکتریکی یک شهر کوچک از یک نیروگاه هیدروالکتریکی تأمین می‌شود، که بر رودخانه‌ای نزدیک شهر قرار دارد. اگر یک چراغ روشنایی را در این سیستم انرژی ـــ بسته خاموش کنید، از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود که همین مقدار انرژی، البته شاید به شکلی دیگر، باید در نقطه‌ای دیگر از سیستم ظاهر شود. این انرژی کجا و به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۲۴. فنری را تا آنجا که می‌شود فشرده می‌کنیم و در همین حال آن‌را محکم می‌بندیم بعد آن‌را در اسید می‌گذاریم تا حل شود. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر چه می‌شود؟

۲۵. عبارت $E_\circ = mc^2$ نشان می‌دهد که اجسام کاملاً معمولی، مثل سکه یا سنگریزه مقادیر عظیمی انرژی دارند. چرا تا به حال به این منابع عظیم انرژی توجه نشده است؟

۲۶. "در انفجارهای هسته‌ای ـــ به‌ازای جرم یکسان ـــ در حدود یک میلیون بار بیش از انفجار شیمیایی انرژی آزاد می‌شود، زیرا انفجارهای هسته‌ای براساس رابطهٔ $E_\circ = mc^2$ عمل می‌کنند." دربارهٔ این گفته چه فکر می‌کنید؟

۲۷. چگونه جرم و انرژی می‌توانند "هم‌ارز" باشند، با وجودی که دو کمیت فیزیکیِ کاملاً متفاوت‌اند که به دو شکل متفاوت تعریف می‌شوند، و با دو یکای متفاوت سنجیده می‌شوند؟

۲۸. یک کرهٔ فلزی داغ را روی صفحهٔ یک ترازو می‌گذاریم، کره سرد می‌شود. آیا اگر ترازو به‌اندازهٔ کافی حساس می‌بود، تغییر جرمی نشان می‌داد؟

۲۹. آیا در فیزیک کلاسیک (یعنی غیرکوانتومی) هم کمیتهای کوانتیا موجود دارد؟ اگر دارد، مثالهایی بیاورید.

مسئله‌ها

بخش ۸ـ۳ سیستمهای پایستار یک‌بعدی

۱. برای از کار انداختن موشکهای بالیستیک در مراحل اولیهٔ پرواز، یک "تفنگ الکترومغناطیسی" طراحی شده است که در ماهواره‌های زمینی مدار پایین سوار می‌شود. این تفنگ باید بتواند پرتابه‌ای به جرم ۲٫۳۸kg را با سرعت ۱۰٫۰km/s پرتاب کند. انرژی جنبشی این پرتابه، حتی اگر مادهٔ منفجره هم نداشته باشد. برای اینکه موشک را در اثر برخورد از کار بیندازد کافی است. (چنین سلاحی را سلاح "انرژی جنبشی" می‌نامند.) پرتابه به‌وسیلهٔ نیروهای الکترومغناطیسی شتاب می‌گیرد و به‌سرعت پرتاب می‌رسد. حالا فرض کنید می‌خواستیم این پرتابه را با استفاده از یک فنر پرتاب کنیم (سلاح "فنری"). در این‌صورت، ثابت نیروی فنری که ۱٫۴۷m فشرده شده است چقدر باید باشد تا بتواند پرتابه را به سرعت مورد نظر برساند.

۲. گفته می‌شود که از درختان خیلی بزرگ در هر روز ممکن است تا حدود ۹۰۰ کیلوگرم آب تبخیر شود. این تبخیر در برگها صورت می‌گیرد. آب باید از ریشهٔ درخت به برگها برسد. (الف) با فرض اینکه آب به‌طور متوسط ۹٫۲۰m از سطح زمین صعود کند. هر روز چقدر انرژی صرف این کار می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که تبخیر طی ۱۲h روز انجام می‌شود، توان متوسط چقدر است؟

۳. ارتفاع قلهٔ اورست از سطح دریا ۸۸۵۰m است. (الف) کوهنوردی به جرم ۹۰kg، چقدر انرژی در مقابل گرانش مصرف می‌کند تا از سطح دریا به قله برسد؟ (ب) چند شکلات، هر یک با انرژی ۳۰۰kcal، برای تأمین این انرژی لازم است؟ نتیجهٔ شما باید نشان بدهد که کار لازم برای غلبه بر گرانش بخش بسیار کوچکی از انرژی‌ای است که در بالا رفتن از کوه مصرف می‌شود.

۴. مردی به وزن ۲۲۰lb از پنجره‌ای روی یک توری نجات می‌پرد که ۳۶ft پایین‌تر از او است. تور ۴٫۴ft کشیده می‌شود و به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد و بعد مرد را دوباره به هوا پرتاب می‌کند. با فرض اینکه هیچ انرژی‌ای در اثر نیروهای ناپایستار اتلاف نشود، انرژی پتانسیل تور کشیده شده چقدر است؟

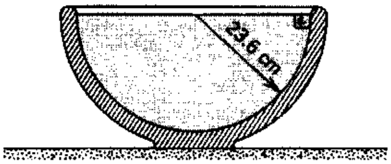
۵. قطعه یخ بسیارکوچکی از لبهٔ داخلی یک ظرف بدون اصطکاک به شکل نیمکره‌ای به شعاع ۲۳٫۶cm رها می‌شود (شکل ۲۳). سرعت

---

۱. نگاه کنید به

"How to Make a Swing Go," R. V. Hesheth, *Physics Education*, July 1975, p. 367.

این قطعه یخ در پایین ظرف چقدر است؟

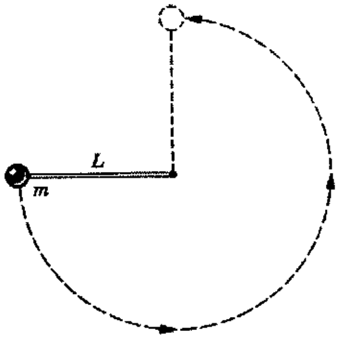


شکل ۲۳. مسئلهٔ ۵

۶. جریانی از گدازهٔ آتشفشانی روی یک سطح افقی در حال حرکت است که به یک سربالایی با شیب $10°$ می‌رسد. مشاهده می‌شود که گدازه ۹۲۰m روی شیب به‌طرف بالا حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود. گدازه شامل گازِ به‌دام افتاده است؛ بنابراین، اصطکاک آن با زمین آنقدر کم است که می‌شود از آن چشم پوشید. سرعت گدازه درست پیش از رسیدن به شیب، چقدر بوده است؟

۷. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۴۰kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع ۱۲۵m پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ آن ۱۵۰m/s در جهت $41{,}0°$ بالاتر از سطح افق است. (الف) انرژی جنبشی پرتابه در اولین لحظهٔ پس از پرتاب و (ب) انرژی پتانسیل آن در این لحظه چقدر است؟ (ج) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد آن به زمین، چقدر است؟ کدام یک از جوابها به جرم پرتابه بستگی دارد؟ اصطکاک هوا را ناچیز بگیرید.

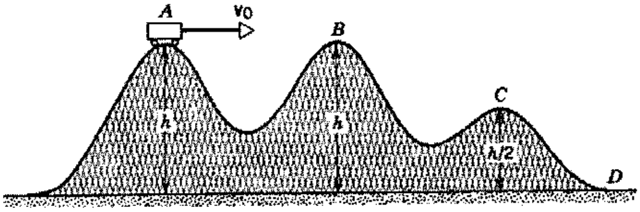
۸. گلوله‌ای به جرم m به یک سرِ میلهٔ بسیار سبکی به طول L متصل است. سر دیگر میله لولا شده است، چنانکه گلوله می‌تواند در صفحه‌ای قائم حرکت کند. میله را به حالت افقی درمی‌آوریم و به گلوله ضربه‌ای به طرف پایین می‌زنیم. میله تاب می‌خورد و درست تا حالت قائم خودش را بالا می‌کشد (شکل ۲۴). سرعت اولیهٔ گلوله چقدر بوده است؟



شکل ۲۴. مسئله‌های ۸ و ۳۸

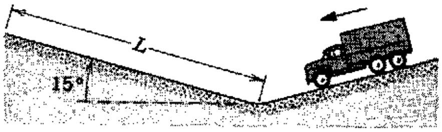
۹. توپی به جرم ۱۱۲g، با سرعت اولیهٔ ۸٫۱۶m/s با زاویهٔ $34{,}0°$ بالاتر از سطح افقی، از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از پایستگی انرژی، (الف) انرژی جنبشی توپ در نقطهٔ اوج مسیر و (ب) سرعت آن در ارتفاع ۲٫۸۷m پایین‌تر از پنجره را پیدا کنید. مقاومت هوا ناچیز است.

۱۰. یک ارابهٔ تفریحی که روی ریلهای بدون اصطکاک است، با سرعت v_0 از نقطهٔ A در شکل ۲۵ به‌راه می‌افتد. سرعت ارابه (الف) در نقطهٔ B، (ب) در نقطهٔ C، و (ج) در نقطهٔ D چقدر است؟ ارابه را مثل ذره در نظر بگیرید.



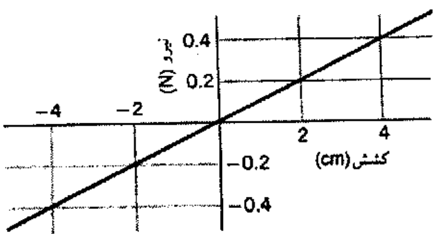
شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. کامیونی که ترمزش بریده است، با سرعت ۸۰mi/h از تپه‌ای پایین می‌آید. خوشبختانه در پایین تپه یک شیب فرار اضطراری وجود دارد. زاویهٔ این شیب $15°$ است (شکل ۲۶). حداقل طول شیب، L، برای اینکه کامیون (لااقل به‌طور آنی) متوقف شود چقدر است؟



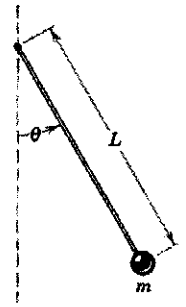
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۱

۱۲. شکل ۲۷ نیرو (برحسب نیوتون) را به‌صورت تابعی از مقدار کشیدگی یا فشردگی (برحسب سانتی‌متر) فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای نشان می‌دهد. فنر به‌اندازهٔ ۵٫۵۰cm فشرده می‌شود و چوب‌پنبه‌ای به جرم ۳٫۸۰g را از تفنگ پرتاب می‌کند. (الف) با فرض اینکه چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از حالت آزاد خودش می‌گذرد رها شود، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (ب) حالا فرض کنید که چوب‌پنبه به فنر گیر می‌کند و پس از آنکه فنر ۱٫۵۰cm از حالت آزاد خودش گذشت از آن جدا می‌شود. در این حالت سرعت چوب‌پنبه، هنگام رها شدن چقدر است؟



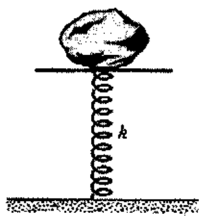
شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۲

۱۳. میلهٔ نازکی به طول $L = 2{,}13\text{m}$ و جرم قابل اغماض، از یک سرلولا شده است؛ چنانکه می‌تواند در صفحهٔ قائم دوران کند. میله را به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = 35{,}0°$ از حالت قائم منحرف، و سپس رها می‌کنیم (شکل ۲۸). سرعت گلولهٔ سربی سرآزاد میله، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطهٔ مسیر چقدر است؟



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. شکل ۲۹ سنگی به جرم ۷٫۹۴kg را نشان می‌دهد که روی فنری قرار دارد. فنر در اثر وزن سنگ به‌اندازهٔ ۱۰٫۲cm فشرده می‌شود. (الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید. (ب) سنگ را ۲۸٫۶cm دیگر هم به پایین فشار می‌دهیم و بعد رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر، درست پیش از برداشتن دست از روی سنگ، چقدر است؟ (ج) سنگ تا چه ارتفاعی، نسبت به این مکان جدید، بالا می‌رود؟



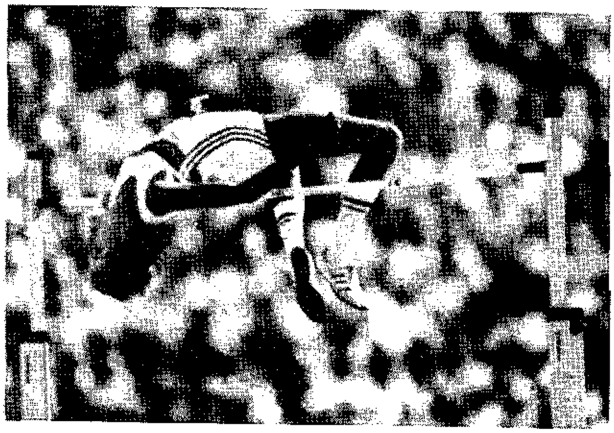
شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. در آبشار نیاگارا، هر دقیقه تقریباً $۳٫۳ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{m}^{۳}$ آب از ارتفاع ۵۰m سقوط می‌کند. (الف) توان خروجی یک نیروگاه مولد برق، که بتواند ۴۸٪ انرژی پتانسیل این آب را به انرژی الکتریکی تبدیل کند، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی تولید شده، به‌قیمت صنعتی ۱٫۲cent/kWh فروخته شود، درآمد سالانهٔ حاصل چقدر است؟ جرم یک مترمکعب ($۱\mathrm{m}^{۳}$) آب ۱۰۰۰kg است.

۱۶. مساحت ایالات متحده امریکا در حدود $۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{km}^{۲}$، و ارتفاع متوسط آن از سطح دریا در حدود ۵۰۰m است. میزان بارش متوسط سالانه، ۷۵cm است. دوسوم این آب باران، در اثر تبخیر، به جو بازمی‌گردد، اما باقی‌ماندهٔ آن سرانجام به اقیانوسها می‌ریزد. اگر همهٔ این آب را می‌شد برای تولید برق در نیروگاههای هیدروالکتریکی به‌کار برد، چه توان متوسطی به‌دست می‌آمد؟

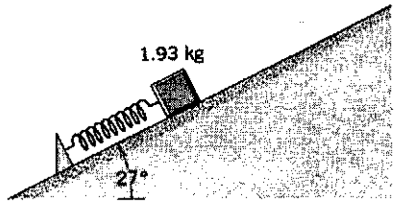
۱۷. جسمی از حالت سکون، از ارتفاع h، سقوط می‌کند. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را به‌صورت توابعی از (الف) زمان و (ب) ارتفاع تعیین کنید. این توابع را رسم کنید و نشان بدهید که مجموع آنها ــ انرژی کل ــ در هر دو مورد ثابت است.

۱۸. در بازیهای المپیک ۱۹۸۴، پرندهٔ آلمانی، اولریکه مایفارت، با پرش ۲٫۰۲m، یک رکورد المپیک برای پرش ارتفاع زنان برجای گذاشت (شکل ۳۰). با فرض یکسان بودن شرایط دیگر، این پرنده در کرهٔ ماه چقدر می‌توانست بپرد؟ شتاب گرانش در سطح ماه فقط $۱٫۶۷\mathrm{m/s}^{۲}$ است. (راهنمایی: ارتفاعی که "به‌حساب می‌آید"، مسافت قائمی است که مرکز ثقل پرنده، پس از جدا شدن پاهایش از زمین، بالا می‌رود. فرض کنید که در لحظهٔ جدا شدن پرنده از زمین، مرکز ثقل او ۱۱۰cm بالاتر از سطح زمین باشد. همچنین فرض کنید که هنگام گذشتن پرنده از میله، مرکز ثقلش در همان ارتفاع میله باشد.)



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۸

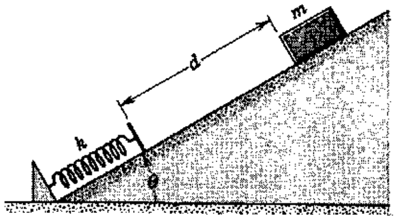
۱۹. جسمی به جرم ۱٫۹۳kg روی سطح شیبدار بی‌اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۲۷٫۰°، به فنری تکیه دارد (شکل ۳۱). فنر را، که ثابت نیروی آن ۲۰٫۸N/cm است، به‌اندازهٔ ۱۸٫۷cm می‌فشاریم، و جسم را رها می‌کنیم. جسم حداکثر به اندازهٔ چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ مکان نهایی را نسبت به مکان جسم، درست پیش از رها شدن، حساب کنید.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. فنر ایده‌آل بدون جرمی در اثر نیروی ۲۶۸N به‌اندازهٔ ۲٫۳۳cm فشرده می‌شود. جسمی به جرم $m =$ ۳٫۱۸kg از بالای سطح شیبدار، از حالت سکون، رها می‌شود (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح

۳۲٫۰° است. جسم، در لحظه‌ای که فنر را به‌اندازهٔ ۵٫۴۸cm فشرده است، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. (الف) در این لحظه جسم چه مسافتی روی سطح شیبدار حرکت کرده است؟ (ب) سرعت جسم، در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد، چقدر است؟

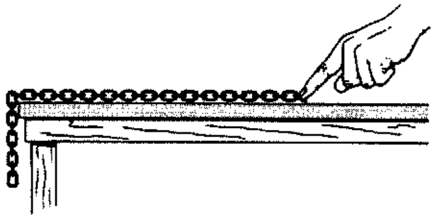


شکل ۳۲. مسئله‌های ۲۰ و ۳۵

۲۱. ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری ۴٫۱۵lb/in است. تفنگ با زاویهٔ ۳۶٫۰° بالاتر از سطح افقی واقع شده است. گلوله‌ای به وزن ۲٫۸۰oz از آن شلیک می‌شود و به ارتفاع ۶٫۳۳ft بالاتر از دهانهٔ لوله می‌رسد. (الف) سرعت گلوله موقع خروج از لوله چقدر است؟ (ب) فنر در ابتدا چقدر فشرده شده بوده است؟

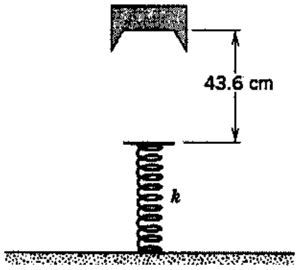
۲۲. آونگی متشکل است از سنگی به جرم ۱٫۳۳kg که به ریسمانی به طول ۳٫۸۲m متصل است. در حالتی که زاویهٔ ریسمان با راستای قائم ۵۸٫۰° است، به سنگ ضربه‌ای در جهت عمود بر ریسمان به طرف بالا می‌زنیم. مشاهده می‌شود که سرعت سنگ، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش، ۸٫۱۲m/s است. (الف) سرعت سنگ، درست پس از ضربه خوردن، چقدر بوده است؟ (ب) طی حرکت آونگ، بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان با راستای قائم می‌سازد چقدر است؟ (ج) پایین‌ترین نقطهٔ مسیر سنگ را صفر انرژی پتانسیل گرانشی بگیرید و انرژی مکانیکی کل سیستم را حساب کنید.

۲۳. زنجیری روی میز بدون اصطکاکی نگه داشته شده است، چنانکه یک چهارم طول آن از لبهٔ میز آویزان است (شکل ۳۳). اگر طول زنجیر L و جرم آن m باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟


شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۳

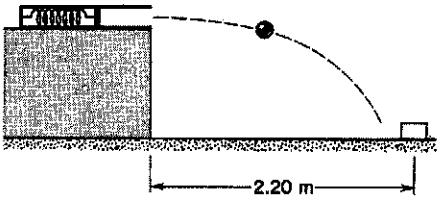
۲۴. یک سر فنر قائمی به سقف متصل است. وزنه‌ای به سر دیگر آن می‌بندیم و آن‌را آرام پایین می‌آوریم تا به وضعیت تعادل برسد. نشان بدهید که مقدار کاهش انرژی پتانسیل وزنه، دو برابر مقدار افزایش انرژی پتانسیل فنر است. (چرا این دو کمیت با هم برابر نیستند؟)

۲۵. جسمی به جرم ۲٫۱۴kg از ارتفاع ۴۳٫۶cm روی فنری، با ثابت نیروی k = ۱۸٫۶N/cm، سقوط می‌کند (شکل ۳۴). این فنر حداکثر چقدر فشرده می‌شود؟



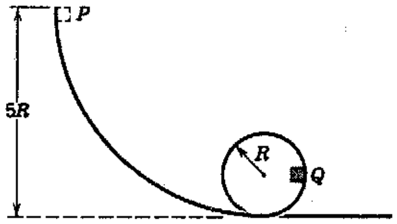
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. دو کودک با هم بازی می‌کنند و می‌خواهند جعبهٔ کوچکی را که روی زمین است با تیله‌ای که از یک تفنگ فنری شلیک می‌شود بزنند؛ تفنگ روی میز قرار دارد. فاصلهٔ افقی جعبهٔ هدف با لبهٔ میز ۲٫۲۰m است (شکل ۳۵). اولی فنر را ۱٫۱۰cm می‌فشارد، اما جسم به هدف نمی‌رسد و ۲۷٫۰cm جلوتر از آن به زمین می‌افتد. دومی چقدر فنر را بفشارد تا جسم به هدف بخورد؟



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۶

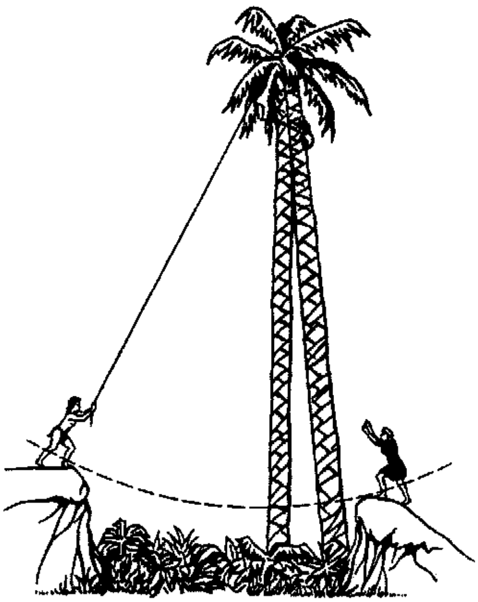
۲۷. جسمی به جرم m روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۳۶). (الف) جسم از نقطهٔ P، از حالت سکون، رها می‌شود. نیروی خالص وارد بر آن، در نقطهٔ Q چقدر است؟ (ب) جسم باید از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانهٔ جدا شدن از مسیر باشد؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. تارزان، به وزن ۱۸۰lb، به کمک پیچکی به طول ۵۰ft، از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد و پایین می‌آید (شکل ۳۷). مقدار سقوط او، از بالای صخره تا پایین مسیر تاب، ۸٫۵ft است. پیچک تحمل کشش

بیشتر از ۲۵۰lb را ندارد. آیا پیچک پاره می‌شود؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۲۸

۲۹. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ گرانشی میان ذره‌ای به جرم m_1 و ذره‌ای به جرم m_2

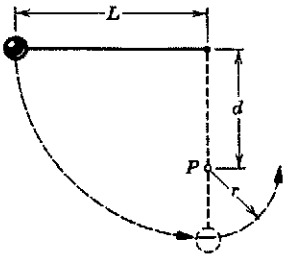
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

است؛ که در آن G ثابت و x فاصلهٔ بین دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل، $U(x)$، را پیدا کنید؟ فرض کنید در $x \to \infty$، $U(x) \to 0$. (ب) چقدر کار لازم است تا فاصلهٔ دو ذره را از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$ افزایش بدهیم؟

۳۰. جسمی به جرم ۱٫۱۸kg تحت اثر نیروی خالص پایستاری است که دقیقاً از رابطهٔ $F = -3x - 5x^2$ به‌دست می‌آید؛ F برحسب نیوتون و x برحسب m است. (الف) انرژی پتانسیل جسم در $x = 2.26\,\mathrm{m}$ چقدر است؟ فرض کنید $U(0) = 0$ است. (ب) سرعت جسم، در $x = 4.91\,\mathrm{m}$ برابر با ۴٫۱۳m/s و در جهت منفی x است. سرعت آن، هنگامی که از $x = 1.77\,\mathrm{m}$ می‌گذرد، چقدر است؟

۳۱. فنری داریم که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. نیرویی که این فنر وارد می‌کند (برحسب نیوتون) $52.8x + 38.4x^2$ در جهت مخالف کشش است؛ x مقدار کشیدگی فنر برحسب متر است. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = 0.522\,\mathrm{m}$ به $x = 1.34\,\mathrm{m}$ چقدر است؟ (ب) یک سر فنر را به‌جایی می‌بندیم و ذره‌ای به جرم ۲٫۱۷kg به سر دیگر آن وصل می‌کنیم. فنر را ۱٫۳۴m می‌کشیم و بعد ذره را از حالت سکون رها می‌کنیم. این ذره، هنگامی که مقدار کشیدگی فنر $x = 0.522\,\mathrm{m}$ است، چه سرعتی دارد؟ (ج) آیا نیروی این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح بدهید.

۳۲. در شکل ۳۸ طول ریسمان برابر با $L = 120\,\mathrm{cm}$، و فاصلهٔ نقطهٔ آویز ریسمان تا میخ برابر با ۷۵٫۰cm است. گلوله را از حالت سکون، از وضعیتی که در شکل مشخص است، رها می‌کنیم. گلوله روی مسیرخط‌چین حرکت می‌کند. سرعت گلوله (الف) در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر و (ب) در بالاترین نقطهٔ مسیر، پس از اینکه ریسمان دور میخ می‌پیچد، چقدر است؟



شکل ۳۸. مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

۳۳. در شکل ۳۸، نشان بدهید که شرط اینکه وزنهٔ آونگ یک دور کامل حول میخ بزند، و ریسمان شل نشود، آن است که $d > 3L/5$ باشد. (راهنمایی: وزنه در نقطهٔ اوج مسیر باید در حال حرکت باشد، در غیر این‌صورت ریسمان شل می‌شود.)

۳۴. جسمی به جرم m، که به یک سرریسمانی بسته شده است، روی دایره‌ای به شعاع R در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. حداقل سرعت جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر چقدر باشد تا ریسمان همچنان کشیده بماند؟

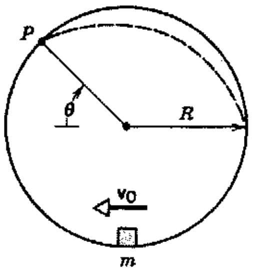
۳۵. جسمی به جرم ۳٫۲۲kg، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، به‌اندازهٔ مسافت d روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی پایین می‌آید، و در آنجا به فنری با جرم ناچیز می‌رسد (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح ۲۸٫۰° است. جسم ۲۱٫۴cm دیگر هم پایین می‌آید و درآنجا، در اثر فشرده شدن فنر، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. ثابت نیروی فنر ۴۲۷N/m است. (الف) d چقدر است؟ (ب) سرعت جسم پس از رسیدن به فنر همچنان، تا مدتی، افزایش می‌یابد. جسم چه مسافتی، از لحظهٔ رسیدن به فنر، می‌پیماید تا به بیشینهٔ سرعتش برسد؟

۳۶. کودکی در بالای قطعهٔ یخی به شکل نیمکره نشسته است (شکل ۳۹). در اثر ضربهٔ بسیارکوچکی که به او زده می‌شود شروع به لغزیدن می‌کند. نشان بدهید که، اگر یخ بدون اصطکاک باشد، کودک در ارتفاع $2R/3$ از یخ جدا می‌شود. (راهنمایی: هنگام جدا شدن کودک از یخ، نیروی عمودی سطح صفر می‌شود.)

شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. ذرهٔ m در شکل ۴۰ روی ریلی در داخل دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. اصطکاکی درکار نیست. سرعت جسم، در پایین‌ترین

نقطهٔ مسیر v_0 است. (الف) حداقل مقدار v_0، یعنی v_m، برای اینکه m بتواند یک دورکامل بزند و از ریل جدا نشود چقدراست؟ (ب) فرض کنید $v_0 = ۰٫۷۷۵v_m$ است. ذره تا نقطهٔ P بر ریل حرکت می‌کند و در آنجا از ریل جدا می‌شود و روی مسیری که با خط‌چین مشخص شده است حرکت می‌کند. مکان زاویه‌ای (θ) نقطهٔ P را پیدا کنید.

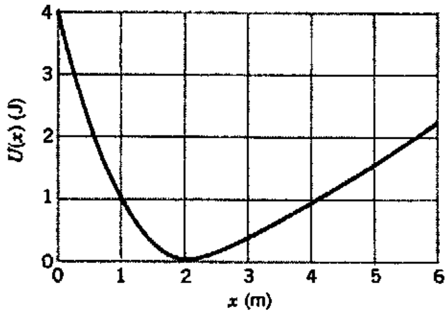


شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. فرض کنید که به جای میلهٔ شکل ۲۴، ریسمانی بسیار کشسان، مثلاً از جنس لاستیک بگذاریم. هنگامی که گلوله رها می‌شود، ریسمان هنوزکشیده نشده و طول آن L است. (الف) توضیح بدهید که چرا انتظار دارید گلوله به نقطه‌ای پایین‌تر از مسافت L زیر نقطهٔ ثابت ریسمان برسد. (ب) با استفاده از مفاهیم دینامیکی و انرژی، نشان بدهید که اگر ΔL نسبت به L کوچک باشد، ریسمان به‌اندازهٔ $\Delta L = ۳mg/k$ کشیده می‌شود؛ k ثابت نیروی ریسمان است. توجه کنید که هر چه k بزرگتر باشد ΔL کوچکتر است و تقریب $\Delta L \ll L$ بهتر می‌شود. (ج) نشان بدهید که در این شرایط سرعت گلوله در پایین مسیر $v = \sqrt{۲g(L - ۳mg/۲k)}$ است، یعنی کمتر از مقداری که در حالت ناکشسان $(k = \infty)$ بود. با استفاده از پایستگی انرژی، یک توضیح فیزیکی برای این نتیجه ارائه کنید.

بخش ۴ـ۸ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حل کامل

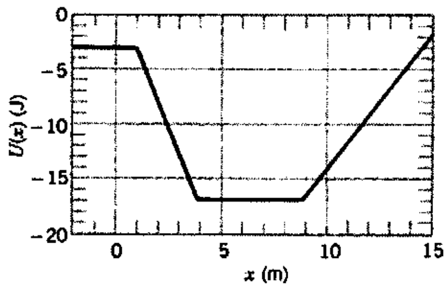
۳۹. ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به‌صورت شکل ۴۱ است. (الف) نمودار نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را به‌طورکمی رسم کنید؛ مقیاس x را همان مقیاس شکل ۴۱ بگیرید. (ب) انرژی مکانیکی (ثابت)



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۳۹

ذره، E، برابر با $۴٫۰ \text{ J}$ است. نمودار انرژی جنبشی ذره، $K(x)$، را مستقیماً روی همان شکل ۴۱ رسم کنید.

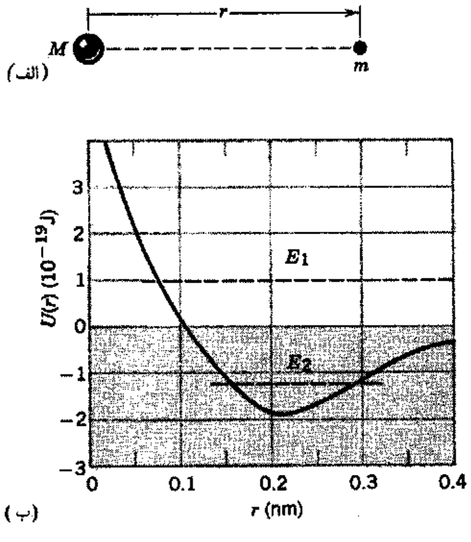
۴۰. ذره‌ای به جرم $۲٫۰ \text{ kg}$ در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۲ است. در $x = ۲٫۰ \text{ m}$ سرعت ذره $-۲٫۰ \text{ m/s}$ است.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۰

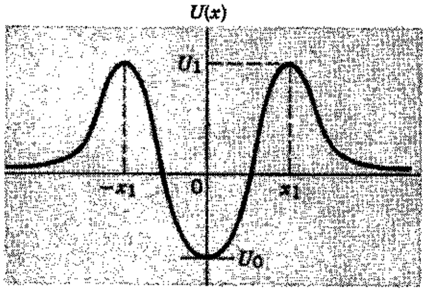
(الف) نیروی وارد بر ذره در این نقطه چقدر است؟ (ب) ذره در چه محدوده‌ای از x حرکت می‌کند. (ج) سرعت ذره در $x = ۷٫۰ \text{ m}$ چقدر است؟

۴۱. شکل ۴۳الف اتمی به جرم m را در فاصلهٔ r از اتم ساکنی به جرم m نشان می‌دهد؛ $M \gg m$ است. شکل ۴۳ب تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ برحسب مکان اتم سبکتر را نشان می‌دهد. حرکت این اتم را (الف) اگر انرژی مکانیکی کل از صفر بزرگتر، مثلاً $E_۱$، باشد، و (ب) اگر این انرژی از صفر کوچکتر، مثلاً $E_۲$ باشد، توصیف کنید. به‌ازای $E_۱ = ۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۹} \text{ J}$، و در $r = ۰٫۳۰ \text{ nm}$ (ج) انرژی پتانسیل، (د) انرژی جنبشی، و (هـ) (اندازه و جهت) نیروی وارد بر ذرهٔ متحرک را به‌دست بیاورید.



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۱

۴۲. یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ هلیم)، با انرژی پتانسیلی به‌صورت شکل ۴۴، داخل هستهٔ بزرگی مقید است. (الف) تابعی از x بسازید که به این شکل کلی باشد: یک کمینه به مقدار U_0 در $x=0$ و یک بیشینه به مقدار U_1 در $x=x_1$ و $x=-x_1$ داشته باشد. (ب) نیروی بین ذرهٔ آلفا و هسته را به‌صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) انواع حرکتهای ممکن را توصیف کنید.



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۲

بخش ۸ـ۵ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی

۴۳. نشان بدهید که، به‌ازای سرعتهای اولیهٔ یکسان v_0، سرعت v همهٔ پرتابه‌ها، در ارتفاع یکسان، یکسان است و به زاویهٔ پرتاب بستگی ندارد. مقاومت هوا را به‌حساب نیاورید.

۴۴. انرژی پتانسیل متناظر با نیروی دوبعدی معینی $U(x,y)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$ است. (الف) F_x و F_y را به‌دست بیاورید. بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات x و y آن نقطه، بیان کنید. (ب) F_r و F_θ را به‌دست بیاورید و بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات قطبی r و θی آن نقطه، بیان کنید. (ج) آیا مدل فیزیکی‌ای برای چنین نیرویی به‌نظرتان می‌رسد؟

۴۵. انرژی پتانسیل یوکاوا

$$U(r)=-\frac{r_0}{r}U_0\,e^{-r/r_0}$$

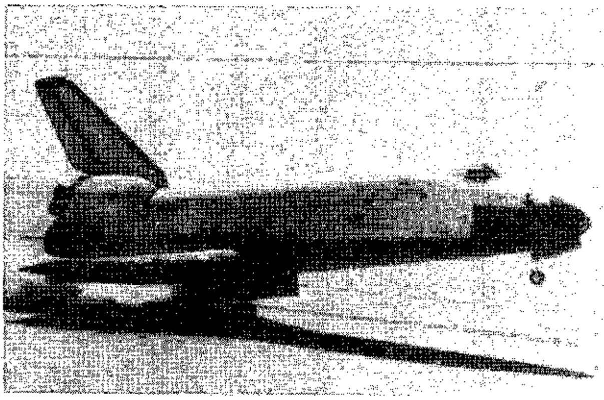
توصیف نسبتاً دقیقی از برهم‌کنش بین هستکها (یعنی نوترونها و پروتونها که اجزای سازندهٔ هسته‌اند) به‌دست می‌دهد. ثابت r_0 در حدود $1{,}5\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$، و ثابت U_0 در حدود $50\,\mathrm{MeV}$ است. (الف) عبارت نیروی جاذبهٔ متناظر با این پتانسیل را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که این نیرو کوتاه‌برد است؛ به این منظور، نسبت مقادیر نیرو در هر یک از فواصل $r=2r_0$، $r=4r_0$، و $r=10r_0$ را به مقدار آن در $r=r_0$ حساب کنید.

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F}=-k_1y\mathbf{i}-k_2x\mathbf{j}$، اگر $k_1\neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۸ـ۶ پایستگی انرژی در سیستمهای ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم $25{,}3\,\mathrm{kg}$ از حالت سکون روی تنهٔ درخت کاجی می‌لغزد و $12{,}2\,\mathrm{m}$ پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر $5{,}56\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) انرژی پتانسیل اولیهٔ توله خرس چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی‌اش در پایین درخت چقدر است؟ (ج) تغییر انرژی مکانیکی توله خرس، در اثر نیروهای اصطکاک، چقدر است؟

۴۸. فضاپیمای شاتل (به جرم $79000\,\mathrm{kg}$)، هنگام بازگشت از مدار



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۴۸

به زمین، با سرعت $18000\,\mathrm{mi/h}$ وارد جو می‌شود؛ این سرعت به تدریج کم می‌شود تا شاتل به‌سرعت فرودِ ۱۹۰ گره (یعنی $220\,\mathrm{mi/h}$) برسد. انرژی جنبشی فضاپیما (الف) هنگام ورود به جو و (ب) هنگام فرود چقدر است (شکل ۴۵)؟ (ج) چه بر سر انرژی "از دست رفته" می‌آید؟

۴۹. شخصی به جرم $68\,\mathrm{kg}$ در حال سقوط آزاد با سرعت حد ثابت $59\,\mathrm{m/s}$ است. آهنگ افزایش انرژی داخلی این شخص و هوای اطراف او چقدر است؟

۵۰. رودخانه‌ای طی عبور از تنداب در مسیرش $15\,\mathrm{m}$ ارتفاع از دست می‌دهد. سرعت آب، هنگام ورود به تنداب $3{,}2\,\mathrm{m/s}$، و هنگام خروج $13\,\mathrm{m/s}$ است. چند درصد از انرژی پتانسیل که آب، در گذشتن از تنداب، از دست می‌دهد به شکل انرژی جنبشی آب در پایین رود ظاهر می‌شود؟ چه بر سر بقیهٔ انرژی می‌آید؟

۵۱. سنگی به جرم $524\,\mathrm{kg}$ از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. طول شیب $488\,\mathrm{m}$ و ارتفاع آن $292\,\mathrm{m}$ است. سرعت سنگ در پایین تپه $62{,}6\,\mathrm{m/s}$ است. این سنگ طی لغزش، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست داده است؟

۵۲. پرتابه‌ای به جرم $9{,}4\,\mathrm{kg}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود. طی مدتی که پرتابه به بالا می‌رود، $68\,\mathrm{kJ}$ از انرژی مکانیکی آن در اثر اصطکاک با هوا تلف می‌شود. اگر مقاومت هوا ناچیز بود، پرتابه چقدر بالاتر می‌رفت؟

۵۳. جسمی به جرم $4{,}26\,\mathrm{kg}$، با سرعت $7{,}81\,\mathrm{m/s}$ روی شیبی به‌زاویهٔ $33{,}0°$ شروع به بالا رفتن می‌کند. این جسم، با فرض اینکه $34{,}6\,\mathrm{J}$ از انرژی مکانیکی‌اش صرف مقابله با اصطکاک شود، تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟

۵۴. سنگی به وزن w در امتداد قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا، f، در مسافت y که سنگ طی می‌کند به‌اندازهٔ fy از انرژی مکانیکی آن می‌کاهد. (الف) نشان

بدهید که بیشترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد

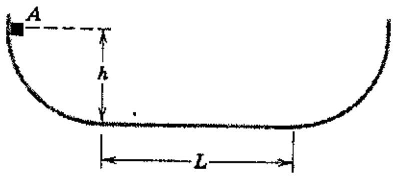
$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

است. (ب) نشان بدهید که سرعت سنگ، هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f}\right)^{1/2}$$

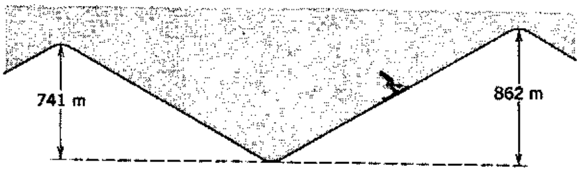
۵۵. جسمی به جرم ۱٫۳۴kg، که روی سطحی افقی در حال لغزش است، به فنری با ثابت نیروی ۱٫۹۳N/cm برمی‌خورد. جسم فنر را به‌اندازهٔ ۴٫۱۶cm، نسبت به حالت آزاد آن، فشرده می‌کند. از زمانی که جسم به فنر می‌خورد تا زمانی که ساکن می‌شود، در اثر اصطکاک میان جسم و سطح ۱۱۷mJ انرژی مکانیکی اتلاف می‌شود. سرعت جسم در لحظهٔ برخورد با فنر چقدر بوده است؟

۵۶. جسم کوچکی به جرم $m = ۲۳۴\text{g}$ در مسیری که در شکل ۴۶ نشان داده شده است می‌لغزد؛ دو انتهای مسیر به طرف بالا شیب دارند و بخش میانی آن تخت است. طول بخش میانی $L = ۲٫۱۶\text{m}$ است. بخشهای خمیدهٔ مسیر بدون اصطکاک‌اند. جسم، هنگام گذشتن از بخش تخت مسیر، در اثر اصطکاک ۶۸۸mJ انرژی مکانیکی از دست می‌دهد. اگر این جسم از نقطهٔ A به ارتفاع $h = ۱٫۰۵\text{m}$ نسبت به قسمت تخت مسیر، رها شود، سرانجام، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۵۶

۵۷. ارتفاع دو قلهٔ پوشیده از برف، ۸۶۲m و ۷۴۱m است. از قلهٔ بلندتر تا قلهٔ کوتاهتر یک پیست اسکی هست (شکل ۴۷). (الف) اسکی‌بازی اسکی‌بازی از قلهٔ بلندتر، از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. اگر این اسکی‌باز از میله‌های اسکی خود استفاده نکند و فقط سربخورد، با چه سرعتی به قلهٔ کوتاهتر می‌رسد؟ فرض کنید که مسیر یخبندان است و عملاً اصطکاکی در کارنیست. (ب) پس



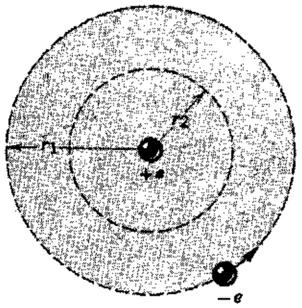
شکل ۴۷. مسئلهٔ ۵۷

از بارش برف، اسکی‌بازی به جرم ۵۴٫۴kg با همین شرایط، بدون استفاده از میله‌هایش، شروع به حرکت می‌کند؛ این اسکی‌باز فقط می‌تواند (با سرعت نهایی صفر) خودش را به قلهٔ کوتاهتر برساند. انرژی داخلی چوبهای اسکی و برفِ مسیر چقدر افزایش یافته است؟

۵۸. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ بین پروتون با بار مثبت و الکترون با بار منفی در اتم هیدروژن

$$F = k\frac{e^2}{r^2}$$

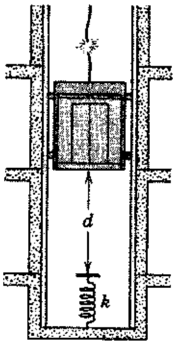
است، که درآن e بار الکترون، k ثابت، و r فاصلهٔ میان الکترون و پروتون است. فرض کنید که پروتون ساکن است. تصور کنید که الکترون در ابتدا در حال حرکت بر دایره‌ای به شعاع r_1 حول پروتون است و ناگهان به مداری دایره‌ای با شعاع r_2، کوچکتر از r_1، می‌جهد (شکل ۴۸). (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون، تغییر انرژی جنبشی الکترون را حساب کنید. (ب) با استفاده از رابطهٔ نیرو با انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل اتم را حساب کنید. (ج) در این فرایند، انرژی کل اتم چقدر تغییر کرده است؟ (این انرژی معمولاً به شکل تابش از اتم خارج می‌شود).



شکل ۴۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. آسانسوری به وزن ۴۰۰۰lb در طبقهٔ اول ساختمان ساکن است، چنانکه کف آن به فاصلهٔ $d = ۱۲٫۰\text{ft}$ بالاتر از فنر بازدارندهٔ زیر آسانسور (هم سطح با طبقهٔ همکف) واقع شده است؛ ثابت نیروی این فنر ۱۰۰۰۰lb/ft است. در این حالت کابل نگهدارندهٔ آسانسور پاره می‌شود (شکل ۴۹). در این لحظه یک ترمز ایمنی به کار می‌افتد و باعث می‌شود که آسانسور با ریلهای مسیر درگیر شود؛ در نتیجه، به‌ازای هر ۱٫۰۰ft که آسانسور حرکت می‌کند، ۱۰۰۰ftlb انرژی مکانیکی از سیستم گرفته می‌شود. (الف) سرعت آسانسور، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر است؟ (ب) حداکثر فشردگی فنر را حساب کنید. (ج) حداکثر مسافتی را که آسانسور، نسبت به فنر، به بالا برمی‌گردد پیدا کنید. (د) به‌طور تقریبی، کل مسافتی که آسانسور قبل

از توقف کامل طی می‌کند چقدر است؟ چرا این جواب دقیق نیست؟



شکل ۴۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. اتومبیلی به جرم $1700\,kg$ با سرعت ثابت $15\,m/s$ حرکت می‌کند. در این حالت، موتور آن $16\,kW$ توان تولید می‌کند که صرف غلبه بر اصطکاک، مقاومت باد، و غیره می‌شود. (الف) نیروی بازدارندهٔ مؤثر ناشی از مجموعهٔ همهٔ نیروهای اصطکاک چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل بخواهد با سرعت $15\,m/s$ از یک شیب $8{,}0\%$ بالا برود، باید چقدر توان از موتور بگیرد؟ (شیب $8{,}0\,m$ ارتفاع به‌ازای $100\,m$ مسافت افقی.) (ج) اتومبیل در چه شیبی (به‌درصد بیان کنید) با موتور خاموش می‌تواند با سرعت $15\,m/s$ پایین بیاید؟

بخش ۸ـ۷ جرم و انرژی

۶۱. (الف) چند ژول انرژی معادل با ۱۲۰ گرم جرم است؟ (ب) این انرژی چند سال نیاز انرژی یک خانه، با مصرف متوسط $1{,}30\,kW$، را تأمین می‌کند؟

۶۲. رابطهٔ "شدت" زلزله در مقیاس ریشتر، M، با انرژی آزاد شده، E، برحسب ژول، چنین است

$$\log E = 1{,}44M + 5{,}24$$

(الف) شدت زلزلهٔ سال ۱۹۸۹ در منطقهٔ سان‌فرانسیسکو (شکل ۵۰) ۷٫۱ بود. در این زلزله چقدر انرژی آزاد شده بود؟ (ب) مقدار کاهش جرم متناظر با این انرژی آزاد شده چقدر است؟

۶۳. یک نیروگاه هسته‌ای در اورگون، طی یک سال به‌طور پیوسته $1030\,MW$ توان مفید تحویل می‌دهد. علاوه بر این، $2100\,MW$ توان هم به شکل انرژی گرمایی به رود کلمبیا منتقل می‌کند. تغییر جرم سوخت هسته‌ای، پس از یک سال کار نیروگاه، چقدر است؟

۶۴. در سال ۱۹۸۳، ایالات متحده در حدود $2{,}31 \times 10^{12}\,kWh$ انرژی الکتریکی تولید کرد. فرض کنید که این انرژی در نیروگاههای هسته‌ای تولید شده باشد. مقدار کاهش جرم سوخت هسته‌ای این نیروگاهها، برای تولید این انرژی چقدر بوده است؟

۶۵. جرم یک قرص آسپیرین $320\,mg$ است. انرژی متناظر با این جرم (به شکل بنزین) تا چند مایل توان یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ فرض کنید اتومبیل با هرگالن بنزین ۳۰ مایل حرکت می‌کند و گرمای احتراق بنزین $130\,MJ/gal$ است. جواب خودتان را برحسب محیط استوایی زمین بیان کنید.

۶۶. توان فضاپیمایی از نابودی ماده‌ـپادماده تأمین می‌شود. چقدر ماده و پادماده باید نابود شود تا فضاپیمایی به جرم $1820\,ton$ را از سکون به یک دهم سرعت نور برساند؟ رابطهٔ غیرنسبیتی انرژی جنبشی را به‌کار ببرید.

۶۷. خورشید با آهنگ $4 \times 10^{26}\,W$ انرژی تابش می‌کند. هر روز "چند تن آفتاب" به زمین می‌رسد؟

شکل ۵۰. مسئلهٔ ۶۲

۶۸. انرژی بستگی هستهٔ یک اتم برابر است با تفاضل مجموع انرژیهای سکون پروتونها و نوترونهای سازندهٔ آن هسته، و انرژی سکون خود هسته. هستهٔ اتم طلا ۷۹ پروتون و ۱۱۸ نوترون دارد و جرم آن $196.9232\,u$ است. انرژی بستگی این هسته را حساب کنید. (جرم پروتون $1.00728\,u$، و جرم نوترون $1.00867\,u$ است؛ انرژی سکون یک یکای جرم اتمی برابر با $931.5\,MeV$ است.)

بخش ۸ـ۸ کوانتش انرژی

۶۹. انرژی یک اتم چقدر باید تغییر کند تا نوری با بسامد $5.34 \times 10^{14}\,s^{-1}$ از آن گسیل شود؟

۷۰. (الف) انرژی اتم هیدروژنی $-3.4\,eV$ است. اگر این انرژی به $-13.6\,eV$ تغییر کند، فرکانس نور چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این نور گسیل می‌شود یا جذب؟

پروژه‌های کامپیوتری

۷۱. فرض کنید نیروی وارد بر ذره‌ای $\mathbf{F} = 8xy^3\mathbf{i} + 12x^2y^2\mathbf{j}$ باشد. این نیرو پایستار، و پتانسیل متناظر با آن $U = -4x^2y^3$ است. با استفاده از این تابع می‌توانید بعضی از ویژگیهای مهم نیروهای پایستار را نشان بدهید. اولاً، انرژی پتانسیل ذره فقط به مختصات آن بستگی دارد. روی یک کاغذ دستگاه مختصاتی رسم کنید که در آن، x و y هر دو بین $-5m$ تا $+5m$ باشند. اکنون با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، مقادیر انرژی پتانسیل را به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح x و y (برحسب متر)، بین دو حد بالا، به‌دست بیاورید. و این مقادیر را، در نقاط متناظر، به نمودار منتقل کنید. با استفاده از این نمودار، به پرسشهای زیر جواب بدهید. (الف) طی حرکت ذره از $x = -5m$، $y = -5m$ به مبدأ، این نیرو چقدر کارانجام می‌دهد؟ (ب) طی حرکت ذره از مبدأ به $x = +5m$، $y = +3m$ چطور؟ (ج) طی حرکت ذره از $x = -5m$، $y = -5m$ به $x = +5m$، $y = +3m$ چطور؟ جواب شما باید برابر با مجموع جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) باشد. (د) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $900\,J$ شروع می‌کند و به نقطهٔ $x = +5m$، $y = +2m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (هـ) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $900\,J$ شروع می‌کند و به $x = +5m$، $y = -2m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (و) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $600\,J$ شروع می‌کند و در راستای خط $x = -y$ به‌طرف $x = +5m$، $y = -5m$ حرکت می‌کند. نیروی دیگری هم لازم است تا ذره دراین مسیر بماند اما فرض کنید که این نیرو همواره بر مسیر عمود است. ذره درکجا می‌ایستد؟

۷۲. روبوتی صندوقی به جرم $20\,kg$ را با سرعت ثابت، از $x = 0$ تا $x = 5.0\,m$، روی زمین هل می‌دهد. شرایط سطح زمین تغییر می‌کند، و روبوت هم صندوق را با نیروی افقی متغیری هل می‌دهد تا سرعت آن ثابت بماند. معلوم می‌شود که رابطهٔ $F(x) = 0.30mg\sqrt{x}e^{-0.20x}$ توصیف خوبی برای این نیروست؛ در این رابطه، x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. کاری را که روبوت بین $x = 0$ و $x = 5m$ انجام می‌دهد حساب کنید.

کار انجام شده از رابطهٔ $W = \int_0^5 F dx$ به‌دست می‌آید. این انتگرال را نمی‌شود به‌طور تحلیلی محاسبه کرد، اما می‌شود مقدار آن‌را با روشهای عددی، به کمک کامپیوتر، تخمین زد. ناحیهٔ انتگرال‌گیری را N بازه، هر یک به اندازهٔ Δx، تقسیم کنید، و F_i را مقدار نیرو در مرکز بازهٔ iام بگیرید. در این صورت خواهیم داشت $\int_0^5 F dx \approx \Delta x \Sigma_{i=1}^{N} F_i$. هر چه Δx کوچکتر شود، براورد دقیقتر می‌شود. اما Δx را خیلی هم نمی‌شود کوچک کرد چون در این‌صورت در محاسبهٔ مجموع، ارقام بامعنی از دست می‌روند. (شاید بخواهید از روش سیمسون استفاده کنید، که براورد بهتری می‌دهد. برای آشنایی با جزئیات این روش به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید.)

برنامه‌ای برای کامپیوتر بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که کار این نیرو را محاسبه کند. در این برنامه باید بتوانید مقادیر x_0، x_f و N را وارد کنید. جمع را می‌توانید با یک حلقهٔ تکرار انجام بدهید. در هر بار تکرار حلقه، نیرو در مرکز بازه حساب می‌شود و به مجموعی که قبلاً حساب شده است افزوده می‌شود. در اجرای اول بگیرید $N = 20$؛ سپس برنامه را چند بار دیگر هم اجرا کنید و هر بار N را دو برابرکنید. هنگامی که نتیجهٔ دو اجرای متوالی، تا سه رقم بامعنی، یکسان شد کار را متوقف کنید.

۷۳. نیروی پایستار $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های $F_x = y(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$، و $F_z = 0$، بر ذره‌ای وارد می‌شود. (الف) فرض کنید ذره از مبدأ، در راستای محور x، حرکت می‌کند و به $x = 2.0\,m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور y حرکت می‌کند و به $x = 2.0\,m$، $y = 2.0\,m$ می‌رسد. کار انجام شده توسط این نیرو را، به‌راحتی می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. این محاسبه را انجام بدهید. حالا فرض کنید که ذره از مبدأ در راستای محور y حرکت می‌کند. به $y = 2.0\,m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور x حرکت می‌کند و به $x = 2.0\,m$، $y = 2.0\,m$ می‌رسد. کارنیرو را در این مسیر هم حساب کنید، اما این بار با استفاده از انتگرال‌گیری عددی. برای جزئیات روش کار به مسئلهٔ قبلی رجوع کنید. سرانجام، یک برنامهٔ انتگرال‌گیری عددی به‌کار ببرید که کار این نیرو را، در حرکت جسم از مبدأ به نقطهٔ $x = 2.0\,m$، $y = 2.0\,m$ روی خط $y = x$، محاسبه کند. چون نیرو پایستار است، جواب حاصل از هر سه مسیر (در محدودهٔ دقت محاسبه) باید یکسان باشد. (ب) نیروی $\mathbf{F}$، با مؤلفه‌های $F_x = y^2(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$ و $F_z = 0$، ناپایستار است. کار این نیرو را طی حرکت ذره از مبدأ به نقطهٔ $x = 2.0\,m$، $y = 2.0\,m$، در هر یک از سه مسیر قسمت (الف) حساب کنید. توجه کنید که نتایج حاصل برای مسیرهای مختلف یکسان نخواهد بود.

۹

سیستمهای ذرات

تا اینجا اجسام را ذره ـــ یعنی "با جرم" ولی "بی‌اندازه" ـــ در نظر گرفته‌ایم. این البته فرض خیلی بدی هم نیست، چون در حرکت انتقالی ساده، در واقع تمام نقاط جسم دقیقاً مثل هم حرکت می‌کنند و فرقی نمی‌کند که جسم را ذره بگیریم یا یک جسم گستردهٔ واقعی. اما در مورد بسیاری از اجسام متحرک نمی‌توانیم چنین کنیم. مثلاً وقتی جسمی ضمن انتقال دوران هم داشته باشد، یا وقتی اجزاء جسمی نسبت به‌یکدیگر نوسان کنند دیگر درست نیست که کل جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم. حتی در این موارد پیچیده‌تر هم، یک نقطهٔ مربوط به جسم هست که، تحت تأثیر نیروهای خارجی، درست مثل یک ذره رفتارمی‌کند. اسم این نقطه **مرکز جرم** است. در این فصل خواهیم گفت که چه‌طور می‌توانیم مرکز جرم اجسام را پیدا کنیم، و نشان خواهیم داد که قوانین ساده (یعنی همان قوانین نیوتون) برای توصیف حرکت مرکز جرم سیستمهای پیچیده، به فرمولبندی دومین قانون بزرگ پایستگی، یعنی **پایستگی تکانهٔ خطی**، منجر می‌شود.

۹ـ۱ سیستمهای دوذره‌ای

در فصلهای ۷ و ۸ برای مطالعهٔ حرکت جسمی که تحت تأثیر نیروی فنر بود از مفاهیم مربوط به انرژی استفاده کردیم. حالا می‌خواهیم به مسئله‌ای بپردازیم که کمی پیچیده‌تر است: حرکت یک‌بعدی دو جسم که به‌وسیلهٔ فنری به هم متصل‌اند. برای سادگی، فعلاً فرض می‌کنیم که جز نیروی فنر، هیچ نیروی خارجی خالص دیگری به این اجسام اثر نمی‌کند. یعنی، فرض می‌کنیم که دو جسم می‌توانند بدون اصطکاک، روی یک سطح افقیِ هموار بلغزند. یک نمونهٔ عملی از چنین وضعیتی می‌تواند حرکت دو لَغزندهٔ متصل با فنر روی یک ریل هوا باشد.

وقتی فنر کشیده یا فشرده می‌شود، به هر دو جسم، که می‌توانیم هر یک را به تنهایی مثل ذره در نظر بگیریم، نیرو وارد می‌کند. نیروهای وارد بر دو جسم مقدارهای مساوی دارند. (فنر را می‌شود صرفاً نمایش مادی نیروهایی دانست که دو جسم ـــ مثلاً دو اتم در یک مولکول ـــ می‌توانند بی‌واسطه بر یکدیگر وارد کنند. در این صورت، قانون سوم نیوتون، ایجاب می‌کند که نیروهای وارد بر دو ذره مساوی و در جهتهای مخالف باشند. وجود فنر، که بی‌جرم فرض شده است، این الزام را تغییر نمی‌دهد.)

حرکتهای این دو جسم را نمی‌توانیم مستقل از یکدیگر با استفاده از قوانین نیوتون تحلیل کنیم، زیرا حرکت هر کدام وابسته به حرکت دیگری است. مثلاً، اگر یکی از اجسام خیلی پرجرمتر از دیگری باشد، جابه‌جایی آن نسبتاً کوچک است و جابه‌جایی جسم کم‌جرمتر تقریباً برابر با تغییر طول فنر است. از طرف دیگر، اگر دو جسم دارای جرمهای مساوی باشند، اندازهٔ جابه‌جایی هرکدام از آنها برابر با نصف افزایش طول فنر است.

در شکل ۱ نمونه‌ای از حرکتی که می‌خواهیم بررسی‌اش کنیم نشان داده شده است. در این مورد ابتدا فنر (با ثابت نیروی k) مقداری کشیده شده است و دو جسم از حالت سکون رها شده‌اند. فرض کنید کشیدگی اولیهٔ فنر d_i باشد، در این‌صورت انرژی اولیه برابر است با $E_i = U_i + K_i = \frac{1}{2}kd_i^2 + 0$. در هر لحظهٔ خاصی که در آن تغییر طول فنر برابر با d باشد، انرژی سیستم برابر است با

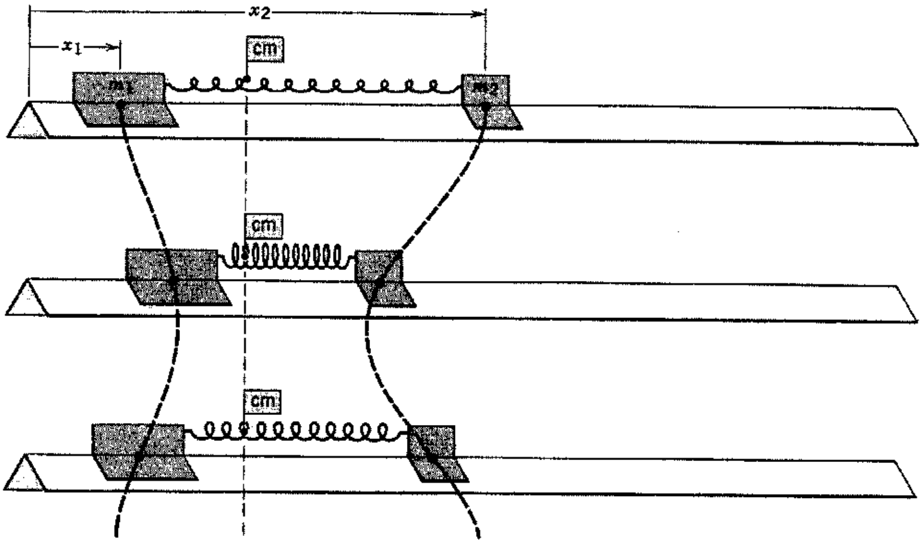
$$E = U + K = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (1)$$

که شامل انرژی پتانسیل فنر و انرژی جنبشی دو جسم است. پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که انرژی E در هر زمانی مساوی با انرژی اولیه (E_i) باشد، یعنی

$$\frac{1}{2}kd_i^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (2)$$

از شکل ۱ پیداست که مکانهای دو جسم با رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x_2 = x_1 + L + d \qquad (3)$$



شکل۱. دو لغزنده که با یک فنر کشیده شده به هم متصل‌اند، روی یک ریل هوا از حالت سکون رها می‌شوند. حرکت حاصل، جز برای نقطهٔ مشخص شده با پرچم، که ساکن می‌ماند، ساده نیست. بازه‌های زمانی بین وضعیتهای متوالی، با هم مساوی‌اند. در مورد این سیستم $m_1 = 2m_2$ است.

که در آن L طول عادی فنر است. معادله‌های ۲ و ۳ حاوی اطلاعات کافی برای تعیین x_1 و x_2 به‌صورت توابعی از زمان نیستند، و بنابراین نمی‌توانیم بدون دستیابی به اطلاعات بیشتر، این مسئله را به‌طور کامل حل کنیم.

اطلاعات اضافیِ مورد نیاز از بررسی و تحلیل یک نقطهٔ خاص در سیستم شکل ۱ حاصل می‌شود. این نقطه، که مرکز جرم (cm) سیستم نامیده می‌شود، در شکل ۱ با پرچم کوچکی مشخص شده است. در مورد این سیستم، مرکز جرم اصلاً حرکت نمی‌کند.

ببینیم که استفاده از مرکز جرم چگونه ما را در تکمیل حل این مسئله یاری می‌کند. مکان مرکز جرم، برای مورد خاص دو ذره در یک بعد، به‌صورت

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2) \tag{۴}$$

تعریف می‌شود، که در آن x_1 و x_2 مختصات دو ذره و M جرم کل سیستم است

$$M = m_1 + m_2$$

مرکز جرم یک سیستم دو جسمی نقطه‌ای است در فضا که با معادلهٔ ۴، در یک بعد، تعریف می‌شود. الزامی نیست که این نقطه، جزئی از این یا آن جسم باشد.

سرعت مرکز جرم، v_{cm}، از مشتق معادلهٔ ۴ نسبت به زمان به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_{\text{cm}} = \frac{dx_{\text{cm}}}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1x_1 + m_2x_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1v_1 + m_2v_2) \end{aligned} \tag{۵}$$

که همان سرعت پرچم در شکل ۱ است. برای پیدا کردن شتاب مرکز جرم، یکبار دیگر (این بار از معادلهٔ ۵) مشتق می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_{\text{cm}} = \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1a_1 + m_2a_2) \end{aligned} \tag{۶}$$

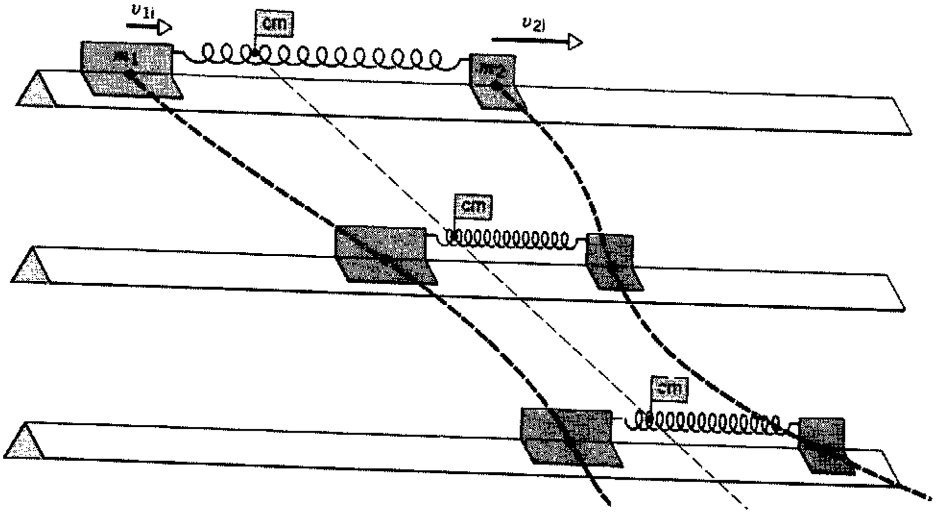
که در آن a_1 شتاب m_1 و a_2 شتاب m_2 است.

در ادامهٔ مطلب، قوانین نیوتون را جداگانه به هریک از جرمهای m_1 و m_2 اعمال می‌کنیم. نیروی وارد بر m_1 از m_2 را $\mathbf{F}_{12}$ و نیروی وارد بر m_2 از m_1 را با $\mathbf{F}_{21}$ نمایش می‌دهیم. از قانون دوم نیوتون در مورد m_1 و m_2 به‌ترتیب نتیجه می‌شود $\mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2$. (در مثال ما، این فنر است که نیروها را به m_1 و m_2 وارد می‌کند. ولی، این فرض که اجسام بی‌واسطه به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، تا وقتی فنر بدون جرم در نظر گرفته شود، چیزی از کلیت مسئله کم نمی‌کند.) قانون سوم نیوتون ایجاب می‌کند که $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. از نشاندن این کمیتها در معادلهٔ ۶ نتیجه می‌شود که

$$a_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) = 0$$

در این مورد خاص، که هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود، مرکز جرم هیچ شتابی ندارد و بنابراین با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ثابت در مورد سیستم شکل ۱ اتفاقاً صفر است). با استفاده از معادله‌های ۴ و ۵ در ترکیبی از معادلات ۲ و ۳ می‌توانیم یا x_1 و v_1 را حذف کنیم یا x_2 و v_2 را، و به این ترتیب حل مسئله کامل می‌شود (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱).

شکل ۲ حالت کلی‌تری را نشان می‌دهد که در آن به فنر یک [illegible] و به جسمها سرعتهای اولیهٔ v_{1i} و v_{2i} داده شده



شکل۲. به دو جسم لغزنده که توسط فنر کشیده شده‌ای به هم متصل شده‌اند سرعتهای اولیهٔ دلبخواهی داده شده است. این دو جسم حرکات پیچیده‌ای دارند، در حالی‌که مرکز جرم ـ که با پرچم مشخص شده است ـ با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بازه‌های زمانی بین وضعیتهای متوالی، با هم مساوی‌اند.

است. در اینجا می‌توانید ببینید که مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند ـ کل سیستم اگرچه کاملاً پیچیده است.

معادله‌های ۴ و ۵ و ۶ خیلی کلی‌تر از آن‌اند که این مسئله خاص مطرح می‌کند. حالا برای اینکه مسئله را به کلی‌ترین صورت مطرح کرده باشیم، فرض می‌کنیم که به جسم m_1، علاوه بر نیروی داخلی $\mathbf{F}_{12}$ که از طرف جسم m_2 وارد می‌شود، یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{\text{ext},1}$ نیز اثر می‌کند. (مثلاً ممکن است ریل هوا شیبدار باشد و نیروی وزن اثر کند، یا ممکن است آزمایش روی سطحی که اصطکاک دارد انجام شود.) قانون دوم نیوتون در مورد m_1 نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1 \tag{۷}$$

همچنین فرض می‌کنیم که بر جسم m_2 نیز یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{\text{ext},2}$ و یک نیروی داخلی $\mathbf{F}_{21}$ اثر کند، در این صورت داریم

$$\mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2 \tag{۸}$$

از جمع معادله‌های ۷ و ۸ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 \tag{۹}$$

مجموع دو جملهٔ اول، $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}}$، نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم است (که قبلاً فرض کرده بودیم صفر باشد). مجموع دو جملهٔ بعدی، $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}$، بنا به قانون سوم نیوتون که ایجاب می‌کند $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ باشد، صفر است. سمت راست معادلهٔ ۹، بنا به معادلهٔ ۶، برابر است با $M\mathbf{a}_{\text{cm}}$. به این ترتیب نتیجهٔ کلی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}} \tag{۱۰}$$

این رابطه بسیار شبیه به قانون دوم نیوتون است ـ قانون دوم است در مورد ذره‌ای به جرم M که در مکان x_{cm} با سرعت v_{cm} در حرکت باشد.

با خلاصه کردن نتایج بررسی این سیستم دو ذره‌ای یک‌بعدی، می‌بینیم که برای بعضی مقاصد معین می‌توانیم فرض کنیم که جرم کل سیستم در x_{cm} متمرکز شده است و با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند. به‌علاوه، در غیاب نیروی خارجی خالص، $a_{\text{cm}} = ۰$ است و مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بخشهای بعدی عبارتهای کلی‌تری برای این مفاهیم به‌دست می‌آوریم.

۹-۲ سیستمهای بس-ذره‌ای

در این بخش نتایج بخش قبلی را به سیستمهایی در سه‌بعد که شامل بیش از دو ذره‌اند تعمیم می‌دهیم.

سیستمی شامل N ذره با جرمهای m_1، m_2، ...، m_N را در نظر می‌گیریم. جرم کل این سیستم برابر است با

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \Sigma m_n$$

هر ذرهٔ این سیستم را می‌توان با جرمش، m_n($n = 1, 2, \ldots, N$)، موقعیتش در دستگاه مختصات $\mathbf{r}_n$ (با مؤلفه‌های x_n، y_n و z_n)، سرعتش $\mathbf{v}_n$ (با مؤلفه‌های v_{nx}، v_{ny} و v_{nz}) و شتابش $\mathbf{a}_n$ نمایش داد. هر ذره تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}_n$ قرار می‌گیرد که در حالت کلی برای ذرات مختلف متفاوت است. بخشی از این نیرو از $N - 1$ ذرهٔ دیگر ناشی می‌شود و بخش دیگرش ممکن است ناشی از عوامل خارجی باشد.

مرکز جرم سیستم را می‌توان با تعمیم منطقی معادلهٔ ۴ تعریف کرد

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_nx_n \tag{۱۱الف}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_ny_n \tag{۱۱ب}$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N)$$
$$= \frac{1}{M}\Sigma m_n z_n \qquad (۱۱ج)$$

با نمادهای برداری، این سه معادله را می‌توان به‌صورت جمع‌وجورتر، یعنی به شکل یک تک عبارت نوشت که موقعیت مرکز جرم را می‌دهد

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_N \mathbf{r}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{r}_n \qquad (۱۲)$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، سرعت مرکز جرم به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt}$$
$$= \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_N \frac{d\mathbf{r}_N}{dt}\right)$$

یا

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{v}_n \qquad (۱۳)$$

با یک مشتق‌گیری دیگر، شتاب مرکز جرم را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{a}_n \qquad (۱۴)$$

معادلهٔ ۱۴ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N$$

یا

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N \qquad (۱۵)$$

طرف راست معادلهٔ ۱۵ مثل این است که قانون دوم نیوتون، یعنی $\mathbf{F}_n = m_n \mathbf{a}_n$، را به تک‌تک ذرات سیستم اعمال کرده باشیم. به این ترتیب نیروی کل وارد بر یک سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم. معادلهٔ ۱۵ همان قانون دوم نیوتون برای یک سیستم N ذره‌ای است که به‌صورت یک تک ذره به جرم M واقع در مرکز جرم در نظر گرفته شده است. این تک ذره با سرعت $\mathbf{v}_{cm}$ حرکت می‌کند و شتابش $\mathbf{a}_{cm}$ است.

معادلهٔ ۱۵ را می‌توانیم از این هم که هست کمی ساده‌تر کنیم. در میان نیروهای وارد بر ذرات، یک دسته نیروهای داخلی‌اند که از برهم‌کنش با ذرات دیگر همان سیستم ناشی می‌شوند و دستهٔ دیگر نیروهای خارجی‌اند که از بیرون سیستم روی آن عمل می‌کنند. هر ذرهٔ m_n ممکن است تحت تأثیرنیرویی از ذرهٔ m_k واقع شود، که آن‌را با $\mathbf{F}_{nk}$ نمایش می‌دهیم. این نیروی خاص یکی از نیروهایی است که نیروی $\mathbf{F}_n$، نیروی کل وارد بر m_n، را می‌سازد. به همین ترتیب، نیروی کل وارد بر m_k شامل جملهٔ $\mathbf{F}_{kn}$ است که از برهم‌کنش با ذرهٔ m_n ناشی می‌شود. بنابر قانون سوم نیوتون $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$ است و در نتیجه، این دو نیروی خاص به هنگام جمع کردن همهٔ نیروها در معادلهٔ ۱۵ همدیگر را حذف می‌کنند. درواقع، همهٔ چنین نیروهای داخلی‌ای، عضوی از یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند و نهایتاً حذف می‌شوند. (در فصل ۵ هشدار دادیم که نیروهای عمل‌ـعکس‌العمل به ذرات متفاوت وارد می‌شوند و بنابراین نمی‌توانند با هم مخالفت کنند. اینجا هم این هشدار را فراموش نکرده‌ایم؛ باز هم عمل به یک ذره وارد می‌شود و عکس‌العمل به ذرهٔ دیگر، اینجا فرقش در این است که ما نیروها را جمع می‌کنیم تا نیروی خالص وارد بر دو ذره را به‌دست بیاوریم، و در این صورت، اعضای زوج عمل‌ـعکس‌العمل، که همچنان به ذرات متفاوت وارد می‌شوند، واقعاً یکدیگر را حذف می‌کنند.)

پس آنچه باقی می‌ماند کل نیروهای خارجی است و معادلهٔ ۱۵ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Sigma\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \qquad (۱۶)$$

که می‌توان آن‌را برحسب مؤلفه‌هایش هم نوشت

$$\Sigma F_{ext,x} = M a_{cm,x}, \qquad \Sigma F_{ext,y} = M a_{cm,y}$$

و

$$\Sigma F_{ext,z} = M a_{cm,z}$$

می‌توانیم این نتیجه مهم را به‌صورت زیر بیان کنیم:

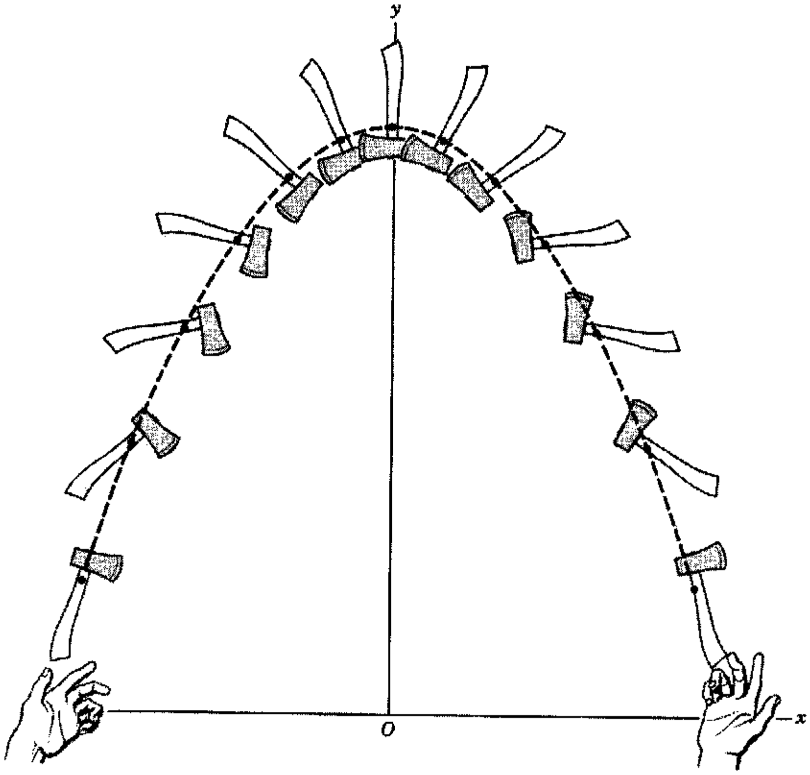
> حرکت انتقالی کلی یک سیستم از ذرات را می‌توان با استفاده از قوانین نیوتون تجزیه و تحلیل کرد؛ با این فرض که کل جرم سیستم در مرکز جرم متمرکز شده است و کل نیروی خارجی به آن نقطه وارد می‌شود.

یک نتیجهٔ ضمنی هم برای حالت $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = 0$ حاصل می‌شود:

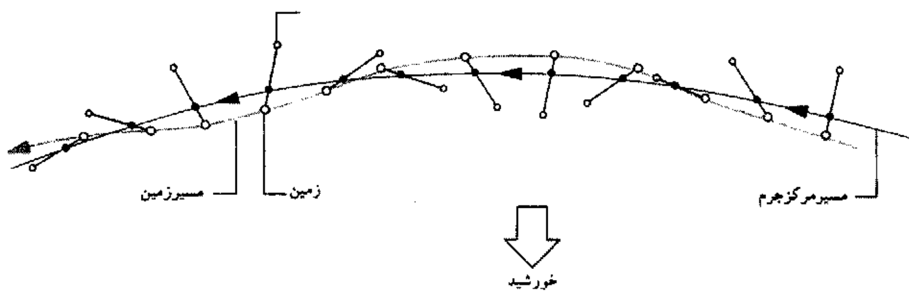
> اگر نیروی خالص خارجی وارد بر یک سیستم ذرات صفر باشد، مرکز جرم این سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

این مطلب، مشاهدات ما در بخش ۹ـ۱ را، در مورد مسئلهٔ حرکت دو جرم که با فنر به هم متصل‌اند، توضیح می‌دهد.

اینها نتایجی هستند کلی، که هم درمورد مجموعه‌ای از ذرات منفرد و هم در مورد ذراتی که مانند ذرات یک جسم جامد توسط نیروهای داخلی به هم متصل‌اند به‌کار می‌روند. خود جسم ممکن



شکل۳. تبری که بین دو بازیگر پرتاب شده است. این تبر در حین انتقال می‌چرخد. مسیرسهمی شکل مرکز جرم را (که با نقطه روی تبر مشخص شده است) با خط‌چین نشان داده‌ایم. تک ذره‌ای که به همین صورت پرتاب شده باشد، همین مسیر را طی می‌کند. حرکت نقطهٔ دیگری از تبر به این سادگی نیست.

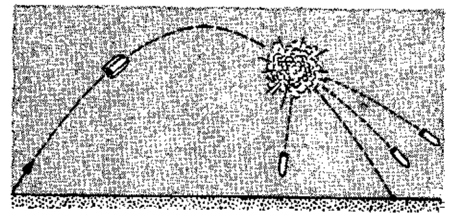


شکل۴. مرکز جرم سیستم زمین‌ـ‌ماه یک مقدار تقریباً دایره‌ای را طی می‌کند، در حالی‌که زمین و ماه هرکدام حول مرکز جرم مشترکشان می‌گردند (همان‌طور که تبر شکل ۳ می‌چرخید). این اثر که موجب یک "انحراف" جزئی در مدار زمین می‌شود، درشکل به‌صورت بسیار اغراق‌آمیزی نشان داده شده است. مرکز جرم سیستم زمین‌ـ‌ماه عملاً در داخل زمین است، به‌طوری که زمین همواره روی مسیر مداری مرکز جرم واقع می‌شود.

است هر حرکت پیچیده‌ای داشته باشد، ولی مرکز جرم آن مطابق معادلهٔ ۱۶ حرکت می‌کند. شکل ۳ حرکت یک جسم ناهمگن را تحت تأثیر گرانش نشان می‌دهد. این جسم در حین انتقال، چرخش هم دارد، اما، مرکز جرم آن مسیر سهمی ساده‌ای را طی می‌کند. تا آنجا که به نیروی خارجی (گرانش) مربوط می‌شود سیستم چنان رفتار می‌کند که گویی ذره‌ای است به جرم M که در مرکز جرم قرار گرفته است. به این ترتیب یک مسئلهٔ پیچیده به دو مسئلهٔ نسبتاً ساده کاهش یافته است ـــ حرکت مرکز جرم روی مسیر سهمی، و چرخش حول مرکز جرم.

به‌عنوان مثالی دیگر، سیستم زمین‌ـ‌ماه را، که تحت تأثیر گرانش خورشید (نیروی خارجی) حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. شکل ۴ نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم مسیر پایداری را حول خورشید طی می‌کند (این همان مسیری است که اگر ذره‌ای با جرم $m_{ماه} + m_{زمین}$ داشتیم طی می‌کرد). زمین و ماه حول مرکز جرم مشترکشان دوران هم می‌کنند، و این موجب می‌شود که زمین در اطراف مسیر مدار پایدار نوسان کوچکی داشته باشد. با استفاده از داده‌های پیوست ج، می‌توانیم نشان بدهیم که مرکز جرم سیستم زمین‌ـ‌ماه تقریباً در فاصلهٔ ۴۶۰۰ کیلومتر از مرکز زمین قرار دارد و بنابراین در داخل زمین (که شعاع متوسطش ۶۳۷۰ کیلومتر است) واقع می‌شود.

در شکل ۵ حرکت یک موشک بالستیک که به سه پاره شکافته می‌شود نشان داده شده است. انفجاری سه کلاهک را از هم جدا و به اطراف پرتاب می‌کند، اما این انفجار چون فقط نیروهای داخلی تولید می‌کند تأثیری بر حرکت مرکز جرم ندارد. مرکز جرم در همان مسیر



شکل۵. موشکی شامل سه کلاهک، در یک مسیر سهموی درحرکت است. این کلاهکها در اثر یک انفجار رها می‌شوند و چنان حرکت می‌کنند که مرکز جرم آنها همان مسیر سهمی اولیه را می‌پیماید.

اولیه موشک به حرکتش ادامه می‌دهد، چنانکه گویی انفجاری صورت نگرفته است؛ این البته تا وقتی است که هیچ یک از کلاهکها تحت تأثیر نیرویی، مثلاً مقاومت هوا یا ضربهٔ ناشی از برخورد با هدف و غیره، قرار نگرفته باشد.

مثال ۱. شکل ۶الف سیستمی شامل سه ذره است که در ابتدا ساکن‌اند. جرم این ذرات به‌ترتیب $m_۱ = ۴٫۱\text{kg}$، $m_۲ = ۸٫۲\text{kg}$ و $m_۳ = ۴٫۱\text{kg}$ است. این ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی متفاوتی قرار می‌گیرند که عبارت‌اند از $F_۱ = ۶\text{N}$، $F_۲ = ۱۲\text{N}$ و $F_۳ = ۱۴\text{N}$. جهت این نیروها در شکل مشخص شده است. مرکز جرم این سیستم در کجا واقع شده و شتاب آن چقدر است؟

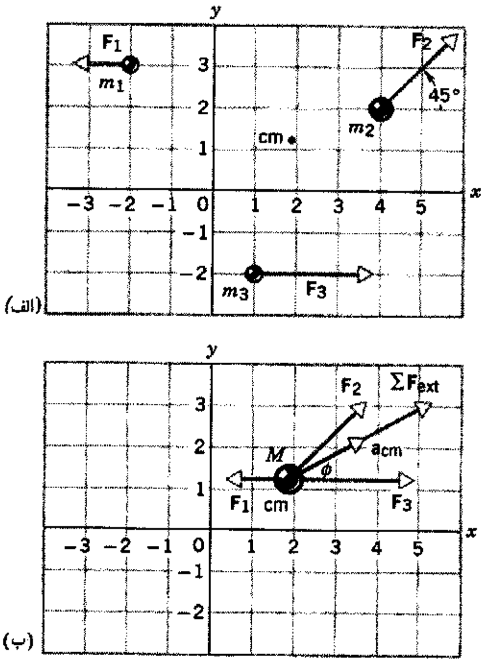
حل: موقعیت مرکز جرم با نقطه در شکل نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۶ب برمی‌آید می‌شود فرض کرد که در این نقطه ذره‌ای واقعی با جرمی برابر مجموع جرم هر سه ذره، یعنی $M = m_۱ + m_۲ + m_۳ = ۱۶٫۴\text{kg}$ قرار گرفته است و همهٔ نیروهای خارجی بر آن وارد می‌شود. مختصات مرکز جرم را از معادله‌های ۱۱الف و ۱۱ب پیدا می‌کنیم

$$x_{\text{cm}} = \frac{۱}{M}(m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳)$$
$$= \frac{۱}{۱۶٫۴\text{kg}}[(۴٫۱\text{kg})(-۲\text{cm}) + (۸٫۲\text{kg})(۴\text{cm})$$
$$+ (۴٫۱\text{kg})(۱\text{cm})] = ۱٫۸\text{cm}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{۱}{M}(m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + m_۳y_۳)$$
$$= \frac{۱}{۱۶٫۴\text{kg}}[(۴٫۱\text{kg})(۳\text{cm}) + (۸٫۲\text{kg})(۲\text{cm})$$
$$+ (۴٫۱\text{kg})(-۲\text{cm})] = ۱٫۳\text{cm}$$

توجه کنید که در این محاسبات، مخلوط کاملاً قابل قبولی از یکاها را بکار برده‌ایم.

مؤلفهٔ x نیروی خارجی خالص وارد بر مرکز جرم عبارت است از



شکل۶. مثال ۱. (الف) سه ذره در حالت سکون در موقعیتهای نشان داده شده قرار گرفته‌اند. به این ذره‌ها نیروهای معینی وارد می‌شوند. مرکز جرم سیستم مشخص شده است. (ب) حرکت انتقالی کل سیستم را می‌توان با حرکت ذره‌ای به جرم کل M که در مکان مرکز جرم واقع شده و تحت تأثیر سه نیروی خارجی است، نشان داد. برایند نیروها و شتاب مرکز جرم را در شکل مشخص کرده‌ایم.

شکل ۶ب

$$F_{\text{ext},x} = F_{۱x} + F_{۲x} + F_{۳x}$$
$$= -۶\text{N} + (۱۲\text{N})(\cos ۴۵°) + ۱۴\text{N} = ۱۶٫۵\text{N}$$

و مؤلفهٔ y این نیرو برابر است با

$$F_{\text{ext},y} = F_{۱y} + F_{۲y} + F_{۳y}$$
$$= ۰ + (۱۲\text{N})(\sin ۴۵°) + ۰ = ۸٫۵\text{N}$$

به‌این ترتیب مقدار نیروی خارجی خالص برابر است با

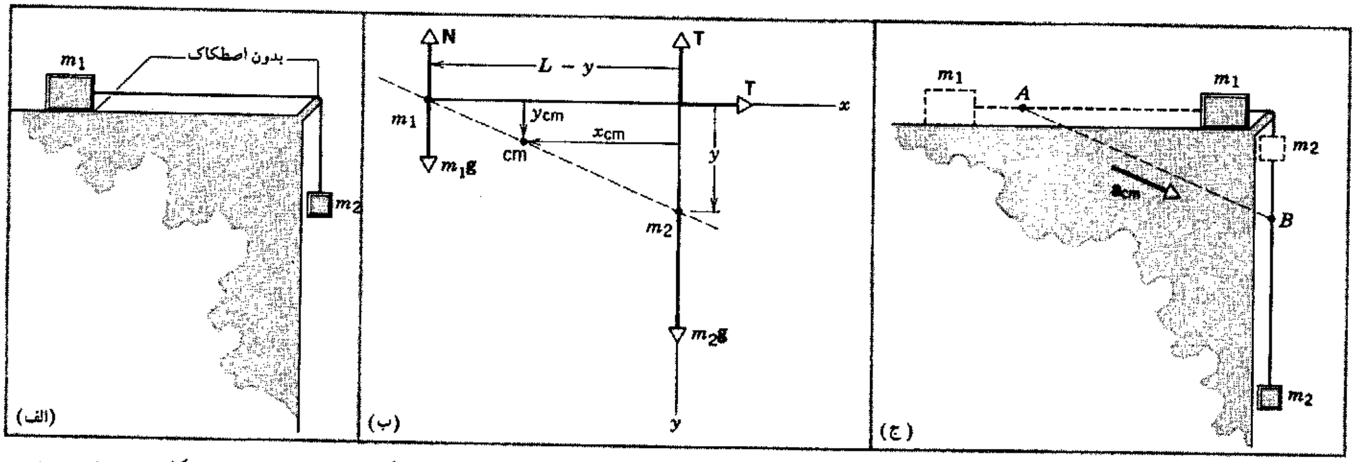
$$F_{\text{ext}} = \sqrt{(F_{\text{ext},x})^۲ + (F_{\text{ext},y})^۲} = \sqrt{(۱۶٫۵\text{N})^۲ + (۸٫۵\text{N})^۲}$$
$$= ۱۸٫۶\text{N}$$

و زاویه‌ای که با محور x می‌سازد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{F_{\text{ext},y}}{F_{\text{ext},x}} = \tan^{-۱}\frac{۸٫۵\text{N}}{۱۶٫۵\text{N}} = ۲۷°$$

بردار شتاب هم در همین جهت است. بنابر معادلهٔ ۱۶ مقدار شتاب مرکز جرم برابر است با

$$a_{\text{cm}} = \frac{F_{\text{ext}}}{M} = \frac{۱۸٫۶\text{N}}{۱۶٫۴\text{kg}} = ۱٫۱\text{m/s}^۲$$



شکل۷. مثال ۲. (الف) دو جسم توسط ریسمانی به طول L به همدیگر متصل شده‌اند. این ریسمان از روی تکیه‌گاه بدون اصطکاکی می‌گذرد. (ب) نیروهای خارجی وارد بر سیستم نشان داده شده است. تکیه‌گاه بدون اصطکاک یک نیروی خارجی بر ریسمان اعمال می‌کند که هر کدام از مؤلفه‌های آن برابر کشش T در ریسمان است (که نیرویی داخلی است و بنابراین نشان داده نشده است.) (ج) مرکز جرم از نقطه A به نقطهٔ B می‌رود. در نقطهٔ A جسم $m_۲$ در بالاترین موقعیت قرار دارد و درنقطهٔ B جسم $m_۱$ به تکیه‌گاه رسیده است. با سقوط جسم $m_۲$، جسم $m_۱$ به سمت راست حرکت می‌کند، و درنتیجه مرکز جرم سیستم هم باید به سمت راست حرکت کند. نیروی افقی T تنها نیروی خارجی ممکن است که می‌تواند موجب حرکت افقی مرکز جرم شود. البته نیروی خارجی ناشی از گرانش هم موجب حرکت مرکز جرم به طرف پایین می‌شود.

هر سه ذرهٔ شکل ۶الف و نیز مرکز جرم آنها با شتابهای ثابت (ولی متفاوت) حرکت می‌کنند. اگرذرات از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشند، هر یک با سرعت فزاینده درامتداد یک خط راست در جهت نیروی وارد بر آن حرکت خواهد کرد.

مثال ۲. درسیستم شکل ۷الف، اندازهٔ شتاب مشترک دو قالب را پیدا کنید. قبلاً این مسئله را در مثال ۸ فصل ۵ با اعمال کردن قانون نیوتون به هر یک از دو قالب، حل کرده‌ایم. این بار مسئله را با در نظر گرفتن حرکت مرکز جرم سیستم دو ذره‌ای حل کنید.

حل: شکل ۷ب نمودار جسم آزاد مربوط به سیستم دو‌ـذره‌ای را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از معادله‌های ۱۱الف ۱۱ب، مرکز جرم سیستم (شکل ۷ب) را تعیین می‌کنیم

$$x_{\rm cm} = -\frac{m_۱}{M}(L-y) \quad \text{و} \quad y_{\rm cm} = \frac{m_۲}{M} = y$$

در رابطهٔ بالا L طول ریسمان و y مختصهٔ قائم جرم $m_۲$ است.

با مشتق‌گیری نسبت به زمان، می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم را تعیین کنیم

$$v_{\rm cm,x} = \frac{m_۱}{M}v \quad \text{و} \quad v_{\rm cm,y} = \frac{m_۲}{M}v$$

که $v(= dy/dt)$ مقدار سرعت مشترک دو قالب است. با مشتق‌گیری مجدد، می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب را پیدا کنیم

$$a_{\rm cm,x} = \frac{m_۱}{M}a \quad \text{و} \quad a_{\rm cm.y} = \frac{m_۲}{M}a$$

که $a(= dv/dt)$ مقدار شتاب مشترک دو قالب است.

حالا قوانین نیوتون را به کار می‌بریم. در شکل ۷ب، نیروی خارجی اعمال شده توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر ریسمانی که دو جسم را به هم متصل کرده به مؤلفه‌های x و y تجزیه شده است. مقدار هر کدام از این مؤلفه‌ها برابر با T (کشش ریسمان) است. با استفاده از معادلهٔ ۱۶ داریم

$$\text{مؤلفهٔ } x: \quad T = Ma_{\rm cm,x}$$

$$\text{مؤلفهٔ } y: \quad m_۱g - N + m_۲g - T = Ma_{\rm cm,y}$$

با جانشانی مقادیر $a_{\rm cm.x}$ و $a_{\rm cm,y}$ می‌توانیم T را بین این دو معادله حذف کنیم و با در نظر گرفتن اینکه $m_۱g = N$ است، شتاب را به‌دست بیاوریم

$$a = g\frac{m_۲}{M}$$

که با نتیجه‌ای که قبلاً در فصل ۵ به‌دست آورده‌ایم سازگار است.

توجه کنید که در این مثال، باید نیروی خارجی اعمال شده از تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر سیستم را در نظر بگیریم. این نیرو وقتی نیروهای وارد بر جسم ۱ و جسم ۲ را جداگانه بررسی می‌کنیم در معادلات وارد نمی‌شود.

اگر سیستم از حالت سکون از وضعیتی که در آن جسم $m_۲$ در بالاترین موقعیت قرار دارد رها شود؛ حرکت مرکز جرم، در امتداد خط راستی است که در شکل ۷ج می‌بینید. جهت $\mathbf{a}_{\rm cm}$ را می‌توان از جمع برداری پنج نیروی وارد بر سیستم، که در شکل ۷ب نشان داده شده است، تعیین کرد.

۹ـ۳ مرکز جرم اجسام صلب

تعیین مرکز جرم جسم جامد با استفاده از معادلهٔ ۱۲ و جمع بستن روی تک‌تک اتمهای سیستم عملاً مشکل‌تر از آن است که ممکن باشد. در عوض جسم را به اجزای بسیارکوچکی به جرم δm_n تقسیم می‌کنیم. وقتی این اجزاء بسیار بسیار کوچک شوند، جمعهای مربوط به معادله‌های ۱۱ و ۱۲ به انتگرال تبدیل می‌شوند

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma x_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int x \, dm \qquad \text{(۱۷الف)}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma y_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int y \, dm \qquad \text{(۱۷ب)}$$

$$z_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma z_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int z \, dm \qquad \text{(۱۷ج)}$$

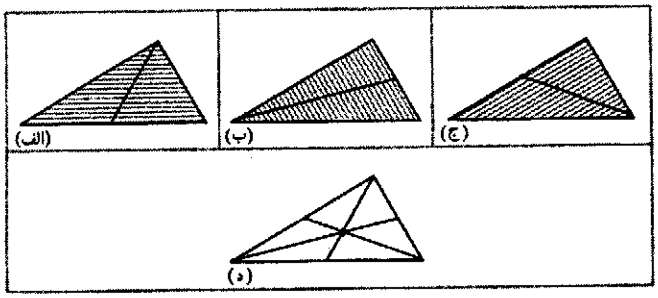
این معادله‌ها را می‌توان به‌صورت برداری هم نوشت

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \, dm \qquad \text{(۱۸)}$$

در بسیاری از موارد، با استفاده از ملاحظات بر هندسی یا تقارن، امکان ساده‌سازی محاسبات مربوط به مرکز جرم اجسام جامد وجود دارد. جسمی که تقارن کروی دارد، مرکز جرمش باید در مرکز هندسی کره قرار بگیرد. (لازم نیست که در این مورد چگالی ثابت باشد؛ مثلاً توپ بیسبال با آنکه از لایه‌هایی از مواد مختلف تشکیل شده است تقارن کروی دارد. مرکز جرم آن بر مرکز هندسی‌اش واقع است. وقتی از تقارن کروی صحبت می‌کنیم، منظورمان این است که چگالی ممکن است با r تغییر کند ولی این تغییر باید در همهٔ جهتها یکسان باشد.) اگر جامدی دارای تقارن استوانه‌ای باشد (یعنی، اگر جرم آن به‌طور متقارن حول محوری توزیع شده باشد)، در این صورت مرکز جرم آن باید روی آن محور واقع شود. اگر جرم به‌طور متقارن حول یک صفحهٔ توزیع شده باشد، مرکز جرم باید در آن صفحه باشد.

اغلب با اجسام جامد نامنظمی مواجه می‌شویم که می‌توانیم آنها را به چند قسمت تقسیم کنیم. می‌توانیم مرکز جرم هر قسمت را پیدا کنیم و سپس هر قسمت را مثل ذره‌ای مستقر در مرکز جرم خودش در نظر بگیریم و مرکز جرم جسم مرکب را پیدا کنیم.

به عنوان مثال، یک ورق مثلث را در نظر بگیرید. این ورق را به تعداد زیادی نوارهای باریک موازی با قاعدهٔ مثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۸). مرکز جرم هر نوار باید در مرکز هندسی آن واقع شود و بنابراین مرکز جرم ورق باید در جایی روی خطی که مرکزهای نوارها را به هم متصل می‌کند باشد. (هر نوار را با یک جرم نقطه‌ای مستقر در مرکز جرم نوار جایگزین می‌کنیم. از رشتهٔ این جرمهای نقطه‌ای عملاً یک جسم یک‌بعدی ایجاد می‌شود که مرکز جرم آن باید مطمئناً روی خود این خط قرار بگیرد.) با تکرار همین روش برای نوارهای موازی با دو ضلع دیگر (شکلهای ۸ب و ۸ج)، دو خط دیگر به‌دست می‌آوریم که هر یک از آنها هم باید شامل مرکز جرم ورق باشد. اکنون اگر این سه خط (شکل ۸د) می‌بینیم که تنها نقطهٔ مشترک آنها الزاماً باید مرکز جرم مثلث باشد.



شکل۸. در (الف)، (ب)، و (ج)، مثلث به نوارهای باریکی موازی با هر یک از سه ضلع تقسیم شده است، مرکز جرم در هر مورد باید روی خط میانه که از وسط نوارهای موازی گذشته است قرار بگیرد. (د) تنها نقطهٔ مشترک این سه خط، محل تقاطع آنهاست که همان مرکز جرم مثلث است.

مثال ۳. شکل ۹الف یک ورق فلزی دایره‌ای به شعاع $2R$ را نشان می‌دهد که از آن قرصی به شعاع R درآورده شده است. این جسم را، که مرکز جرم آن با نقطه‌ای روی محور x نشان داده شده است، X می‌نامیم. محل دقیق این نقطه را پیدا کنید.

حل: شکل ۹ب جسم X را نشان می‌دهد، که سوراخ آن با قرصی به شعاع R پر شده است. این قرص را جسم D، و قرص مرکب یکنواختی را که به این ترتیب ایجاد می‌شود جسم C می‌نامیم. با استفاده از تقارن می‌دانیم که مرکز جرم جسم C در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد.

برای پیدا کردن مرکز جرم یک جسم مرکب، می‌توانیم فرض کنیم که جرم هر یک از اجزای آن در مرکز جرم آن جزء متمرکز شده است. پس می‌توانیم جسم C را معادل دو جرم نقطه‌ای که نمایندهٔ اجسام X و D هستند در نظر بگیریم. شکل ۹ج محل مراکز جرمهای این سه جسم را نشان می‌دهد.

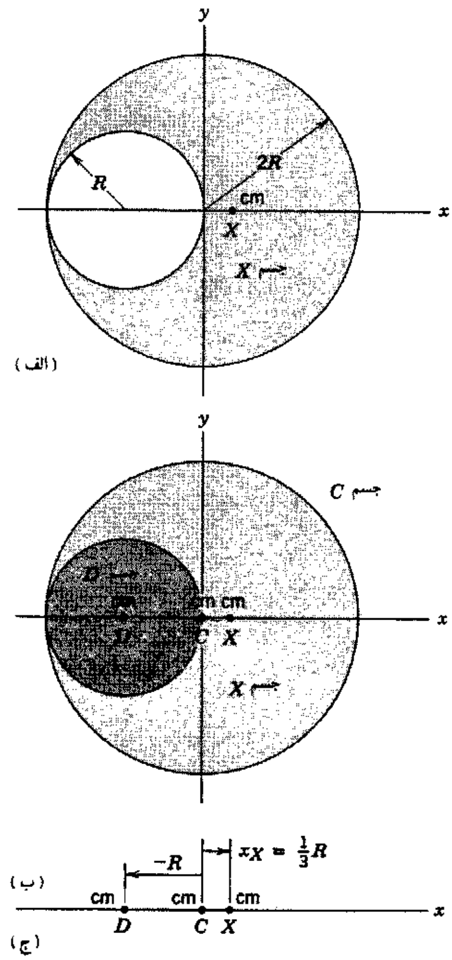
مکان مرکز جرم جسم C از معادلهٔ ۱الف به‌دست می‌آید

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X}$$

x_D و x_X به‌ترتیب عبارت‌اند از مکان مراکز جرمهای اجسام D و X. با توجه به اینکه $x_C = 0$ است، معادله را برای x_X حل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}$$

نسبت m_D/m_X باید مثل نسبت مساحت اجسام D و X باشد [...] دارای چگالی یکنواخت و ضخامت یکنواخت



شکل۹. مثال ۳. (الف) جسم X یک قرص فلزی به شعاع $2R$ است که در آن یک سوراخ به شعاع R ایجاد شده است. (ب) جسم D یک قرص فلزی است که سوراخ جسم X را پر می‌کند؛ مرکز جرم آن در $x_D = -R$ قرار دارد. جسم C یک قرص مرکب است که از اجسام X و D به وجود آمده است؛ مرکز جرم آن در مبدأ مختصات است. (ج) مرکزهای جرم سه‌جسم.

است). یعنی

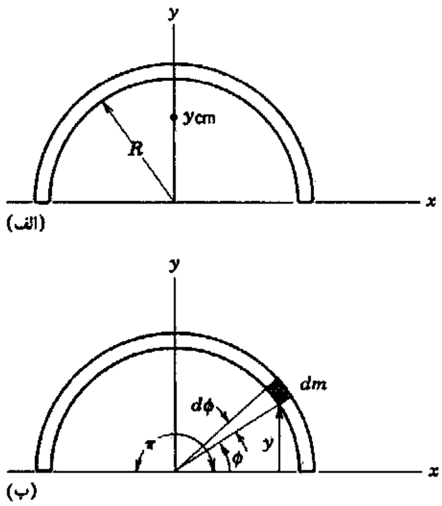
$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{\text{مساحت }D}{\text{مساحت }X} = \frac{\text{مساحت }D}{(\text{مساحت }C - \text{مساحت }D)} = \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $x_D = -R$ است، پس خواهیم داشت

$$x_X = \frac{1}{3}R$$

مثال ۴. نوار نازکی را به‌صورت نیمدایره‌ای به شعاع R درآورده‌ایم (شکل ۱۰). مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.

حل: در این مورد با استفاده از یک مختصهٔ زاویه‌ای می‌شود کار انتگرال‌گیری را ساده‌تر کرد. به‌علاوه، از تقارن جسم نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم باید روی محور y باشد (یعنی، $x_{cm} = 0$). بنابراین برای



شکل۱۰. مثال ۴. (الف) نوار نازک فلزی را به شکل نیمدایره در آورده‌ایم. (ب) عنصری از نوار به جرم dm در مختصهٔ ϕ قرار گرفته است.

تعیین y_{cm} از معادلهٔ ۱۷ب استفاده می‌کنیم. عنصر کوچک با جرم dm را که در شکل ۱۰ب نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عنصر روبه‌روی زاویهٔ $d\phi$ است، و چون جرم M کل نوار روبه‌روی زاویه π است (یک دایره کامل زاویه 2π را در بر می‌گیرد)، جرم dm باید همان کسر از M باشد که $d\phi$ از π است. یعنی، $dm/M = d\phi/\pi$ یا $dm = (M/\pi)d\phi$. عنصر dm در موقعیت $y = R\sin\phi$ قرار گرفته است. در این مورد معادلهٔ ۱۷ب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

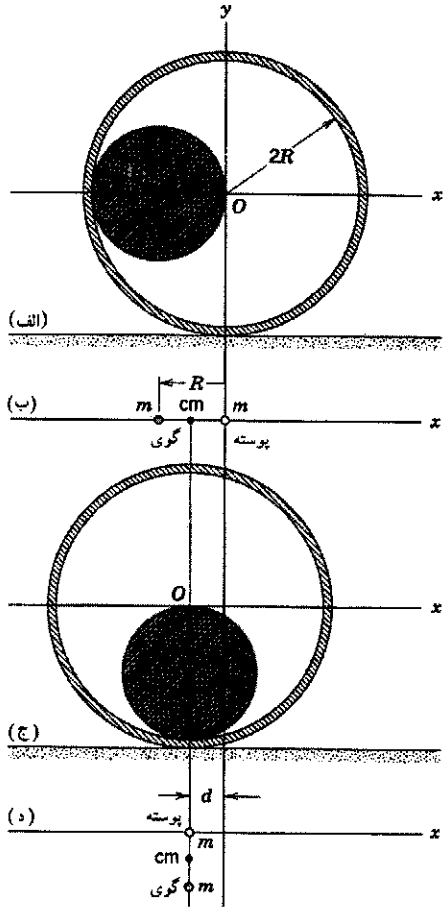
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R\ \sin\ \phi)\frac{M}{\pi}d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\phi\ d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R$$

مرکز جرم تقریباً در فاصلهٔ دو سوم شعاع در امتداد محور y است. توجه داشته باشید که، همان‌طور که در این مثال نشان داده شد، لازم نیست مرکز جرم حتماً در داخل حجم یا مادهٔ جسم باشد.

مثال ۵. گویی به جرم m و شعاع R در داخل یک پوستهٔ کروی با همان جرم m و شعاع داخلی $2R$ قرار داده شده است. این جسم مرکب روی میزی در حال سکون است (شکل ۱۱الف). گوی از محل اولیه‌اش رها می‌شود و در داخل پوسته به پس و پیش می‌غلتد و سرانجام در پایین متوقف می‌شود (شکل ۱۱ج). در طی این فرایند جابه‌جایی d پوسته چقدر است؟

حل: تنها نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم گوی‌ـپوسته عبارت‌اند از نیروی گرانی به‌طرف پایین و نیروی عمودی به طرف بالا که از میز وارد می‌شود. هیچ یک از نیروها مؤلفهٔ افقی ندارند. بنابراین $\Sigma F_{ext,x} = 0$ است. از معادلهٔ ۱۶، مؤلفهٔ افقی شتاب مرکز جرم هم باید صفر باشد. یعنی مکان افقی مرکز جرم سیستم باید ثابت بماند، و پوسته باید چنان حرکت کند که جای مرکز جرم تغییر نکند.



شکل۱۱. مثال ۵. (الف) گویی با شعاع R از این مکان اولیه رها شده است و می‌تواند آزادانه در داخل پوستهٔ کروی به شعاع $2R$ بغلتد. (ب) مرکز جرم گوی، پوستهٔ کروی و ترکیب آنها. (ج) وضعیت نهایی پس از آنکه گوی به حال سکون درآمد. پوستهٔ کروی چنان جابه‌جا می‌شود که مرکز جرم سیستم در جای خودش باقی می‌ماند. (د) مراکز جرمهای گوی، پوستهٔ کروی، و ترکیب آنها.

می‌توانیم هم گوی و هم پوسته را با تک ذراتی با جرم m نمایش بدهیم که هر کدام در مرکز جرم مربوط به خودش قرار گرفته است. شکل ۱۱ ب سیستم را قبل از رهاکردن گوی نشان می‌دهد و شکل ۱۱ د نمایش حالتی است که گوی در پایین پوسته متوقف شده است. مبدأ مختصات را منطبق مکان اولیهٔ مرکز پوسته می‌گیریم. شکل ۱۱ ب نشان می‌دهد که، نسبت به این مبدأ مختصات، مرکز جرم سیستم گوی-پوسته در فاصلهٔ $\frac{1}{2}R$ در سمت چپ مبدأ قرار دارد. این نقطه در وسط دو ذره است. شکل ۱۱ د نشان می‌دهد که جابه‌جایی پوسته عبارت است از

$$d = \frac{1}{2}R$$

پوسته باید در طی مدتی که گوی به حال سکون در می‌آید این مقدار به سمت چپ حرکت کند.

گوی در اثر اصطکاکی که با پوستهٔ کروی دارد به حالت سکون در می‌آید. چرا این نیروی اصطکاک در مکان نهایی مرکز جرم مؤثر نیست؟

۴-۹ تکانهٔ خطی ذره

تکانهٔ هر ذره برداری است مانند $\mathbf{p}$ که به‌صورت حاصل‌ضرب جرم آن ذره در سرعتش $\mathbf{v}$ تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (۱۹)$$

تکانه، که حاصل‌ضرب یک کمیت اسکالر در یک بردار است، خودش یک بردار است. چون $\mathbf{p}$ متناسب با $\mathbf{v}$ است؛ بستگی به چارچوب مرجع ناظر دارد؛ بنابراین همواره باید این چارچوب را مشخص کنیم.

نیوتون، در پرینکیپیای معروفش، قانون دوم حرکت را برحسب تکانه (که خودش آن‌را "مقدار حرکت" می‌نامید) بیان کرده است. قانون دوم نیوتون با اصطلاحات امروزی چنین بیان می‌شود:

> آهنگ تغییر تکانهٔ هر جسم برابر با نیروی برایند وارد بر آن جسم و در جهت همان نیروست.

به‌صورت نمادی یعنی اینکه

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۲۰)$$

که در آن $\Sigma\mathbf{F}$ نیروی برایند وارد بر ذره است.

برای یک تک ذره با جرم ثابت، این صورت از قانون دوم هم‌ارز صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ است که تا کنون از آن استفاده کرده‌ایم. یعنی، اگر m ثابت باشد،

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

در مکانیک کلاسیک دو رابطهٔ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ برای تک‌ذره کاملاً هم‌ارزند.

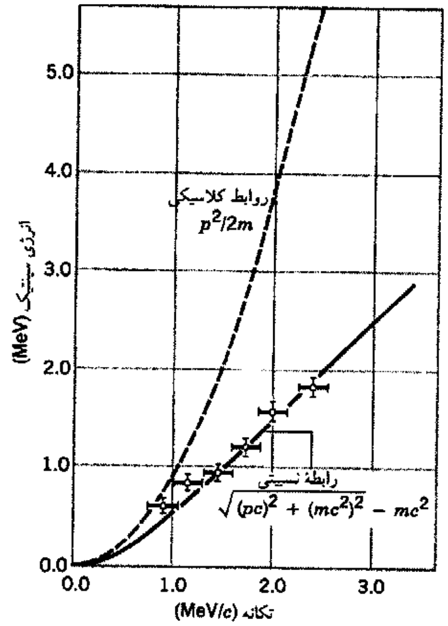
از ترکیب رابطه‌های $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ رابطهٔ مفیدی بین تکانه و انرژی جنبشی به‌دست می‌آید

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad (۲۱)$$

تکانه در سرعتهای زیاد (اختیاری)

وقتی سرعت ذره نزدیک به سرعت‌نور باشد (ناحیه‌ای که‌در آن باید از نظریهٔ نسبیت به‌جای مکانیک نیوتونی استفاده کرد)، دیگر قانون دوم نیوتون به‌صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ معتبر نیست. اما معلوم می‌شود که این قانون به‌صورت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ هنوز هم معتبر است مشروط بر اینکه تکانهٔ $\mathbf{p}$ تک‌ذره را نه به‌صورت $m\mathbf{v}$ بلکه به‌صورت

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (۲۲)$$



شکل ۱۲. مقایسهٔ روابط کلاسیکی (معادلهٔ ۲۱) و نسبیتی (معادلهٔ ۲۳) بین تکانه و انرژی جنبشی الکترونهای گسیل شده در بعضی فرایندهای واپاشی پرتوزا. دایره‌ها اندازه‌گیریهای تجربی را نمایش می‌دهند؛ خطوط افقی و عمودی که از میان دایره‌ها می‌گذرند محدودهٔ عدم قطعیت در اندازه‌گیریها را نشان می‌دهند. روشن است که داده‌ها با رابطهٔ نسبیتی سازگارترند. توجه کنید که در سرعتهای کم (انرژی و تکانهٔ کم) دو رابطه از هم متمایز نیستند.

تعریف کنیم. در این رابطه c سرعت نور است. در سرعتهای معمولی $(v \ll c)$، معادلهٔ ۲۲ به همان معادلهٔ ۱۹ تبدیل می‌شود.

در مورد ذرات نسبیتی، می‌شود نشان داد که رابطهٔ اساسی میان تکانه و انرژی جنبشی به‌صورت زیر است

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \qquad (۲۳)$$

این نتیجه را در فصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد. شکل ۱۲ مقایسه‌ای بین نتایج کلاسیکی (معادلهٔ ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) را برای ذرات در محدوده‌ای از سرعتها نشان می‌دهد. روشن است که نتایج کلاسیکی در سرعتهای زیاد نادرست است. همان‌طورکه انتظار می‌رود (مسئلهٔ ۲۷) معادلهٔ ۲۳ در سرعتهای معمولی به معادلهٔ ۲۱ کاهش می‌یابد.

انرژی جنبشی، به هر صورتی که نوشته شود، دارای ابعاد جرم ضربدر مربع سرعت است، که همان حاصل‌ضرب سرعت در تکانه است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش ۱ـ۷ برای بیان ابعاد می‌توانیم بنویسیم

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}$$

اغلب مفید است که تکانه را برحسب یکای انرژی تقسیم بر سرعت بیان کنیم و انتخابهای مناسب در مورد ذرات عبارت‌اند از eV/c، MeV/c، و مانند آنها. این انتخاب به ما امکان می‌دهد که کمیت pc را برحسب یکاهای انرژی مانند MeV بیان کنیم و کارکردن با روابطی مانند معادلهٔ ۲۳ را بسیار ساده‌تر می‌کند. مثلاً، برای الکترونی با تکانهٔ معلوم $1/5\,\mathrm{MeV}/c$، جملهٔ pc در معادلهٔ ۲۳ برابر با $1/5\,\mathrm{MeV}$ است. انرژی جنبشی الکترون را می‌توانیم به‌راحتی از این معادله محاسبه کنیم و برای آن مقدار $1/1\,\mathrm{MeV}$ را به‌دست بیاوریم.

در ناحیهٔ سرعتهای بسیار زیاد، تکانهٔ ذره ممکن است آنقدر بزرگ باشد که جملهٔ pc در معادلهٔ ۲۳ خیلی بزرگتر از جملهٔ mc^2 شود، و در این‌صورت معادله با تقریب خوبی به $K = pc$ کاهش می‌یابد. بیان تکانه برحسب یکای انرژی تقسیم بر c در این ناحیه بسیار مفید است. مثلاً الکترونی که تکانهٔ آن برابر $500\,\mathrm{MeV}/c$ است انرژی جنبشی‌ای خیلی نزدیک به $500\,\mathrm{MeV}$ دارد. (توجه کنید که این تقریب برای الکترون $1/5\,\mathrm{MeV}$ که قبلاً در نظر گرفته شد هیچ خوب نیست.)

۹ـ۵ تکانهٔ خطی سیستمی از ذرات

تصور کنید که به‌جای یک تک‌ذره، سیستمی شامل N ذره با جرمهای m_1، m_2، ...، m_N داشته باشیم. فرض می‌کنیم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود، یعنی جرم کل M (یعنی Σm_n) سیستم در طی زمان ثابت می‌ماند. ذرات می‌توانند با هم برهم‌کنش داشته باشند و ممکن است نیروهای خارجی به آنها وارد شود. هر ذره در چارچوب مرجعی که مورد استفاده است، سرعت و تکانهٔ معینی دارد. سیستم دارای تکانهٔ کل $\mathbf{P}$ است، که طبق تعریف برابر با جمع برداری تکانه‌های تک‌تک ذرات آن در همان چارچوب مرجع است:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_N\mathbf{v}_N \qquad (۲۴)\end{aligned}$$

اگراین رابطه را با معادلهٔ ۱۳ مقایسه کنیم، فوراً درمی‌یابیم که

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \qquad (۲۵)$$

که تعریفی هم‌ارز برای تکانهٔ سیستمی متشکل از ذرات است

تکانهٔ خطی کل سیستمی از ذرات برابر است با حاصل‌ضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن.

اگر از معادلهٔ ۲۵، با فرض ثابت بودن جرم، نسبت به‌زمان مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\mathrm{cm}} \qquad (۲۶)$$

با توجه به معادلهٔ ۲۶ و معادلهٔ ۱۶ (یعنی $\Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = M\mathbf{a}_{\mathrm{cm}}$) می‌توانیم قانون دوم نیوتون برای سیستمی از ذرات به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (۲۷)$$

معادلهٔ ۲۷ می‌گوید که برایند نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر با آهنگ تغییر تکانهٔ خطی آن سیستم است. این معادله، تعمیم معادلهٔ مربوط به تک‌ذره، یعنی $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادلهٔ ۲۰)، به سیستمی است که شامل تعداد زیادی ذره‌باشد. فرض کرده‌ایم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود. معادلهٔ ۲۷ در مورد خاص تک‌ذره به معادلهٔ ۲۰ تبدیل می‌شود، زیرا هر نیروی وارد بر سیستم یک‌ـذره‌ای حتماً خارجی است. در بخش ۹ـ۸ شکل اصلاح شدهٔ معادلهٔ ۲۷ را برای سیستمهایی که جرمشان متغیر است به‌دست خواهیم آورد.

۹ـ۶ پایستگی تکانهٔ خطی

فرض کنید حاصل‌جمع نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشد. در این‌صورت، از معادلهٔ ۲۷ داریم

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{P} = \text{a const.}$$

اگر نیروی خارجی خالص وارد بر یک سیستم صفر باشد، بردار تکانهٔ کل سیستم ثابت می‌ماند.

این نتیجهٔ ساده ولی کاملاً عام، قانون پایستگی تکانهٔ خطی نامیده می‌شود. قانون پایستگی تکانهٔ خطی هم (مانند قانون پایستگی انرژی) در گسترهٔ بسیار وسیعی از پدیده‌های فیزیکی معتبر است و هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

قوانین پایستگی (مانند قوانین پایستگی انرژی و تکانهٔ خطی، که با آنها آشنا شده‌ایم، و قوانین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای و بار الکتریکی که بعداً در این کتاب به آنها خواهیم رسید) در فیزیک به لحاظ نظری و عملی بسیار با اهمیت‌اند زیرا هم ساده‌اند و هم عمومیت دارند. قوانین پایستگی انرژی و تکانهٔ خطی از محدودهٔ مکانیک کلاسیک فراتر می‌روند و در حوزه‌های نسبیتی و کوانتومی هم صدق می‌کنند.

قوانین پایستگی همگی به این شکل‌اند: در سیستمی که دارد تغییر می‌کند، نمودی هست که تغییر نمی‌کند. اگر ناظران متفاوتی که هرکدام در چارچوب مرجع متفاوتی قرار دارند به یک سیستم در حال تغییر نگاه کنند، همگی توافق خواهند داشت که قوانین پایستگی در سیستم برقرار است. مثلاً، در مورد پایستگی تکانهٔ خطی، هر یک از ناظران چارچوبهای لخت متفاوت، مقدار متفاوتی به تکانهٔ خطی سیستم نسبت می‌دهند، ولی جملگی توافق دارند (با فرض $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ که ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم هر طور هم که حرکت کنند، $\mathbf{P}$ تغییر نمی‌کند. نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به تبدیلهای گالیله‌ای ناورداست (همهٔ ناظرهای لخت در مورد آن با هم توافق دارند). اگر در یک چارچوب لخت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ باشد، همهٔ ناظرهای لخت مشاهده خواهند کرد که $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است و نتیجه خواهند گرفت که تکانهٔ پایسته است.

تکانهٔ کل یک سیستم را فقط نیروهای خارجی می‌توانند تغییر بدهند. نیروهای داخلی که دو به دو مساوی و مختلف‌الجهت هستند موجب تغییر تکانه‌های مساوی و مختلف‌الجهتی می‌شوند که همدیگر را حذف می‌کنند. برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی خالصی نباشد داریم

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \text{a const.} \qquad (۲۸)$$

تکانهٔ هر یک از ذرات ممکن است تغییر کند، ولی اگر هیچ نیروی خارجی خالصی در کار نباشد مجموع تکانه‌ها باید ثابت باقی بماند.

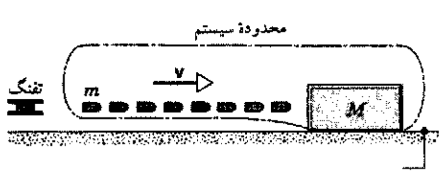
تکانه کمیتی برداری است. بنابراین معادلهٔ ۲۸ هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر، برای سه راستای مختصات، است. بنابراین، پایستگی تکانهٔ خطی سه شرط در مورد حرکت سیستم مربوط فراهم می‌کند. اما پایستگی انرژی تنها یک شرط در مورد حرکت سیستم در اختیار ما می‌گذارد، چون انرژی کمیتی اسکالر است.

اگر سیستم فقط از یک ذره تشکیل شده باشد، معادلهٔ ۲۸ معنی‌اش این می‌شود که وقتی هیچ نیروی خارجی خالصی روی ذره اثر نکند تکانهٔ آن ثابت می‌ماند، که (برای یک ذرهٔ تنها) معادل آن است که بگوییم سرعتش ثابت می‌ماند. این صرفاً بیان دیگری از قانون اول نیوتون است.

مثال ۶. رگباری از گلوله‌هایی به جرم $m = ۳٫۸\text{g}$ به‌طور افقی با سرعت $۱۱۰۰\,\text{m/s}$ به‌قطعه چوب بزرگی به جرم $M = ۱۲\text{kg}$ که در ابتدا روی سطح میزی افقی ساکن است، شلیک می‌شود (شکل ۱۳). اگر قطعه چوب بتواند بدون اصطکاک روی سطح میز بلغزد، سرعت آن پس از دریافت ۸ گلوله چقدر می‌شود؟

حل: معادلهٔ ۲۸ ($\mathbf{P} = \text{const.}$) فقط برای سیستمهای بسته معتبر است، یعنی سیستمهایی که هیچ ذره‌ای به آنها وارد یا از آنها خارج نمی‌شود. پس سیستم ما باید مجموعه‌ای شامل قطعهٔ چوب و ۸ گلوله باشد. در شکل ۱۳، این سیستم را، با کشیدن یک منحنی بسته به دور آن، مشخص کرده‌ایم.

ابتدا فقط راستای افقی را بررسی می‌کنیم. هیچ نیروی خارجی افقی روی سیستم متشکل از چوب + گلوله‌ها اثر نمی‌کند. نیروهایی که هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب ایجاد می‌شوند نیروهای داخلی‌اند و در $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ که هیچ مؤلفهٔ افقی ندارد سهیم نیستند.



شکل ۱۳. مثال ۶. تفنگی رگباری از گلوله به‌سوی یک قطعه چوب شلیک می‌کند. سیستم را مرکب از قطعه چوب به‌علاوهٔ گلوله‌های در حال پرواز گرفته‌ایم.

چون هیچ نیروی خارجی (افقی) اثر نمی‌کند، می‌توانیم قانون پایستگی تکانه (معادلهٔ ۲۸) را به‌کار بگیریم. تکانهٔ اولیه (افقی)، مربوط به وقتی که هنوز گلوله‌ها در پروازند و چوب ساکن است، برابر است با

$$P_{\mathrm{i}} = N(mv)$$

که mv تکانهٔ هرکدام از گلوله‌های منفرد و $N = ۸$ است. تکانهٔ نهایی وقتی اندازه‌گیری می‌شود که همهٔ گلوله‌ها در چوب جا گرفته‌اند و چوب با سرعت V روی سطح میز می‌لغزد. این تکانه برابر است با

$$P_{\mathrm{f}} = (M + Nm)V$$

پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$P_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{f}}$$

یا

$$N(mv) = (M + Nm)V$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \frac{Nm}{M + Nm}v \\ &= \frac{(۸)(۳٫۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg})}{۱۲\mathrm{kg} + (۸)(۳٫۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg})} \times (۱۱۰۰\,\mathrm{m/s}) \\ &= ۲٫۸\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

به دلیل نوع انتخاب سیستم، مجبور نبودیم که نیروهای اعمال شده در هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب را در نظر بگیریم. همهٔ آنها نیروهای داخلی بودند.

در راستای قائم، نیروهای خارجی عبارت‌اند از وزن گلوله‌ها، وزن قطعه چوب، و نیروی عمود بر سطح که به قطعه چوب وارد می‌شود. گلوله‌ها در طی پرواز، تحت تأثیر نیروی گرانی، تکانهٔ کوچکی در راستای قائم به‌دست می‌آورند. وقتی گلوله‌ها به چوب برخورد می‌کنند، چوب باید به هرگلوله نیرویی واردکند. این نیرو هم مؤلفهٔ افقی و هم مؤلفهٔ قائم دارد. همراه با نیروی قائم وارد برگلوله که برای صفرکردن مؤلفهٔ قائم تکانهٔ آن لازم است باید (بنابر قانون سوم نیوتون) نیروی عمودی وارد بر چوب از طرف سطح هم افزایش پیداکند. این افزایش نه فقط به خاطر وزن گلولهٔ فرورفته در چوب نیست، بلکه آهنگ تغییرمؤلفهٔ قائم تکانهٔ گلوله هم در آن سهیم است. وقتی همهٔ گلوله‌ها در داخل قطعه چوب متوقف شدند، نیروی عمودی برابر با مجموع وزن چوب وگلوله‌های جاگرفته در آن خواهد شد.

به منظور ساده کردن حل این مسئله فرض کردیم که گلوله‌ها چنان سریع شلیک شوند که هر ۸ گلوله قبل از اینکه گلولهٔ اول به چوب برخورد کند در پرواز باشند. آیا می‌توانید این مسئله را بدون این فرض حل کنید؟

فرض کنید مرز سیستم را چنان وسیع بگیریم که شامل تفنگ هم بشود. تفنگ به زمین محکم شده است. آیا تکانهٔ قبل و بعد از شلیک، تغییر می‌کند؟ آیا نیروی افقی خارجی‌ای به این سیستم وارد می‌شود؟

مثال ۷. شکل ۱۴ توپی به جرم $M = ۱۳۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که گلوله‌ای ۷۲ کیلوگرمی را در راستای افقی با سرعت دهانه‌ای v برابر $۵۵\mathrm{m/s}$ شلیک می‌کند. توپ چنان مستقر شده است که می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت پس‌زنی توپ (V) را نسبت به زمین پیداکنید. (ب) سرعت اولیهٔ گلولهٔ توپ (v_{E}) را نسبت به زمین پیداکنید.

حل: (الف) توپ وگلوله را به عنوان سیستم اختیار می‌کنیم. با این کار، نیروهای مربوط به عمل شلیک توپ، نیروهای داخلی سیستم‌اند و نیازی به بررسی آنها نیست. نیروهای خارجی وارد بر سیستم هیچ مؤلفهٔ افقی ندارند. بنابراین مؤلفهٔ افقی تکانهٔ خطی کل سیستم باید در حین شلیک توپ ثابت بماند.

چارچوب مرجعی، ساکن نسبت به زمین، اختیار می‌کنیم و سرعتهای به‌سمت راست در شکل ۱۴ را مثبت می‌گیریم.

قبل از اینکه گلوله شلیک شود، تکانهٔ اولیهٔ سیستم یعنی P_{i}، برابر با صفر است. پس از شلیک، گلوله دارای سرعت افقی v نسبت به توپ پس‌رونده است. v سرعت دهانه‌ای گلوله است. ولی، در چارچوب مرجع زمین، سرعت افقی گلوله برابر $v + V$ است. به این ترتیب تکانهٔ خطی سیستم پس از شلیک برابر است با

$$P_{\mathrm{f}} = MV + m(v + V)$$

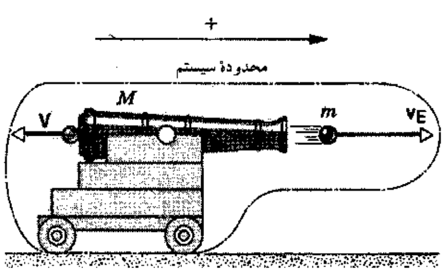
جملهٔ اول سمت راست عبارت است از تکانهٔ توپ پس‌رونده و جملهٔ دوم تکانهٔ گلولهٔ در حال پرواز است.

پایستگی تکانهٔ خطی در راستای افقی ایجاب می‌کند که $P_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{f}}$ باشد، یعنی

$$۰ = MV + m(v + V)$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود

$$V = -\frac{mv}{M + m} = -\frac{(۷۲\mathrm{kg})(۵۵\mathrm{m/s})}{۱۳۰۰\mathrm{kg} + ۷۲\mathrm{kg}} = -۲٫۹\,\mathrm{m/s}$$



شکل ۱۴. مثال ۷. توپی به جرم M گلوله‌ای به جرم m شلیک می‌کند. سرعتهای گلوله و توپ پس‌رونده در چارچوب مرجع ساکن نسبت به زمین نشان داده شده‌اند. سرعتهای به سمت راست مثبت گرفته شده‌اند.

علامت منفی حاکی از آن است که، همان‌طور که انتظار می‌رود، توپ شکل ۱۴ به سمت چپ پس می‌زند.

(ب) سرعت گلوله نسبت به توپ (پس‌رونده) همان سرعتِ دهانه‌ای است. سرعت گلوله، نسبت به زمین برابر است با

$$\begin{aligned} v_E &= v + V \\ &= 55\,\mathrm{m/s} + (-2{,}9\,\mathrm{m/s}) = 52\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

به علت پس‌زدن توپ، سرعت گلوله نسبت به زمین کمی کمتر از سرعت دهانه‌ای است. در این مسئله، توجه کنید که انتخاب معقول سیستم (توپ + گلوله) اهمیت دارد و چارچوب مرجعی (زمین یا توپ پس‌رونده) که اندازه‌گیری نسبت به آن انجام می‌شود باید کاملاً مشخص باشد.

مثال ۸. شکل ۱۵ دو قالب را که توسط فنری به هم متصل شده‌اند، نشان می‌دهد. این دو قالب می‌توانند آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاکی بلغزند. قالبها را که جرم آنها برابر m_1 و m_2 است از همدیگر دور می‌کشیم و سپس از حال سکون رها می‌کنیم. در زمانهای بعدی هر کدام از دو قالب حامل چه کسری از انرژی جنبشی کل سیستم خواهند بود؟

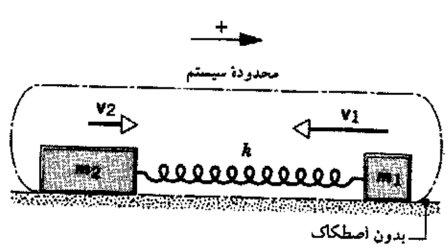
حل: دو قالب و فنر را (که بدون جرم فرض شده است) به عنوان سیستم می‌گیریم و سطح افقی‌ای را که این دو قالب روی آن می‌لغزند به عنوان چارچوب مرجع انتخاب می‌کنیم. جهت مثبت سرعتها را، در شکل ۱۵، به طرف راست اختیار می‌کنیم.

تکانهٔ اولیهٔ سیستم، P_i، در لحظهٔ رها شدن قالبها، صفر است. تکانهٔ نهایی سیستم در هرزمان بعدی، برابر است با

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

که v_1 و v_2 سرعتهای دو قالب‌اند. پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یا

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$



شکل۱۵. مثال ۸. دو قالب را که روی سطح بدون اصطکاک توسط فنری به هم متصل‌اند از همدیگر دور کرده و از حالت سکون رها کرده‌ایم. تکانهٔ کل در حالت اول (در لحظهٔ رها شدن سیستم) صفر است و بنابراین باید در همهٔ زمانهای بعدی هم صفر بماند. سرعتهای به سمت راست را مثبت در نظر گرفته‌ایم.

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1} \tag{29}$$

علامت منفی حاکی از آن است که سرعتها همواره در جهتهای مخالف‌اند. رابطهٔ بالا مربوط به سرعتهای خاصی نیست و در هر لحظه پس از رها کردن قالبها صادق است.

انرژی جنبشی قالبها عبارت‌اند از $K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ و $K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$. کسر مورد نظر ما برای قالب m_1 برابر است با

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}$$

با جانشانی $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ در رابطهٔ بالا و با کمی عملیات جبری نتیجه می‌شود

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

به طریق مشابه، برای قالب m_2 خواهیم داشت

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

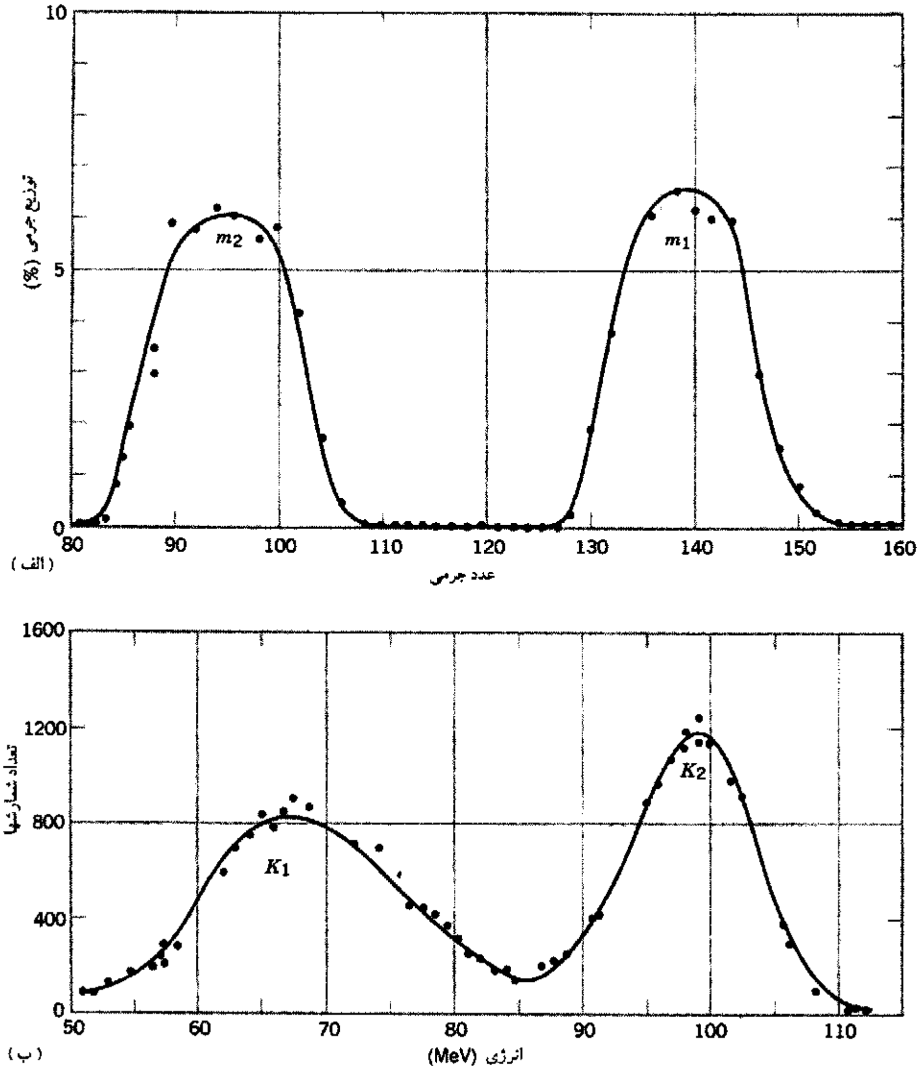
به این ترتیب، اگرچه انرژی جنبشی سیستم نوسان‌کننده با زمان تغییر می‌کند، اما سهم هر یک از دو قالب از این انرژی، کسری ثابت و مستقل از زمان است. قالبی که جرمش کمتر است سهم بیشتری از انرژی جنبشی قابل حصول را دریافت می‌کند. مثلاً، اگر $m_2 = 10m_1$ باشد، خواهیم داشت

$$f_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0{,}91 \quad \text{و} \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0{,}09$$

در این مورد، قالب سبکتر (m_1) حامل ٪۹۱ انرژی جنبشی سیستم و قالب سنگین‌تر (m_2) حامل ٪۹ باقی‌مانده است. در حد $m_2 \gg m_1$، قالب سبکتر اساساً تمام انرژی جنبشی را می‌گیرد.

عبارتهای مربوط به f_1 و f_2 به همین صورت در مورد سنگی که در میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند صادق است. فرض کنید که جرم m_2 جرم زمین باشد و m_1 جرم سنگ. در چارچوب مرجع مرکز جرم آنها، سنگ تقریباً همهٔ انرژی جنبشی را به‌خود اختصاص می‌دهد ($f_1 \approx 1$) و زمین سهم بسیار کوچکی دارد ($f_2 \approx 0$). مقادیر تکانه‌های خطی زمین و سنگ با هم برابرند، ولی سرعت بسیار کم زمین با جرم بسیار بزرگ آن جبران می‌شود. با همین استدلال بود که (در فصل ۸) وقتی پایستگی انرژی را در مورد اجسام سقوط‌کننده در میدان گرانش زمین به کار می‌بردیم، انرژی جنبشی زمین را به‌حساب نمی‌آوردیم.

مثال کاربردی دیگری از این اثر در شکافت هسته‌ای رخ می‌دهد، که در آن هستهٔ سنگینی مانند $^{235}\mathrm{U}$ به دو پارهٔ سبکتر می‌شکافد.



شکل۱۶. (الف) توزیع جرمی پاره‌های گسیل‌شده در یک شکافت هسته‌ای. مقیاس قائم، آن کسری از شکافتها را نشان می‌دهد که به پاره‌ای با عدد جرمی نشان داده شده روی مقیاس افقی بینجامد. (ب) توزیع انرژی پاره‌های گسیل‌شده در شکافت.

پاره‌ها که در اثر رانش الکتریکی از همدیگر دور می‌شوند، در ابتدا خیلی به هم نزدیک و تقریباً ساکن‌اند. از معادلهٔ ۲۹ انتظار داریم که نسبت انرژیهای جنبشی پاره‌ها پس از شکافت به‌صورت زیر باشد

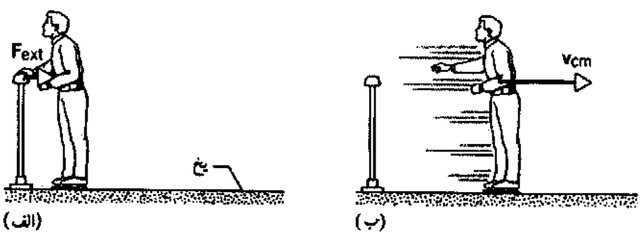
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

یعنی، پارهٔ سنگین‌تر انرژی جنبشی کمتری کسب می‌کند.

شکافت یک فرایند آماری است، یعنی‌برای پاره‌های شکافت یک توزیع جرم و متناظر با آن یک توزیع انرژی جنبشی داریم. در شکل ۱۶الف توزیع جرم و در شکل ۱۶ب توزیع انرژی جنبشی نشان داده شده است. توجه داشته باشید که شکافت به پاره‌هایی با جرمهای مساوی پدیده‌ای بسیار نادر است. معمولاً عدد جرم یکی از پاره‌ها در حدود ۱۳۸ و عدد جرم دیگری در حدود ۹۴ است. به‌این ترتیب، نسبت جرمی نوعی m_2/m_1 حدوداً برابر است با ۶۸ر۰ = ۹۴/۱۳۸، و نسبت انرژی جنبشی نوعی K_1/K_2 حدوداً برابر با ۶۸ر۰ = ۶۷MeV/۹۹MeV، یعنی (همان‌طور که انتظار می‌رود) برابر با همان نسبت جرمی نوعی است. پس سهم انرژی جنبشی هر یک از پاره‌های شکافت هم بنابر قید پایستگی تکانه تعیین می‌شود.

۹ـ۷ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)

شکل ۱۷ اسکیت‌بازی را نشان می‌دهد که به نرده‌ای فشار می‌آورد و



شکل۱۷. (الف) اسکیت‌بازی نرده‌ای را هل می‌دهد. نرده نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ بر اسکیت‌باز اعمال می‌کند. (ب) اسکیت‌باز پس از آنکه به عقب رانده شد با سرعت $\mathbf{v}_{cm}$ حرکت می‌کند.

در این فرایند انرژی جنبشی کسب می‌کند. اگر از اسکیت‌باز بپرسیم که این انرژی جنبشی از کجا می‌آید، او با توجه به فعالیت عضلانی‌اش، احتمالاً پاسخ خواهد داد که انرژی مود نیاز باید از ذخیرهٔ انرژی داخلی خودش آمده باشد. می‌خواهیم صحت ادعای اسکیت‌باز را با به‌کار بردن پایستگی انرژی در مورد سیستمی که فقط شامل اسکیت‌باز است، تحقیق کنیم.

از معادلهٔ ۲۸ فصل ۸ داریم

$$\Delta U + \Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W \qquad (۳۰)$$

در استنتاج معادلهٔ ۳۳ فصل ۸، انرژی جنبشی سیستم را به دو بخش تقسیم کردیم: ΔK_{int}، که نمایندهٔ حرکتهای داخلی ذرات در سیستم است و ΔK، که نمایندهٔ حرکت "کلی" سیستم است. در اینجا به صراحت می‌گوییم که این حرکت "کلی" در واقع همان حرکت مرکز جرم است، و انرژی جنبشی متناظر با آن عبارت است از

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \qquad (۳۱)$$

این انرژی سیستمی است به جرم کل M، اگر به‌صورت ذره‌ای با سرعت v_{cm} حرکت کند. انرژی جنبشی داخلی در معادلهٔ ۳۰ به‌صورت بخشی از ΔE_{int} منظور شده است. (مسئلهٔ ۴۹ به استخراج این قسمت از انرژی جنبشی مربوط است.)

چون سطح یخ افقی است تغییری در انرژی پتانسیل اسکیت به‌وجود نمی‌آید، بنابراین $\Delta U = 0$ است. به‌علاوه، چون نقطهٔ اعمال نیرو حرکت نمی‌کند نرده کاری روی اسکیت‌باز انجام نمی‌دهد. در بحث مربوط به شکل ۱۳ در فصل ۸ گفتیم که هرگاه کار خارجی روی سیستمی انجام شود، انرژی از طریق مرزهای سیستم به آن منتقل می‌شود. هیچ انرژی‌ای از طریق نرده به اسکیت‌باز منتقل نشده است، بنابراین نرده هیچ کار خارجی‌ای روی اسکیت‌باز انجام نداده است. به این ترتیب $W = 0$ است و معادلهٔ ۳۰ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta K_{\text{cm}} = -\Delta E_{\text{int}} \qquad (۳۲)$$

از آنجا که ΔK_{cm} کمیتی مثبت است (اسکیت‌باز در اثر هل دادن نرده انرژی جنبشی کسب می‌کند)، ΔE_{int} باید کمیتی منفی باشد. این مطلب ادعای اسکیت‌باز را تأیید می‌کند که: انرژی جنبشی کسب شده بر اثر هل دادن نرده از ذخیرهٔ انرژی داخلی خود او حاصل می‌شود، نه از منبع خارجی.

تحلیل مبتنی بر انرژی مفید است، ولی گاهی ممکن است مایل باشیم سیستم را برحسب نیروها و شتابها هم تحلیل کنیم. می‌خواهیم ببینیم که از کاربرد قانون دوم نیوتون در مورد اسکیت‌باز چه چیزی عایدمان می‌شود. نرده نیروی $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ را به اسکیت‌باز (که همچنان آن‌را سیستم در نظر می‌گیریم) اعمال می‌کند. برای اینکه اسکیت‌باز از نرده رانده شود باید بازوهای خود را به‌صورت کشیده در بیاورد. در نتیجه، ممکن است اعضای مختلف بدن او به هنگام هل دادن نرده، جابه‌جاییها، سرعتها و شتابهای متفاوت داشته باشند. پس اسکیت‌باز را نباید به‌صورت تک‌ذره در نظر گرفت، بلکه باید او را به شکل سیستمی از ذرات بررسی کرد. در این مورد، با استفاده از معادلهٔ ۱۶ می‌توانیم شتاب مرکز جرم اسکیت‌باز را معین کنیم مشروط بر آنکه نیروی خارجی اعمال شده از طرف نرده بر او را بدانیم

$$F_{\text{ext}} = M a_{\text{cm}} \qquad (۳۳)$$

برای تک‌ذره دریافتیم که‌قضیهٔ کار-انرژی ($W = \Delta K$) نتیجهٔ مفیدی است. روشن است که نمی‌توانیم این قضیه را در مورد اسکیت‌باز به‌کار ببریم، زیرا اسکیت‌باز مانند تک‌ذره حرکت نمی‌کند. چنانکه قبلاً نتیجه گرفته‌ایم $W = 0$ است ولی $\Delta K \neq 0$ است. بنابراین، صورت تک‌ذره‌ای قضیهٔ کار-انرژی دراین مورد معتبر نیست. حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ای به‌دست بیاوریم که برای سیستمی از ذرات قابل استفاده باشد.

فرض کنید نیروی خارجی خالص $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ بر سیستمی از ذرات وارد شود. در حالت کلی، در چارچوب مرجع لخت انتخابی ما، ممکن است نقطهٔ اثر نیرو حرکت بکند یا (مانند مورد اسکیت‌باز شکل ۱۷) حرکت نکند. فرض می‌کنیم که همهٔ نیروها و حرکتها در جهت x باشند. از آنجا که با سیستمی از ذرات سروکار داریم، به حرکت نقطهٔ اثر نیروی خارجی توجه نمی‌کنیم بلکه حرکت مرکز جرم سیستم را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید مرکز جرم سیستم به اندازهٔ dx_{cm} در امتداد محور x حرکت کند. اگر طرفین معادلهٔ ۳۳ را در dx_{cm} ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M a_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} v_{\text{cm}} dt$$

که در آن dv_{cm}/dt را به جای a_{cm} و $v_{\text{cm}} dt$ را به جای dx_{cm} گذاشته‌ایم. معادلهٔ ۳۳ را می‌توانیم به این‌صورت هم بنویسیم

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} \qquad (۳۴)$$

فرض کنید در حینی که این نیرو اثر می‌کند مرکز جرم از x_i تا x_f حرکت می‌کند. از معادلهٔ ۳۴، بین این حدود، انتگرال می‌گیریم

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} + dx_{\text{cm}} = \int_{v_{\text{cm,i}}}^{v_{\text{cm,f}}} M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}}$$

$$= \frac{1}{2} M v_{\text{cm,f}}^2 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm,i}}^2 \qquad (۳۵)$$

طرف راست معادلهٔ ۳۵ را با استفاده از معادلهٔ ۳۱ می‌شود به‌صورت $K_{\text{cm,f}} - K_{\text{cm,i}} = \Delta K_{\text{cm}}$ نوشت. این عبارت تغییر انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم M را، در اثر تغییر سرعت آن از $v_{\text{cm,i}}$ به $v_{\text{cm,f}}$، نشان می‌دهد.

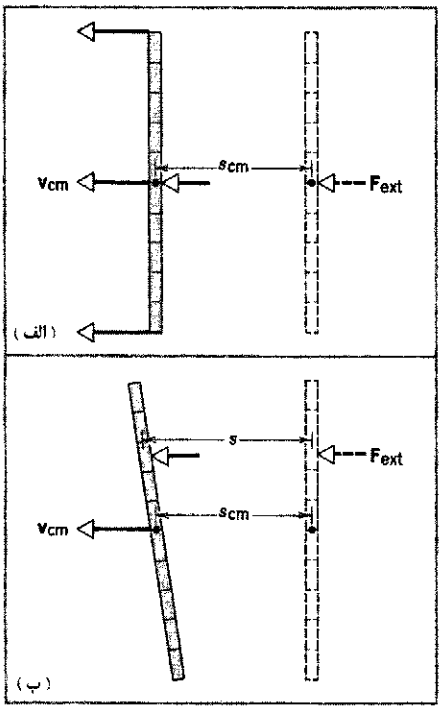
طرف چپ معادلهٔ ۳۵ قدری شبیه به تعریف کاراست، و در واقع این انتگرال دارای بعد کار هم هست. ولی این عبارت، به آن مفهومی که قبلاً کار را تعریف کرده‌ایم، کار نیست زیرا dx_{cm} جابه‌جایی نقطهٔ اثر نیروی خارجی نیست. (در تعریف کار به‌صورت $W = \int F dx$ که در فصل ۷ داشتیم، dx عبارت بود از جابه‌جایی نقطه اثر نیروی F.) توجه داشته باشید که جابه‌جایی نقطهٔ اثر نیروی خارجی در شکل ۱۷ صفر است؛ پس در این مورد $W = ۰$ است ولی طرف چپ معادلهٔ ۳۵ صفر نیست.[۱]

در بسیاری از مواردی که با آنها سروکار داریم، نیروی خارجی ثابت است و در معادلهٔ ۳۵ می‌شود آن‌را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. انتگرالِ به‌جا مانده جابه‌جایی خالص s_{cm} مرکز جرم سیستم را به‌دست می‌دهد. در این‌گونه موارد، معادلهٔ ۳۵ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm} \qquad (۳۶)$$

معادلهٔ ۳۵ شبیه قضیهٔ کار_انرژی برای تک‌ذره است، و اگر سیستم ما فقط شامل یک ذره باشد (یا از جسمی تشکیل شده باشد که بتوان آن‌را مثل ذره در نظرگرفت)، درواقع به همان نتیجه هم می‌رسد. با این همه، بین معادلهٔ ۳۵ و قضیهٔ کار_انرژی برای تک‌ذره، اختلاف مهمی وجود دارد. قضیهٔ کار_انرژی برای تک‌ذره، بیانی دربارهٔ پایستگی انرژی در حرکت یک ذره هم هست، زیرا انرژی انتقالی تنها نوع انرژی‌ای است که یک ذره می‌تواند داشته باشد. اما معادلهٔ ۳۵ به هیچ وجه بیان مناسبی برای پایستگی انرژی نیست، زیرا یک سیستم متشکل از ذرات می‌تواند شامل شکلهای دیگری از انرژی ــ از جمله انرژیهای داخلی، پتانسیل، و چرخشی ــ هم باشد. در مورد یک سیستم متشکل از ذرات، معادلهٔ ۳۵ و پایستگی انرژی (معادلهٔ ۳۰) را می‌شود به عنوان دو رابطهٔ جدا و مستقل از هم به کار برد.

به عنوان مثالی از کاربرد این اصول، می‌خواهیم حاصل اعمال نیرو به یک چوب متر را که در ابتدا ساکن است و می‌تواند آزادانه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک بلغزد، بررسی کنیم. نیروی ثابتی به مقدار F_{ext} به این جسم اعمال می‌کنیم. اگر این نیرو را در محل علامت ۵۰cm وارد کنیم (شکل ۱۸الف)، چوب متر مانند یک ذره با شتاب $a_{cm} = F_{ext}/m$ به‌حرکت در می‌آید، و تمام نقاط آن با همین شتاب حرکت می‌کنند. جابه‌جایی s نقطه‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود برابر است با جابه‌جایی s_{cm} مرکز جرم. در این حالت، وقتی همهٔ چوب‌متر (که به‌صورت یک ذره حرکت می‌کند) به‌اندازهٔ s_{cm} جابه‌جا شد، کاری به اندازهٔ $F_{ext}s$ انجام داده‌ایم. می‌توانیم صورت ذره‌ای قضیهٔ کار_انرژی را به کار ببریم و سرعت vی همهٔ نقاط چوب‌متر را به‌دست بیاوریم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که نیرو درمحل علامت ۲۵cm اثر می‌کند (شکل ۱۸ب). اگر خودتان این آزمایش را انجام بدهید می‌بینید که چوب‌متر دیگر مانند یک ذره حرکت نمی‌کند. همان‌طورکه در فصل ۱۲ خواهیم دید، این حرکت پیچیده را می‌توانیم به دو بخش تقسیم کنیم ــ یکی انتقال جسم به عنوان ذره و دیگری



شکل۱۸. (الف) چوب‌متری را با نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی هل می‌دهیم. نیرو در نقطهٔ نشانهٔ ۵۰cm وارد می‌شود. (ب) نیرو در نقطهٔ نشانهٔ ۲۵cm وارد می‌شود. در این حالت، چوب‌متر علاوه بر حرکت انتقالی به چرخش هم در می‌آید و دیگر مانند ذره عمل نمی‌کند. در این مورد نیرو در فاصلهٔ s که بزرگتر از جابه‌جایی مرکز جرم (s_{cm}) است اثر می‌کند.

چرخش آن حول مرکز جرم. نقطه‌ای که به آن نیرو وارد می‌شود مسافتی بیشتر از s_{cm} می‌پیماید (شکل ۱۸ب). بنابراین کاری که روی چوب‌متر انجام می‌دهیم بیشتر از $F_{ext}s_{cm}$ است. برای تحلیل این حرکت باید از هر دو معادلهٔ ۳۰ و ۳۶ استفاده کنیم. حاصل‌ضرب $F_{ext}s_{cm}$، بنابه معادلهٔ ۳۶، تغییر در انرژی جنبشی انتقالی چوب‌متر را به‌دست می‌دهد. حاصل‌ضرب $F_{ext}s$، که در آن s مسافتی است که نقطهٔ اثر نیرو (نشانهٔ ۲۵cm) طی می‌کند، کار W را به‌دست می‌دهد که در معادلهٔ ۳۰ آمده است، و معادلهٔ ۳۰ بیانی است از پایستگی انرژی. در فصل ۱۲ خواهیم دید که می‌توانیم بخشی از انرژی جنبشی کل را به حرکت انتقالی و بخشی را به حرکت چرخشی نسبت بدهیم.[۱]

مثال ۹. یک اسکیت‌باز ۷۲ کیلوگرمی نیروی ثابت $F = ۵۵N$ را به نرده‌ای وارد می‌کند (شکل ۱۷). مرکز جرم او تا زمانی که تماسش با نرده

۱. بعضی مؤلفان برای توصیف طرف چپ معادلهٔ ۳۵ از اصطلاح شبه‌کار، یا کارِ مرکز جرم استفاده می‌کنند. این معادله گاهی معادلهٔ مرکز جرم نامیده می‌شود. ما ترجیح می‌دهیم برای توصیف کمیتی که ارتباطی با کار در مفهوم پذیرفته شدهٔ آن ندارد، از هیچ اصطلاحی که شامل واژهٔ کار باشد استفاده نکنیم. مرور جامعی بر مفاهیم کار و انرژی در مورد سیستمهای ذرات در مرجع زیر یافت می‌شود:
"Developing the Energy Concepts in Introductory Physics," A. B. Arons, *The Physics Teacher*, October 1989, p. 506.

قطع می‌شود به اندازه $s_{cm} = ۳۲cm$ جابه‌جا می‌شود. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز در هنگام جدا شدن او از نرده چقدر است؟ (ب) در این فرایند انرژی داخلی اسکیت‌باز چقدر تغییر می‌کند؟

حل: (الف) این بار هم اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. بنابر قانون سوم نیوتون، نرده هم نیروی ۵۵N به‌سمت راست (در شکل ۱۷) به اسکیت‌باز وارد می‌کند. این نیرو تنها نیروی خارجی است که باید آن‌را در نظر بگیریم. از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{ext}s_{cm} = \frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲} - ۰$$

یا

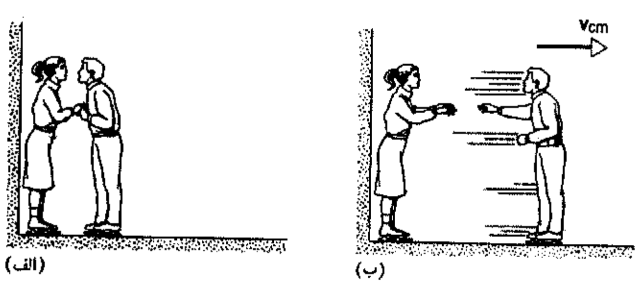
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{۲F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{۲(۵۵N)(۰٫۳۲m)}{۷۲kg}} = ۰٫۷۰m/s$$

(ب) حالا قانون پایستگی انرژی را، که در شرایط این مسئله به‌صورت معادلهٔ ۳۲ در می‌آید، به‌کار می‌بریم

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm} = -\frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲}$$
$$= -\frac{۱}{۲}(۷۲kg)(۰٫۷۰m/s)^{۲} = -۱۷٫۶J$$

این مقدار انرژی داخلی را می‌شود با خوردن تقریباً یک چهارم‌قاشق چایخوری سودای رژیمی جبران کرد.

مثال ۱۰. در این مورد، اسکیت‌باز با هل دادن همبازیش که پشت به دیوار ایستاده است به حرکت در می‌آید (شکل ۱۹الف). در آغاز دستهای هر دوی آنها خمیده است. تا زمانی که دستهایشان به حالت کشیده در بیاید و تماسشان با هم قطع شود یکدیگر را هل می‌دهند (شکل ۱۹ب). همبازی اسکیت‌باز نیروی ثابت $F_{ext} = ۵۵N$ را در طی مسافت $s = ۳۲cm$ بر او وارد می‌کند؛ این همان مسافتی است که دستهای همبازی تا زمانی که به حالت کاملاً کشیده در می‌آید طی می‌کند. تا زمانی که تماس قطع می‌شود. مرکز جرم اسکیت‌باز مسافت کل $s_{cm} = ۵۸cm$



شکل۱۹. مثال ۱۰. (الف) اسکیت‌باز و همبازیش، تا کشیده شدن کامل دستهایشان، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. همبازی پشت به دیوار ایستاده است و در نتیجه حرکت نمی‌کند. (ب) پس از آنکه دستها به حالت کشیده در آمدند، اسکیت‌باز با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

را، که در واقع مقدار کشیده‌شدگی دستان دو نفر است، طی کرده است. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز پس از قطع تماس چقدر است؟ (ب) تغییرانرژی داخلی اسکیت‌باز در طی این فرایند چقدر است؟

حل: (الف) اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در این مورد کار خارجی روی سیستم انجام شده است، بنابراین از طریق مرز سیستم باید انتقال انرژی صورت گرفته باشد. از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} = \frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲} - ۰$$

یا

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{۲F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{۲(۵۵N)(۰٫۵۸m)}{۷۲kg}} = ۰٫۹۴m/s$$

(ب) از معادلهٔ پایستگی انرژی داریم

$$\Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W$$

که در آن W (یعنی $F_{ext}s$) کار خارجی انجام شده روی اسکیت‌باز توسط همبازی‌اش است. این معادله را برای تغییر انرژی داخلی ΔE_{int} حل می‌کنیم و با استفاده از قسمت الف، به‌جای ΔK_{cm} مقدار معادلش $F_{ext}s_{cm}$ را قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{int} = W - \Delta K_{cm} = F_{ext}s - F_{ext}s_{cm}$$
$$= (۵۵N)(۰٫۳۲m) - (۵۵N)(۰٫۵۸m)$$
$$= +۱۷٫۶J - ۳۱٫۹J = -۱۴٫۳J$$

به‌این ترتیب اسکیت‌باز برای کسب انرژی جنبشی نهایی‌اش باید ۱۴٫۳J از انرژی داخلی‌اش را مصرف کند. همبازی با انجام کار روی اسکیت‌باز ۱۷٫۶J انرژی به او می‌دهد، که البته این انرژی از ذخیرهٔ انرژی داخلی همبازی تأمین می‌شود. اگر همبازی حضور نداشت و اسکیت‌باز می‌خواست همین انرژی جنبشی را با هل دادن دیوار کسب کند می‌بایست تمام ۳۱٫۹J انرژی جنبشی را از انرژی داخلی خودش فراهم می‌کرد.

مثال ۱۱. قطعه‌ای به جرم ۲٫۵ کیلوگرم با سرعت اولیهٔ افقی ۰٫۶۵ متر بر ثانیه روی سطح افقی پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه ۰٫۱۲ است. (الف) چه بر سر انرژی جنبشی اولیهٔ قطعه می‌آید؟ (ب) قطعه قبل از اینکه متوقف شود چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) برای حل این مسئله با پایستگی انرژی، مناسبترین سیستمی که می‌توانیم در نظر بگیریم عبارت است از قطعه به‌اضافهٔ آن قسمتی از سطح افقی که قطعه روی آن می‌لغزد. چون در سطح افقی هیچ تغییری در انرژی پتانسیل حاصل نمی‌شود، در معادلهٔ ۳۰

داریم $\Delta U = 0$. به‌علاوه، چون هیچ نیروی خارجی به این سیستم اثر نمی‌کند، داریم $W = 0$. (سیستم را چنان تعریف کرده‌ایم که برای آن اصطکاک یک نیروی داخلی است.) به‌این ترتیب معادلهٔ ۳۰ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta K_{\text{cm}}$$

که خود ΔK_{cm} منفی است، چون انرژی جنبشی کم می‌شود. با جانشانی مقادیر معلوم داریم

$$\Delta E_{\text{int}} = -(0 - \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2) = +\frac{1}{2}(5{,}2\text{kg})(0{,}65\text{m/s})^2$$
$$= +1{,}1\text{J}$$

این افزایش انرژی داخلی سیستم به‌صورت افزایش کوچکی در دمای قطعه و سطح ظاهر می‌شود. محاسبهٔ چگونگی تقسیم این انرژی بین قطعه و سطح دشوار است؛ و بیشتر به خاطر اجتناب از این دشواری بود که سیستم را، به‌جای قطعهٔ تنها، شامل قطعه و سطح در نظر گرفتیم.

(ب) در این مورد قطعهٔ تنها را به عنوان سیستم انتخاب می‌کنیم. در اینجا نمی‌توانیم قطعه را مانند ذره در نظر بگیریم، زیرا شکلهای دیگر تبادل انرژی، غیر از انرژی جنبشی انتقالی (در این مورد انرژی داخلی) هم در کارند. با استفاده از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}}s_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{cm}}$$

در این مورد F_{ext} نیروی اصطکاکی است (برابر با $-\mu Mg$ اگر جهت حرکت قطعه را مثبت بگیریم) که از خارج بر قطعه اثر می‌کند و s_{cm} جابه‌جایی مرکز جرم قطعه است. به این ترتیب داریم

$$(-\mu Mg)(s_{\text{cm}}) = 0 - \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$$

یا

$$s_{\text{cm}} = \frac{v_{\text{cm}}^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}65\text{m/s})^2}{2(0{,}12)(9{,}8\text{m/s}^2)} = 0{,}18\text{m}$$

۸ـ۹ سیستمهای با جرم متغیر (اختیاری)

تصور کنید ارابهٔ حامل توپ شکل ۱۴، حامل تعداد زیادی گلوله توپ هم باشد. وقتی که توپ به‌طور پیاپی شلیک می‌کند، ارابه (که فرض می‌کنیم بدون اصطکاک حرکت می‌کند) به سمت چپ پس می‌زند و در هر پس‌زنی سرعتش زیادتر می‌شود. با مرز رسم شده در شکل ۱۴، می‌دانیم که تکانهٔ افقی کل باید صفر باشد و می‌دانیم که هیچ نیروی خالص افقی بر سیستم اثرنمی‌کند. ولی اگر سیستم را چنان در نظر بگیریم که فقط شامل ارابه و توپ باشد، گفتهٔ بالا دیگر درست نیست. هر بار که توپ شلیک می‌کندتکانه‌اش افزایش می‌یابد، و بهتر است با استفاده از زبان آشنای فیزیک نیوتونی، این تغییر تکانه را به نیروی مناسبی نسبت بدهیم. در این مورد، نیرویی که توپ را شتاب می‌دهد یک نیروی واکنشی است: توپ توسط خرجِ انفجارش به گلوله‌ها نیرو وارد می‌کند و آنها را از دهانهٔ لوله به بیرون پرتاب می‌کند و نیروی واکنش (گلوله‌ها هم به توپ نیرو وارد می‌کنند) توپ را به سمت چپ می‌راند.

با شلیک پیاپی توپ، جرم کل ارابه به اندازهٔ مجموع جرم گلوله‌هایی که پرتاب شده‌اند کاهش می‌یابد. روش ارائه شده در مثال ۷ را نمی‌توان به همین سادگیها برای حل این مسئله هم به کاربرد، زیرا جرم جسم پس‌رونده، با شلیک هر گلوله، تغییر می‌کند.

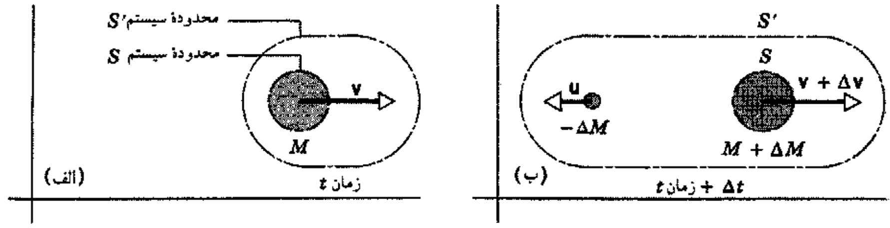
در اینجا سیستم S را که شامل توپ به‌اضافهٔ ارابه است، به عنوان سیستمی "با جرم متغیر" در نظر می‌گیریم. البته سیستم بزرگتر S' مشتمل بر ارابه، توپ، وگلوله‌های شلیک شده، سیستمی است با جرم ثابت، که (در نبود نیروی خارجی) تکانهٔ آن هم ثابت است. ولی سیستم کوچکتر S جرم ثابتی ندارد. به‌علاوه، گلوله‌های شلیک شده حامل تکانه‌اند، و تکانهٔ خالصی که از S بیرون می‌رود موجب می‌شود که این سیستم شتاب بگیرد.

مثال بالا تصور نسبتاً روشنی از چگونگی عملکرد موشک به‌دست می‌دهد. سوخت می‌سوزد و با سرعت خیلی زیادی به بیرون رانده می‌شود؛ محصولات سوخت نقش گلوله‌های توپ را دارند. شتاب موشک (منهای سوخت مصرف شده) به آهنگ مصرف سوختَ و به سرعت خروج محصولات سوخت وابسته است.

هدف از تحلیل سیستمهایی نظیر موشک این نیست که سینماتیک کل سیستم S' را مطالعه کنیم، بلکه می‌خواهیم توجه‌مان را به سیستم مشخص S معطوف کنیم و ببینیم که وقتی توزیع جرم در داخل سیستم کلی S'، و در نتیجه جرم زیر سیستم S تغییرمی‌کند، حرکت S چگونه است. جرم کل در داخل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S که مورد نظر ماست ممکن است با افزایش یا کاهش جرم (و تکانه) وضعیت حرکتی‌اش را تغییر بدهد.

شکل ۲۰ طرحی از یک سیستم تعمیم‌یافته را نشان می‌دهد. در زمان t، از چارچوب مرجع خاصی که در آن قرار داریم، مشاهده می‌کنیم که زیرسیستم S دارای جرم M است و با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. در زمان $t+\Delta t$، جرم S به‌اندازهٔ ΔM (که در صورت بیرون رفتن جرم، مقداری منفی است) تغییر کرده و به $M+\Delta M$ رسیده است، در حالی‌که جرم باقی‌ماندهٔ سیستم S' به‌اندازهٔ $-\Delta M$ تغییر کرده است. اکنون سیستم S با سرعت $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ و مادهٔ بیرون رانده شده با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند. این اندازه‌گیریها در چارچوب مرجع خودمان انجام می‌شود.

برای اینکه مسئله حتی‌الامکان کلی‌تر باشد، فرض می‌کنیم که یک نیروی خارجی F_{ext} هم می‌تواند روی کل سیستم اثر کند. این نیرو نیرویی نیست که موشک را به پیش می‌راند (نیروی پیشران برای S' یک نیروی داخلی است) بلکه نیروی ناشی از یک عامل



شکل ۲۰. (الف) سیستم S' در زمان t از جرم M تشکیل شده است که با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. (ب) اندک زمانی بعد، Δt، جرمی به اندازهٔ $-\Delta M$ از سیستم بیرون رانده شده است. در این هنگام، جرم باقی‌مانده، $M+\Delta M$، که ما آن‌را زیرسیستم S می‌نامیم، با سرعت $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ حرکت می‌کند.

خارجی، مانند گرانش یا مقاومت جو است. تکانهٔ کل مربوط به سیستم S' برابر است با $\mathbf{P}$، و قانون دوم نیوتون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (۳۷)$$

در بازهٔ زمانی Δt، تغییرتکانه برابر است با

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \qquad (۳۸)$$

که در آن $\mathbf{P}_f$ تکانهٔ نهایی سیستم S' در لحظهٔ $t+\Delta t$ و $\mathbf{P}_i$ تکانهٔ اولیهٔ سیستم S' در لحظهٔ t است. این تکانه‌ها از روابط زیرحاصل می‌شوند

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v} \qquad (۳۹\text{الف})$$

$$\mathbf{P}_f = (M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} \qquad (۳۹\text{ب})$$

پس تغییر تکانهٔ سیستم S' برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{P} &= \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \\ &= (M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در معادلهٔ ۳۷ مشتق را به‌صورت حد می‌نویسیم و $\Delta\mathbf{P}$ را از معادلهٔ بالا در آن قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{ext}} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \left[M\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\mathbf{v}\frac{\Delta M}{\Delta t}\right] \\ &= M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{dM}{dt}\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

توجه داشته باشید که در انجام عمل حدگیری، آخرین جملهٔ داخل کروشه صفر می‌شود، زیرا وقتی $\Delta t \to 0$ برود، $\Delta\mathbf{v}$ هم به صفر میل می‌کند. در معادلهٔ ۴۱، M جرم زیرسیستم S در زمان t و $d\mathbf{v}/dt$ شتاب S در وقتی است که جرمی را با سرعت $\mathbf{u}$ (در چارچوب مرجع خودمان) و با آهنگ $|dM/dt|$ به بیرون می‌راند.

معادلهٔ ۴۱ را می‌توانیم به‌صورت کمی کلی‌تر هم بنویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) - \mathbf{u}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۲)$$

معادلهٔ ۴۲ اصلاً شباهتی به $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ یا $\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}$ که قبلاً برای بررسی حرکت ذرات یا سیستمهای با جرم ثابت به‌کار بردیم، ندارد. این معادله را فقط در دو مورد خیلی خاص می‌توانیم به‌صورت قانون دوم نیوتون برای ذره در بیاوریم: ۱. وقتی $dM/dt = 0$ یعنی M ثابت باشد، که در این صورت به همان مورد سیستمهای با جرم ثابت بازگشته‌ایم، یا ۲. وقتی $\mathbf{u} = 0$ باشد، که در این صورت در واقع داریم سیستم با جرم متغیر را از چارچوب مرجع خیلی خاصی، که در آن جرم بیرون رانده شده ساکن است، مشاهده می‌کنیم.

به‌طور کلی، وقتی قانون $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ را در مورد سیستمی مانند S که جرم آن افزایش یا کاهش می‌یابد به‌کار می‌بریم، باید تغییر در تکانهٔ جرم افزوده یا کاسته شده را هم در نظر بگیریم.[1] یعنی همان‌طور که در معادلهٔ ۴۲ و شکل ۲۰ می‌بینیم، باید سیستم بزرگتر S' را که شامل سیستم S و جرم اضافی است، بررسی کنیم. این رهیافت در مورد دینامیک سیستمهای با جرم متغیر، اهمیت قانون پایستگی انرژی را به‌خوبی نشان می‌دهد و دستورالعمل نسبتاً ساده‌ای برای بررسی سیستمهای پیچیده در اختیار ما می‌گذارد.

معادلهٔ ۴۱ را به‌صورت خاصی به‌دست آورده‌ایم که می‌توانیم از آن در بررسی حرکت موشک به راحتی استفاده کنیم. کمیت $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ برابر با $\mathbf{v}_{\text{rel}}$، یعنی سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است. وارد کردن این کمیت کار معقولی است زیرا سرعت گازهای خروجی یک مشخصهٔ اساسی در طراحی موتور موشک است و نباید به صورتی

۱. یک مرجع عمومی خیلی خوب دربارهٔ سیستمهای با جرم ثابت و سیستمهای با جرم متغیر عبارت است از
"Force, Momentum Change, and Motion," *American Journal of Physics*, January 1969, p. 82. Martin S. Tiersten.

بیان شود که به چارچوب مرجعی غیراز خودِ موشک وابسته باشد. برحسب $\mathbf{v}_{rel}$، معادلهٔ ۴۱ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = F_{ext} + \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۳)$$

آخرین جملهٔ معادلهٔ ۴۳ آهنگ انتقال تکانه به داخلِ (یا خارج از) زیرسیستم S را به‌دست می‌دهد. این جمله را می‌توان به عنوان نیروی اعمال شده بر S توسط جرمی که به آن وارد یا از آن خارج می‌شود تعبیر کرد. در مورد موشک، این نیرو را نیروی پیشران می‌نامیم؛ برای اینکه نیروی پیشران هر چه بیشتر باشد، طراحان موشک می‌کوشند که هم $\mathbf{v}_{rel}$، (سرعت خروج گاز) و هم $|dM/dt|$ (آهنگ بیرون راندن جرم) را حتی‌الامکان زیاد کنند.

معادلهٔ موشک

موشکی را در فاصلهٔ دوری در فضا، جایی‌که هیچ نیروی خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند، در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم حرکت به یک بعد محدود باشد، و فرض می‌کنیم $d\mathbf{v}/dt$ جهت مثبت را، که موشک در آن شتاب می‌گیرد، معین می‌کند و بنابراین $\mathbf{v}_{rel}$، درجهتِ منفی است. معادلهٔ ۴۳ را در این مورد می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$M\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۴)$$

که در آن v_{rel} سرعت گازهای خروجی است. توجه کنید که dM/dt منفی است و در نتیجه، طرف راست معادلهٔ ۴۴ هم مانند طرف چپ آن مثبت است.

معادلهٔ ۴۴ معادلهٔ اساسی حاکم بر رفتار موشک است. در حین عملکرد پیوستهٔ موتور، نیروی پیشران (طرف راست معادلهٔ ۴۴) ثابت است (ولی شتاب حاصل برای موشک، dv/dt، ثابت نیست چون جرم M با مصرف شدن سوخت تغییر می‌کند).

می‌خواهیم تغییر در سرعت موشک را به‌ازای مصرف مقدار معینی از سوخت، m_b، است بررسی کنیم. سرعت اولیه v_i و سرعت نهایی پس از مصرف سوخت v_f است. معادلهٔ ۴۴ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M} \qquad (۴۵)$$

در معادلهٔ بالا M، جرم کل موشک، متغیر است. اگر جرم اولیهٔ موشک به اضافهٔ سوخت در شروع حرکت برابر با $M_\circ$ باشد، در هر زمان دیگر مانند t، باید جرم باقی‌ماندهٔ M به‌اضافهٔ جرم سوخت مصرف شده تا آن زمان، m_b، برابر با $M_\circ$ باشد؛ پس $M = M_\circ - m_b$ است. از معادلهٔ ۴۵ بین دو حد v_i، وقتی جرم موشک برابر $M_\circ$ است، و v_f، وقتی جرم کل برابر $M_\circ - m_b$ است، انتگرال می‌گیریم و به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel}\int_{M_\circ}^{M_\circ - m_b}\frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_{rel}\ln M\Big|_{M_\circ}^{M_\circ - m_b}$$

$$= -v_{rel}[\ln(M_\circ - m_b) - \ln M_\circ]$$

$$= -v_{rel}\ln\left(\frac{M_\circ - m_b}{M_\circ}\right) \qquad (۴۶)$$

معادلهٔ ۴۶ تغییر سرعت موشک را، پس از مصرف شدن مقدار m_b از سوخت، به‌دست می‌دهد.

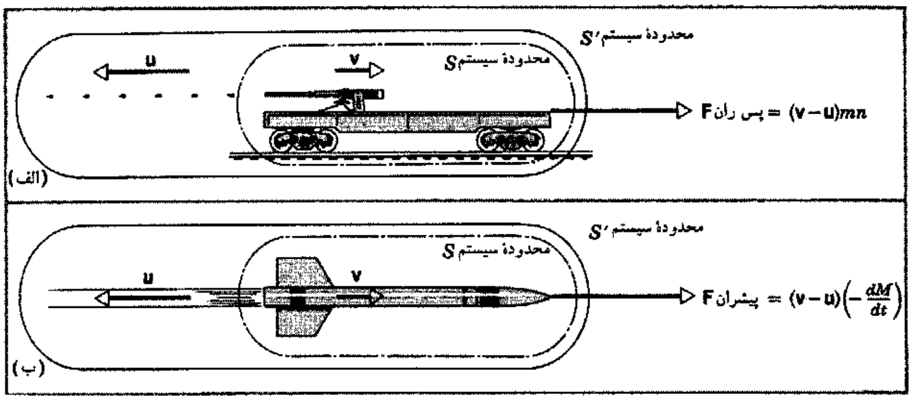
فرض کنید موشک از حال سکون ($v_i = \circ$) با جرم اولیهٔ $M_\circ$ شروع به حرکت کند و پس از مصرف تمامی سوخت با جرمی که اکنون برابر با $M_f = M_\circ - m_b$ است به سرعت پایانی v_f برسد. در این‌صورت معادلهٔ ۴۶ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{M_f}{M_\circ} = e^{-v_f/v_{rel}} \qquad (۴۷)$$

تشابه میان موشک و توپ پس‌رونده از شکل ۲۱ آشکار است. در هر دو مورد تکانهٔ کل سیستم، متشکل از جرم بیرون رانده شده (گلوله‌ها یا سوخت) به‌اضافهٔ جسمی که جرم را به بیرون رانده است، پایسته می‌ماند. وقتی که توپ یا موشک را در داخل سیستم بزرگتر بررسی می‌کنیم می‌بینیم که جرم آنها تغییر می‌کند و نیرویی بر آنها وارد می‌آید؛ نیروی "پس‌ران" در مورد توپ و نیروی "**پیشران**" در مورد موشک. اگر سیستم را از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده کنیم، در آن صورت با گذشت زمان جرم بیشتری از آن به بیرون رانده شده و این جرم (در شکل ۲۱) بیشتر به سمت چپ حرکت کرده است؛ یعنی که جسم باید بیشتر به سمت راست حرکت کرده باشد تا مرکز جرم ثابت بماند.

مثال ۱۲. جرم موشکی، که به‌طور کامل سوختگیری شده، $۱۳۶۰۰\,kg$ است. این موشک در امتداد قائم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود و تا هنگام اتمام سوخت، مقدار $۹۱۰۰\,kg$ محصولات سوخت را به خارج می‌ریزد. گازها با آهنگ $۱۴۶\,kg/s$ و با سرعت $۱۵۲۰\,m/s$، نسبت به موشک، از آن خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم که این دو کمیت در طی عمل احتراق ثابت بمانند. (الف) نیروی پیشران چقدر است؟ (ب) اگر می‌شد از همهٔ نیروهای خارجی منجمله گرانش و مقاومت هوا چشمپوشی کرد، سرعت موشک در هنگام اتمام سوخت چقدر می‌بود؟

حل: (الف) نیروی پیشران F برابر است با آخرین جملهٔ معادلهٔ ۴۳،



شکل۲۱. (الف) مسلسلی رگباری از گلوله با آهنگ n گلوله در واحد زمان شلیک می‌کند. تکانهٔ کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر نیروی پس‌زنی قرار می‌گیرد و تکانه‌اش تغییرمی‌کند. تغییر تکانهٔ S در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه‌ای که گلوله‌ها (در خلاف جهت پس‌زنی) حمل می‌کنند، یعنی $mn\ \mathbf{u}\ dt$. (ب) موشک جریانی از محصولات احتراق را به بیرون می‌راند. تکانهٔ کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر یک نیروی پیشران است که تکانه‌اش را تغییر می‌دهد. تغییر تکانهٔ موشک در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه $\mathbf{u}\ dM$ که گازهای خروجی در خلاف جهت حرکت موشک حمل کرده‌اند.

یعنی

$$F = v_{\text{rel}}\left|\frac{dM}{dt}\right| = (۱۵۲۰\,\text{m/s})(۱۴۶\,\text{kg/s})$$
$$= ۲٫۲۲ \times ۱۰^{۵}\text{N}$$

توجه داشته باشید که در ابتدا وقتی مخزنهای سوخت پر هستند، نیروی خالص بالاسویی که به موشک وارد می‌شود (با چشمپوشی از مقاومت هوا) برابر است با نیروی پیشران منهای وزن اولیهٔ Mg، یعنی برابر است با ۸۸۶۰۰N. در لحظهٔ قبل از اتمام سوخت نیروی خالص بالاسو عبارت است از نیروی پیشران منهای وزن نهایی موشک، یعنی $۱٫۷۸ \times ۱۰^{۵}\text{N}$. (ب) از معادلهٔ ۴۶ می‌توانیم سرعت موشک در لحظهٔ اتمام سوخت را محاسبه کنیم

$$v_{\text{f}} = -v_{\text{rel}}\ln\left(\frac{M_{\circ} - m_{\text{b}}}{M_{\circ}}\right)$$
$$= -(۱۵۲۰\,\text{m/s})\ln\left(\frac{۱۳۶۰۰\,\text{kg} - ۹۱۰۰\,\text{kg}}{۱۳۶۰۰\,\text{kg}}\right)$$
$$= ۱۶۸۰\,\text{m/s}$$

اگر نیروهای خارجی گرانش و مقاومت هوا را در نظر بگیریم، سرعت نهایی کمتر از این مقدار می‌شود.

مثال ۱۳. از قیف ساکنی ماسه با آهنگ dM/dt روی تسمهٔ نقاله‌ای که با سرعت v درچارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند، ریخته می‌شود (شکل ۲۲). توان لازم برای اینکه تسمه با سرعت v به حرکتش ادامه بدهد چقدر است؟

حل: شکل ۲۲ وضعیت را نشان می‌دهد. سیستم S شامل تسمهٔ نقاله و ماسهٔ انباشته شده است و ΔM نشاندهندهٔ ماسهٔ اضافه‌ای است که روی تسمه ریخته می‌شود. سیستم S' شامل تسمهٔ نقاله و همهٔ ماسهٔ موجود در قیف در آغاز حرکت است. سیستم S (تسمهٔ نقاله و ماسهٔ روی آن) با جرم متغیر M را به عنوان جسم در نظر می‌گیریم. در این مورد، در معادلهٔ ۴۱، $d\mathbf{v}/dt = ۰$ است، زیرا سرعت تسمهٔ نقاله ثابت است، و $\mathbf{u} = ۰$ است، زیرا ماسه در چارچوب مرجع آزمایشگاه سرعت افقی ندارد. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v}\frac{dM}{dt}$$

در این مثال، dM/dt مثبت است چون جرم سیستم با گذشت زمان زیاد می‌شود. پس، همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی خارجی مورد نیاز هم باید در جهت حرکت تسمه باشد. توجه داشته باشید که جرم تسمه در مسئله دخالتی ندارد، چون فرض کرده‌ایم که تسمه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

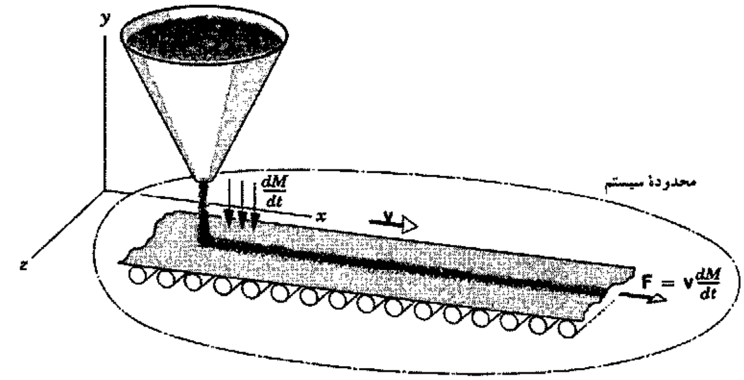
توانی که نیروی خارجی تولید می‌کند عبارت است از

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}\frac{dM}{dt}\right) = v^{۲}\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

و چون v ثابت است می‌توانیم رابطهٔ بالا را به‌صورت زیر بنویسیم

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^{۲})}{dt} = ۲\frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۲}Mv^{۲}\right) = ۲\frac{dK}{dt}$$

یعنی که توان خارجی مورد نیاز برای در حرکت نگه داشتن تسمه، دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی سیستم است؛ توجه داشته باشید که لازم نیست انرژی جنبشی خود تسمهٔ نقاله را هم در نظر بگیریم زیرا سرعت آن ثابت است و در نتیجه انرژی جنبشی‌اش تغییر نمی‌کند.



شکل۲۲. مثال ۱۳. از قیفی با آهنگ dM/dt ماسه روی تسمهٔ نقاله‌ای که با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند می‌ریزد. نیروی لازم برای اینکه تسمهٔ نقاله با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه بدهد برابر است با $\mathbf{v}dM/dt$. قیف در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است.

روشن است که در این مورد انرژی مکانیکی پایسته نیست. تنها نصف کار انجام شده توسط موتور محرک تسمه به‌صورت انرژی مکانیکی سیستم ظاهر می‌شود. چه بر سر نصف دیگر کار انجام شده آمده است؟ برای پاسخگویی به این پرسش، معادلهٔ پایستگی انرژی (معادلهٔ ۳۰) را در مورد یک عنصر جرم کوچک dM که روی تسمهٔ نقاله می‌افتد به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم این عنصر از ارتفاع خیلی کمی سقوط می‌کند و بنابراین می‌شود از تغییر انرژی پتانسیل آن چشمپوشی کرد. در بازهٔ زمانی dt که طول می‌کشد تا dM با سرعت تسمه به حرکت در بیاید، کار انجام شده توسط منبع خارجی برابر است با $dW = P_{\text{ext}}dt = v^{۲}dM$. انرژی جنبشی این عنصر هم برابر با $+۱/۲(dM)v^{۲}$ است. از معادلهٔ ۳۰ نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{\text{int}} = v^{۲}dM - \frac{۱}{۲}(dM)v^{۲} = \frac{۱}{۲}(dM)v^{۲}$$

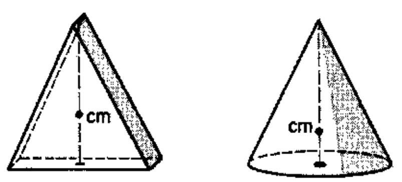
یعنی انرژی داخلی سیستم به‌اندازهٔ انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. به این ترتیب نصف توان داده شده به سیستم صرف انرژی جنبشی ماسه متحرک می‌شود، در حالی‌که نصف دیگر آن به انرژی داخلی ماسه و تسمه تبدیل می‌شود (که می‌تواند ناشی از اصطکاک میان ماسه و تسمه، بعد از افتادن ماسه روی تسمه ولی قبل از حرکت آن با سرعت تسمه، باشد).

در این مثال جرم تغییر می‌کرد ولی سرعت ثابت بود. در مواردی ممکن است سرعت سیستمی با جرم متغیر، در نتیجهٔ افزودن جرم به سیستم کاهش یابد. چنین چیزی در واقع معکوس عمل موشک است.[۱]

پرسشها

۱. آیا مرکز جرم اجسام جامد الزاماً در داخل آنها واقع می‌شود؟ اگر نمی‌شود، مثالی بزنید.

۲. شکل ۲۳ یک منشور مثلث متساوی‌الساقین و یک مخروط دوار قائم را که قطر آن برابر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین است نشان می‌دهد. مرکز جرم مثلث در فاصلهٔ ۱/۳ ارتفاع از قاعده قرار دارد در حالی‌که مرکز جرم مخروط در فاصلهٔ ۱/۴ ارتفاع از قاعده واقع است. آیا می‌توانید علت این اختلاف را توضیح بدهید؟

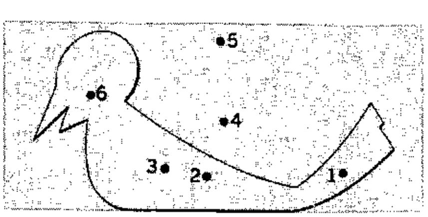


شکل ۲۳. پرسش ۲

۳. مفهوم مرکز جرم با مفهوم مرکز جغرافیایی کشور چه ارتباطی دارد؟ با مفهوم مرکز جمعیتی چطور؟ از اینکه مرکز جغرافیایی غیر از مرکز جمعیتی است چه نتیجه‌ای می‌شود گرفت؟

۴. مرکز جرم جو زمین کجاست؟

۵. مجسمه‌ساز آماتوری می‌خواهد ماکت پرنده‌ای را بسازد. خوشبختانه، مدل نهایی او (شکل ۲۴) می‌تواند سرپا بایستد. مدل با استفاده از یک ورق فلزی ضخیم با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. کدام‌یک از نقطه‌های نشان داده شده روی شکل با احتمال بیشتری می‌تواند مرکز جرم باشد؟



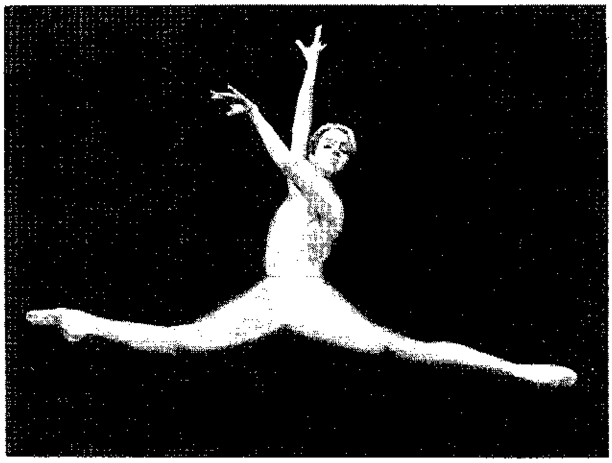
شکل ۲۴. پرسش ۵

۱. یک مقاله مفید در این مورد عبارت است از
"The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton," K. S. Krane, *American Journal of Physics*, February 1981, p. 113.

۶. کسی می‌گوید که وقتی یک قهرمان پرش ارتفاع از روی میلهٔ نشان می‌گذرد، مرکز جرم او در واقع از زیر میله عبور می‌کند. آیا چنین چیزی امکان دارد؟

۷. بالرینی در حال یک "پرش بزرگ" (شکل ۲۵) است. در قسمت میانی این پرش به نظر می‌رسد که او به‌طور افقی حرکت می‌کند. نشان بدهید که بالرین می‌تواند پاهایش را در حین پرواز حرکت طوری حرکت بدهد که مرکز جرم او واقعاً مسیرسهمی را طی کند، ولی قسمت بالای سرش کم‌وبیش در حرکت افقی باشد.[1]

۸. یک جسم سبک و یک جسم سنگین انرژی جنبشی انتقالی یکسان دارند. تکانهٔ کدام‌یک از این دو جسم بیشتر است؟



شکل ۲۵. پرسش ۷

۹. پرنده‌ای در یک قفس سیمی است که از یک ترازوی فنری آویخته شده است. وقتی این پرنده در حال پرواز است آیا عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر، کمتر، یا برابر با وقتی است که پرنده در قفس نشسته است؟

۱۰. آیا می‌شود یک قایق بادبانی را با دمیدن هوا به بادبانهای آن توسط بادبزنی که به قایق متصل است، به حرکت در آورد؟ پاسخ خودتان را توضیح بدهید.

۱۱. آیا جسمی که تکانه ندارد می‌تواند انرژی داشته باشد؟ آیا جسمی که انرژی ندارد می‌تواند تکانه داشته باشد؟ در هر مورد توضیح بدهید.

۱۲. قایقران می‌تواند، در آب آرام، با کشیدنهای تند و کوتاهِ (ضربه‌ای) طنابی که به دماغهٔ قایق بسته شده است، خودش را به ساحل برساند (واقعاً می‌تواند)؟ چگونه چنین کاری ممکن است؟

۱۳. شخصی که ساکن روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشسته است چگونه می‌تواند از جا برخیزد؟

۱۴. شخصی روی قطعه یخ بزرگ لغزنده‌ای ایستاده است و فشفشهٔ ترقه‌ای روشنی در دست دارد. او فشفشه را در زاویه‌ای (که قائم نیست) به هوا پرتاب می‌کند. حرکت مرکز جرم فشفشه و حرکت مرکز جرم سیستم مشتمل بر شخص و فشفشه را به‌طور خلاصه، ولی حتی‌الامکان دقیق، توصیف کنید. مناسبترین کار این است که هر حرکت را در حین هر یک از بازه‌های زمانی زیر توصیف کنید: (الف) پس از پرتاب فشفشه، ولی قبل از انفجار آن؛ (ب) از زمان انفجار تا وقتی که اولین قطعهٔ فشفشه به یخ برخورد می‌کند؛ (ج) از لحظهٔ برخورد اولین پاره به یخ تا لحظه‌ای که آخرین پاره به زمین می‌خورد؛ و (د) در زمانی که همهٔ پاره‌های فشفشه بر یخ فرود آمده‌اند ولی هیچ‌کدام به لبهٔ یخ نرسیده‌اند.

۱۵. درستی عبارت زیر را تحقیق کنید. "قانون پایستگی تکانهٔ خطی وقتی در مورد یک تک‌ذره به کار گرفته شود، هم‌ارز قانون اول حرکت نیوتون است."

۱۶. قطعه یخی را با سرعت $\mathbf{v}$ به فضای تخلیه‌شده و آزاد از گرانشی که داغ هم هست پرتاب می‌کنیم. یخ کم‌کم ذوب و به آب تبدیل می‌شود و بعد می‌جوشد و بخار می‌شود. (الف) آیا این مجموعه در تمام مدت فرایند سیستمی از ذرات است؟ (ب) اگر چنین است، آیا همواره همان سیستم از ذرات است؟ (ج) آیا حرکت مرکز جرم دچار تغییر ناگهانی می‌شود؟ (د) آیا تکانهٔ خطی کل تغییر می‌کند؟

۱۷. ذره‌ای به جرم $m = ۰$ (مثلاً یک نوترینو) حامل تکانه است. از دیدگاه معادلهٔ ۲۲ که در آن می‌بینیم تکانه مستقیماً متناسب با جرم است، چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۱۸. اگر فقط نیروی خارجی است که می‌تواند وضعیت حرکتی مرکز جرم یک جسم را تغییر بدهد، پس چگونه نیروی داخلی ترمزها می‌تواند اتومبیل را متوقف کند؟

۱۹. می‌گوییم که اتومبیل از نیروهای داخلی شتاب نمی‌گیرد بلکه به نیروهای خارجی وارد از جاده است که به آن شتاب می‌دهد. پس چرا اتومبیلها نیاز به موتور دارند؟

۲۰. آیا کاری که نیروهای داخلی انجام می‌دهند می‌تواند انرژی جنبشی جسمی را کاهش بدهد؟ ... افزایش بدهد؟

۲۱. (الف) اگر روی سیستمی کار انجام شود، آیا آن سیستم الزاماً انرژی جنبشی کسب می‌کند؟ (ب) اگر سیستمی انرژی جنبشی کسب کند، آیا الزاماً معنی‌اش این است که یک عامل خارجی روی آن کار انجام داده است؟ مثال بیاورید. (اینجا منظور ما از "انرژی جنبشی"، انرژی جنبشی وابسته به حرکت مرکز جرم است.)

۲۲. در مثال ۹، شاهد موردی بودیم (اسکیت‌باز) که در آن انرژی جنبشی پدید آمد ولی هیچ کار خارجی انجام نشده بود. حالا برعکس این مورد را در نظر بگیرید. یک آچار پیچ‌گوشتی را محکم در برابر یک سنگ سنباده چرخان نگه می‌داریم. در اینجا کار خارجی انجام می‌شود ولی انرژی جنبشی آچار پیچ‌گوشتی تغییر نمی‌کند. این تناقض ظاهری را توضیح بدهید.

۲۳. آیا می‌توانید نمونه‌های دیگری غیر از آنچه در متن این کتاب ارائه

---

۱. نگاه کنید به

"The Physics of Dance", Kenneth Laws, *Physics Today*, February 1985, p. 24.

شده است برای سیستمهای با جرم متغیر معرفی کنید؟

۲۴. همان‌طور که در متن کتاب مطرح شد، نمی‌توانیم از معادلهٔ $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ برای سیستمی با جرم متغیر استفاده کنیم. برای نشان دادن این مطلب (الف) معادلهٔ بالا را به‌صورت $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M\,d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ می‌نویسیم و (ب) نشان می‌دهیم که یک طرف این معادله در همهٔ چارچوبهای لخت مقدار یکسانی دارد در صورتی که طرفِ دیگر چنین نیست. پس این معادله در حالت کلی برقرار نیست. (ج) نشان بدهید که معادلهٔ ۴۲ به چنین تناقضی منجر نمی‌شود.

۲۵. در سال ۱۹۲۰ یک روزنامهٔ مشهور دربارهٔ اولین آزمایشهای موشک که توسط رابرت اچ گودارد انجام می‌شد مقاله‌ای چاپ کرد که در آن تصور اینکه موشک می‌تواند در خلأ کار کند مردود دانسته شده بود: "پروفسور گودارد، با آن "کرسی"اش در کالج کلارک و با آن حمایتی که مؤسسهٔ اسمیتسونی از او می‌کند، هنوز رابطهٔ بین کنش و واکنش را نمی‌داند، و نمی‌داند که به چیزی بهتر از خلأ نیاز دارد تا در برابر کنش آن واکنشی در کار باشد ــ واکنش به خلأ مهمل است. البته، ندانسته‌های او ظاهراً فقط همین چیزهایی است که در دبیرستان درس داده می‌شود." کجای این استدلال غلط است؟

۲۶. سرعت نهایی مرحلهٔ آخر یک موشک چند مرحله‌ای خیلی بیشتر از سرعت نهایی یک موشک تک‌مرحله‌ای با همان جرم کل و همان مقدار سوخت است. در این مورد توضیح بدهید.

۲۷. آیا یک موشک می‌تواند به سرعتی بیشتر از سرعت گازهای خروجی که آن‌را به حرکت در می‌آورد، برسد؟ در هر صورت توضیح بدهید که چرا.

۲۸. آیا، غیر از موشک، روش دیگری برای پیشروی در فضای بیرونی وجود دارد. اگر چنین روشهایی وجود دارند، کدام‌اند و چرا از آنها استفاده نمی‌شود؟

۲۹. معادلهٔ ۴۹ حاکی از آن است که اگر به قدر کافی سوخت مصرف شود سرعت موشک می‌تواند بدون محدودیت افزایش یابد. آیا این گفته منطقی است؟ محدودیت کاربرد معادلهٔ ۴۶ کدام است؟ موقع بدست آوردن معادلهٔ ۴۶ در کجا این محدودیت را اعمال کردیم؟

مسئله‌ها

بخش ۹ـ۱ سیستمهای دوذره‌ای

۱. (الف) x_1 را از معادلهٔ ۴ و v_1 را از معادلهٔ ۵ بدست بیاورید و این نتایج را همراه با معادلهٔ ۳ در معادلهٔ ۲ قرار بدهید، تا ببینید که

$$m_1^2 k d_1^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

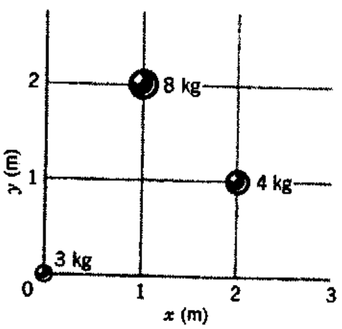
که در آن $u = Mx_2 - Mx_{\text{cm}} - m_1 L$ و $\mu = m_1 m_2/M$ است. (ب) نشان بدهید که با استفاده از روشهای ارائه شده در بخش ۸ـ۴ می‌توان معادلهٔ بالا را برای $u(t)$ حل کرد و به‌دست آورد

$$u(t) = m_1 d_1 \cos \omega t$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/\mu}$ است. (ج) از جواب فوق $x_1(t)$، $x_2(t)$، $v_1(t)$، و $v_2(t)$ را به‌دست بیاورید. این مسئله نشان می‌دهد که با معادلهٔ مرکز جرم می‌توانیم حرکتهای مربوط به m_1 و m_2 در وضعیت شکل ۱ را تحلیل کنیم.

بخش ۹ـ۲ سیستمهای بس‌ـذره‌ای

۲. مرکز جرم سه ذرهٔ نشان داده شده در شکل ۲۶ درکجا واقع است؟



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۲

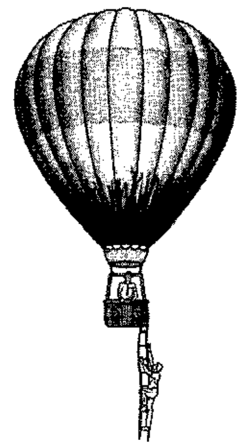
۳. مرکز جرم سیستم زمین‌ـماه در چه فاصله‌ای از مرکز زمین واقع است؟ (برای تعیین جرمهای زمین و ماه و فاصله مرکز به مرکز زمین‌ـماه به‌پیوست ج رجوع کنید. مقایسهٔ جواب این مسئله با شعاع زمین جالب است.)

۴. نشان بدهید نسبت فاصله‌های x_1 و x_2 دو ذره از مرکز جرم آنها برابر با عکس نسبت جرمهای آنهاست: یعنی $x_1/x_2 = m_2/m_1$.

۵. اتومبیلی به جرم ۲۲۱۰kg در جادهٔ مستقیمی با سرعت ۱۰۵km/h در حرکت است. اتومبیل دیگری به جرم ۲۰۸۰kg با سرعت ۴۳٫۵km/h در پی آن در حرکت است. مرکز جرم سیستم متشکل از دو اتومبیل با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶. دو اسکیت‌باز، یکی به جرم ۶۵kg و دیگری به جرم ۴۲kg، روی سطح یخزده ایستاده‌اند و دو انتهای تیری به طول ۹٫۷m را، که جرم آن قابل چشمپوشی است، در دست دارند. آنها "با کشیدن" تیر به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند تا به هم برسند. اسکیت‌باز ۴۲ کیلوگرمی چه مسافتی را طی می‌کند؟

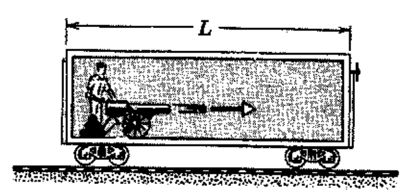
۷. مردی به جرم m در پایین نردبانِ طنابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است (شکل ۲۷). بالون نسبت به زمین ساکن است. (الف) اگر این مرد با سرعت v (نسبت به نردبان) از نردبان بالا برود، بالون در چه جهتی و با چه سرعتی (نسبت به زمین) حرکت خواهد کرد؟ (ب) وقتی که مرد از صعود باز می‌ایستد وضعیت حرکت چگونه خواهد بود؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۷

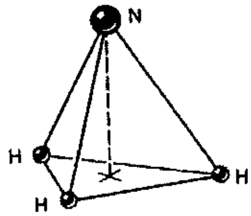
۸. دو ذرهٔ P و Q در ابتدا ساکن‌اند و ۱٫۶۴m از هم فاصله دارند. جرم ذرهٔ P برابر ۱٫۴۳kg و جرم ذرهٔ Q برابر ۴٫۲۹kg است. این دو ذره همدیگر را با نیروی ثابت $۱٫۷۹ \times ۱۰^{-۲}$N جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی روی این سیستم عمل نمی‌کند. (الف) حرکت مرکز جرم را توصیف کنید. (ب) در چه فاصله‌ای از مکان اولیهٔ ذرهٔ P، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟

۹. یک توپ و انبوهی گلولهٔ توپ در یک واگن قطار در بسته به طول L قرار گرفته‌اند (شکل ۲۸). توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس می‌رود. گلوله‌ها پس از برخورد با دیوار مقابل در داخل واگن باقی می‌مانند. (الف) پس از آنکه همهٔ گلوله‌ها شلیک شد، بیشترین فاصله‌ای که واگن از موقعیت اولیه‌اش جابه‌جا می‌شود، چقدر است؟ (ب) سرعت واگن پس از آنکه همهٔ گلوله‌ها شلیک شد چقدر است؟



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۹

۱۰. در مولکول آمونیاک (NH_3)، سه اتم هیدروژن (H) تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند، فاصلهٔ بین مرکزهای اتمها برابر با $۱۶٫۲۸ \times ۱۰^{-۱۱}$m است، به‌طوری که مرکز مثلث در فاصلهٔ $۹٫۴۰ \times ۱۰^{-۱۱}$m از هر یک از هیدروژنها قرار می‌گیرد. اتم نیتروژن (N) در رأس هرمی قرار دارد که سه هیدروژن قاعدهٔ آن را تشکیل می‌دهند (شکل ۲۹). فاصلهٔ بین نیتروژن-هیدروژن برابر با $۱۰٫۱۴ \times ۱۰^{-۱۱}$m است و نسبت جرم اتمی نیتروژن به هیدروژن ۱۳٫۹ است. موقعیت مرکز جرم این مولکول را نسبت به اتم نیتروژن معین کنید.

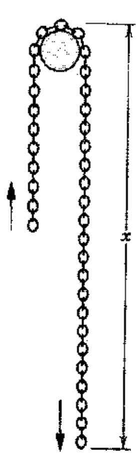


شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. دو جسم، که هرکدام از مجموعه‌ای از وزنه‌ها تشکیل شده‌اند، به‌وسیلهٔ نخ سبک‌وزنی به هم متصل شده‌اند. این نخ از روی یک قرقرهٔ سبک وزنِ بدون اصطکاک به قطر ۵۶٫۰mm می‌گذرد. هر دو جسم در یک ترازو قرار دارند. جرم هر یک از دو جسم در آغاز ۸۵۰g است. (الف) موقعیت مرکز جرم آنها را معین کنید. (ب) سی‌و چهار گرم از یک جسم را به دیگری منتقل می‌کنیم، ولی نمی‌گذاریم اجسام حرکت کنند. مرکز جرم سیستم کجاست؟ (ج) اکنون دو جسم را رها می‌کنیم. حرکت مرکز جرم سیستم را توصیف کنید و شتاب آن‌را به‌دست بیاورید.

۱۲. خمپاره‌ای توسط خمپاره‌اندازی با سرعت دهانه‌ای ۴۶۶m/s در امتداد °۵۷٫۴ بالای افق شلیک می‌شود. در بالاترین نقطهٔ مسیر، خمپاره منفجر و به دو پاره با جرمهای مساوی تقسیم می‌شود. یکی از دو پاره که سرعتش بلافاصله پس از انفجار صفر است، در امتداد قائم سقوط می‌کند. با فرض مسطح بودن زمین، پارهٔ دوم در چه فاصله‌ای از خمپاره‌انداز با زمین برخورد می‌کند؟

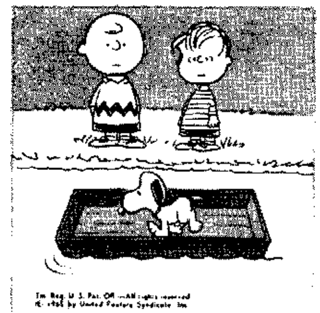
۱۳. زنجیر یکنواخت قابل انعطافی که طول آن L و وزن واحد طولش λ است از روی میخ بدون اصطکاک کوچکی می‌گذرد (شکل ۳۰). این زنجیر وقتی که طول x از یک طرف و طول $L - x$ از طرف دیگر میخ آویخته است، از حالت سکون رها می‌شود. شتاب a را به‌صورت تابعی از x پیدا کنید.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. سگی به وزن ۱۰٫۸lb روی قایق لختی ایستاده است و ۲۱٫۴ft

از ساحل فاصله دارد. این سگ $8٫50\,ft$ به طرف ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. وزن قایق $46٫4\,lb$ است و می‌توان فرض کرد که بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. در این موقع فاصلهٔ سگ از ساحل چقدر است؟ (راهنمایی: مرکز جرم قایق و سگ حرکت نمی‌کند. چرا؟) در طرف چپ شکل ۳۱ هم ساحل هست.



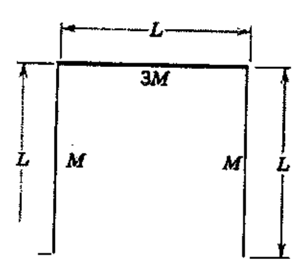
شکل ۳۱. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. دو محیط‌بان یکی به جرم $78٫4\,kg$ و دیگری که سبکتر است در یک قایق به جرم $31٫6\,kg$ مشغول گشت‌زنی روی دریاچه‌اند. وقتی قایق در آب آرام دریاچه ساکن است، آنها جاهایشان را که $2٫93\,m$ از هم فاصله دارند نسبت به مرکز قایق متقارن‌اند، با هم عوض می‌کنند. محیط‌بان اول متوجه می‌شود قایق نسبت به یک کنده شناور در آب $41٫2\,cm$ جابه‌جا شده است و از آنجا جرم محیط‌بان دوم را حساب می‌کند. جرم دومی چقدر است؟

۱۶. شخصی به جرم $84٫4\,kg$ در قسمت عقب یک قایق سورتمه‌ای ۴۲۵ کیلوگرمی که با سرعت $4٫16\,m/s$ روی یخ بدون اصطکاک حرکت می‌کند، ایستاده است. این شخص تصمیم می‌گیرد که به جلوی این قایق که $18٫2\,m$ طول دارد برود، و این کار را با سرعت $2٫08\,m/s$ نسبت به قایق انجام می‌دهد. در حینی که این شخص به سمت جلو می‌رود، قایق چقدر روی یخ جابه‌جا می‌شود؟

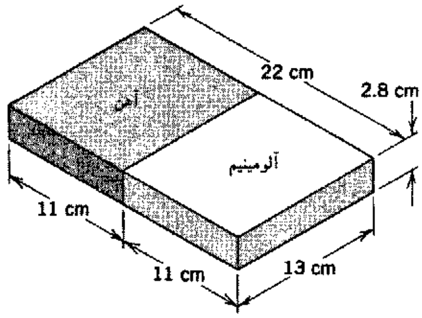
بخش ۹ـ۳ مرکز جرم اجسام جامد

۱۷. با سه میلهٔ نازک، هر یک به طول L، یک "مربع" سه ضلعی ساخته‌ایم (شکل ۳۲). جرم هر یک از دو میلهٔ متقابل M و جرم میلهٔ سوم برابر با $3M$ است. مرکز جرم این مجموعه در کجا واقع شده است؟



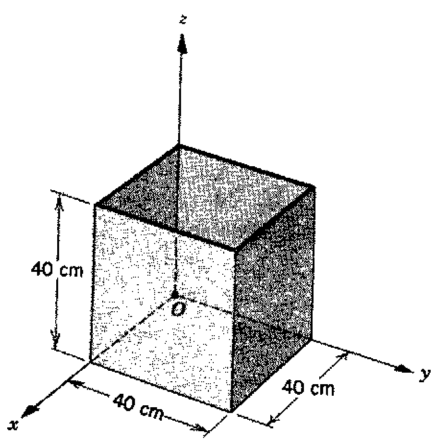
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. شکل ۳۳ تیغهٔ مرکبی به ابعاد $22٫0\,cm \times 13٫0\,cm \times 2٫80\,cm$ را نشان می‌دهد. نصف تیغه از آلومینیم با چگالی ($2٫70\,g/cm^3$) ساخته شده است و نصف دیگر از آهن (با چگالی $7٫85\,g/cm^3$ چگالی)؛ (شکل ۳۳). مرکز جرم تیغه درکجاست؟



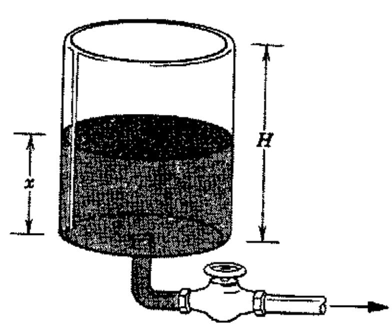
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. یک جعبه مکعبی شکل به ضلع $40\,cm$ از ورق فلزی نازکی ساخته‌ایم. این جعبه سر ندارد. مختصات مرکز جرم جعبه را در دستگاه مختصات شکل ۳۴ معین کنید.



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. بشکهٔ استوانه‌ای شکلی پر از بنزین هواپیماست. این بشکه را از طریق شیری که در ته آن تعبیه شده است تخلیه می‌کنیم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۰

(الف) حرکت مرکز جرم بشکه و باقی‌ماندهٔ محتوای آن‌را، در حین تخلیهٔ بنزین، به‌طور کیفی توصیف کنید. (ب) وقتی مرکز جرم بشکه و باقی‌ماندهٔ محتوای آن به پایین‌ترین جای ممکن می‌رسد، عمق x بنزین باقی‌مانده در بشکه چقدر است؟ جواب را برحسب ارتفاع بشکه (H)، جرم بشکه (M)، و جرم بنزینی که بشکه را پر می‌کند (m) بیان کنید.

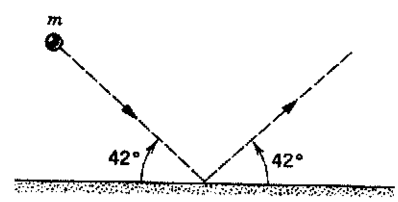
۲۱. مرکز جرم یک ورق نیمدایره‌ای همگن را تعیین کنید. شعاع دایره را R بگیرید.

بخش ۹ـ۴ تکانهٔ خطی یک ذره

۲۲. یک اتومبیل فولکس واگن ۸۱۶ کیلوگرمی با چه سرعتی حرکت کند تا (الف) تکانهٔ آن برابر تکانهٔ اتومبیل کادیلاک ۲۶۵۰ کیلوگرمی که با سرعت ۱۶٫۰km/h حرکت می‌کند باشد، و (ب) انرژی جنبشی آن با انرژی جنبشی همین کادیلاک برابر باشد؟ (ج) همین محاسبات را به‌جای کادیلاک برای یک کامیون ۹۰۸۰ کیلوگرمی انجام بدهید.

۲۳. یک وانت ۲۰۰۰ کیلوگرمی که با سرعت ۴۰٫۰km/h به سمت شمال در حرکت است به طرف شرق می‌پیچد و سرعتش به ۵۰٫۰km/h می‌رسد. (الف) تغییر انرژی جنبشی وانت چقدر است؟ (ب) مقدار و جهت تغییر تکانهٔ وانت را پیدا کنید.

۲۴. جسمی به جرم ۴٫۸۸kg با سرعت ۳۱٫۴m/s و با زاویهٔ ۴۲٫۰° به یک صفحهٔ فولادی می‌خورد و با همان سرعت و تحت همان زاویه باز می‌جهد (شکل ۳۶). تغییر تکانهٔ خطی جسم (مقدار و جهت) را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. یک گوی ۵۲٫۴ گرمی با سرعت اولیهٔ ۱۶٫۳m/s و با زاویه ۲۷٫۴° بالای افق از زمین پرتاب می‌شود. (الف) مقدار انرژی جنبشی گوی در آغاز پرتاب، و درست قبل از اینکه به زمین برخورد کند چقدر است؟ (ب) تکانه‌های (مقدار و جهت) متناظر با حالتهای بالا و تغییر تکانه را تعیین کنید. (ج) نشان بدهید که تغییر تکانه برابر است با وزن گوی ضربدر زمان پرواز آن، و از آنجا زمان پرواز را تعیین کنید.

۲۶. تکانهٔ خطی، p، ذره‌ای به جرم m برابر است با mc. سرعت آن برحسب c، سرعت نور، چقدر است؟

۲۷. نشان بدهید که معادلهٔ ۲۳ در سرعتهای $v \ll c$ به معادلهٔ ۲۱ تبدیل می‌شود. راهنمایی: نشان بدهید که معادلهٔ ۲۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

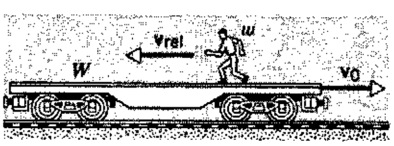
۲۸. سرعت الکترونی برابر با ۰٫۹۹۰c است. (الف) تکانهٔ خطی آن‌را برحسب kg · m/s به‌دست بیاورید. (ب) این تکانه را برحسب یکای MeV/c بیان کنید.

بخش ۹ـ۶ پایستگی تکانهٔ خطی

۲۹. یک مرد ۱۹۵ پوندی روی سطحی با اصطکاک ناچیز ایستاده است. این مرد به یک سنگ ۰٫۱۵۸ پوندی که پیش پایش قرار گرفته ضربه می‌زند و به آن سرعت ۱۲٫۷ft/s می‌دهد. در نتیجهٔ این کار، مرد با چه سرعتی به‌حرکت در می‌آید؟

۳۰. یک مرد ۷۵٫۲ کیلوگرمی سوار بر گاری‌ای است به جرم ۳۸٫۶ کیلوگرم که با سرعت ۲٫۳۳m/s در حرکت است. این مرد چنان از گاری به بیرون می‌پرد که با سرعت افقی صفر بر زمین فرود می‌آید. سرعت گاری در اثر این کار چقدر تغییر می‌کند؟

۳۱. یک واگن روباز قطار به وزن W می‌تواند روی خط آهن افقی و مستقیمی بدون اصطکاک به حرکت دربیاید. در آغاز شخصی به وزن w روی این واگن که با سرعت v_0 به‌سمت راست می‌رود ایستاده است. اگر این شخص به سمت چپ بدود و قبل از اینکه از انتهای واگن به خارج بپرد، سرعت او نسبت به واگن برابر $v_{\rm rel}$ باشد (شکل ۳۷)، تغییر در سرعت واگن چقدر است؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۳۱

۳۲. یک سورتمهٔ موشکی به جرم ۲۸۷۰ کیلوگرم با سرعت 252m/s روی یک ریل حرکت می‌کند. در یک نقطه معین، چمچه‌ای که به سورتمه وصل است درگودال پر از آبی که بین ریلها واقع شده است فرو می‌رود و آب به داخل یک مخزن خالی سوار بر سورتمه می‌ریزد. سرعت سورتمه را پس از آنکه ۹۱۷ کیلوگرم آب به مخزن ریخته شد پیدا کنید.

۳۳. یک مسلسل مخصوص در هر دقیقه ۲۲۰ گلوله لاستیکی ۱۲٫۶ گرمی را با سرعت دهانه‌ای ۹۷۵m/s شلیک می‌کند. با این مسلسل چند گلوله باید به یک جانور ۸۴٫۷ کیلوگرمی که با سرعت ۳٫۸۷m/s به طرف ما هجوم می‌آورد شلیک کنیم تا جانور در مسیر خودش متوقف شود؟ (فرض کنید گلوله‌ها افقی حرکت می‌کنند و پس از برخورد با هدف به زمین می‌افتند.)

۳۴. فضاپیمایی با سرعت ۳۸۶۰km/h نسبت به زمین در حرکت است. موتور موشکی آن که سوختش تمام شده است از سفینهٔ فرمان جدا می‌شود و با سرعت ۱۲۵km/h نسبت به سفینه به عقب رانده می‌شود. جرم موتور چهار برابر جرم سفینه است. سرعت سفینه فرمان پس از جدا شدن موتور چقدر است؟

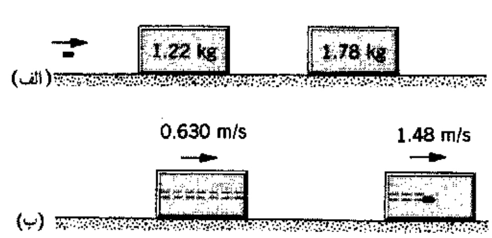
۳۵. مرحلهٔ نهایی موشکی با سرعت ۷۶۰۰m/s در حرکت است. این مرحلهٔ نهایی متشکل از دو قسمت است که به هم جفت شده‌اند، یک قسمت بدنهٔ موشک با جرم ۲۹۰ر۰kg و قسمت دیگر کلاهک با جرم ۱۵۰ر۰kg. وقتی جفت آزاد می‌شود، فنر فشرده‌ای موجب می‌شود که دو قسمت با سرعت نسبی ۹۱۰ر۰m/s از همدیگر جدا شوند. (الف) سرعت هرقسمت پس از جدا شدن چقدر است؟ فرض کنید تمام سرعتها موازی باشند. (ب) انرژی جنبشی کل دو قسمت را پیش و پس از جدایی تعیین کنید و درصورتی که اختلافی وجود دارد علت آن را بگویید.

۳۶. مخزنی در حال سکون منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. دو پارهٔ آن که جرم یکی دو برابر دیگری است عمود بر هم و با سرعت یکسان ۳۱ر۴m/s به پرواز در می‌آیند. جرم پارهٔ سوم سه برابر پارهٔ سبکتر است. بزرگی و جهت سرعت پارهٔ سوم را، بلافاصله پس از انفجار، پیدا کنید. (جهت این پاره را با تعیین زاویه امتداد حرکت آن با امتداد حرکت سبکترین پاره مشخص کنید.)

۳۷. یک هستهٔ پرتوزای ساکن با گسیل یک الکترون و یک نوترینو در جهتهای عمود بر هم، وامی‌پاشد. تکانهٔ الکترون برابر با $1.2\times10^{-22}\,\mathrm{kg.m/s}$ و تکانهٔ نوترینو برابر با $6.4\times10^{-23}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ است. (الف) بزرگی و جهت تکانهٔ هستهٔ پس‌زده را پیدا کنید. (ب) جرم هستهٔ به‌جا مانده $5.8\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$ است. انرژی جنبشی پس‌زنی آن چقدر است؟ نوترینو یکی از ذرات بنیادی طبیعت است.

۳۸. یک واگن روباز به جرم ۱۹۳۰kg، که می‌تواند روی خط آهن عملاً بدون اصطکاکی حرکت کند، درکنار سکوی ایستگاه متوقف است. یک فوتبالیست ۱۰۸ کیلوگرمی که با سرعت ۹ر۷۴m/s در امتداد سکو و موازی با ریلها می‌دود، روی واگن می‌پرد. (الف) سرعت واگن پس از آنکه این شخص بر آن سوار و در آن ساکن شد چقدر است؟ (ب) این مسافر حالا شروع به راه رفتن به سمت جلو با سرعت ۰ر۵۲۰m/s نسبت به واگن می‌کند. سرعت واگن در حین راه رفتن او چقدر است؟

۳۹. یک گلولهٔ ۳ر۵۴ گرمی به‌طور افقی به طرف دو قالب که روی میز بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارند شلیک می‌شود (شکل ۳۸الف). گلوله از قالب اول که جرم آن ۱ر۲۲kg است می‌گذرد و در داخل قالب دوم که جرم آن ۱ر۷۸kg است متوقف می‌شود. بر اثر این برخوردها قالبها به‌ترتیب سرعتهای ۰ر۶۳۰m/s و ۱ر۴۸m/s را کسب می‌کنند (شکل ۳۸ب). با چشمپوشی از مقدار جرمی که گلوله از قالب اول برداشته است، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله بلافاصله پس از خروج از قالب اول و (ب) سرعت اولیه گلوله.



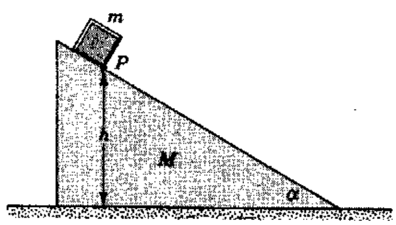
شکل ۳۸. مسئلهٔ ۳۹

۴۰. جسمی به جرم ۸ر۰kg که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی نیست، با سرعت ۲ر۰m/s حرکت می‌کند. در یک زمان معین یک انفجار داخلی روی می‌دهد و جسم به دو پاره تقسیم می‌شود. جرم هر یک از دو پاره ۴ر۰kg است، و بر اثر انفجار به این سیستم دوپاره‌ای ۱۶ ژول انرژی جنبشی انتقالی داده می‌شود. هیچ یک از دوپاره از خط اولیهٔ حرکت خارج نمی‌شود. سرعت و جهت حرکت هر پاره را تعیین کنید.

۴۱. فرض کنید واگن مسئلهٔ ۳۱ در ابتدا ساکن باشد. این واگن حامل n نفر، هر کدام به وزن w است. افراد یک به یک و به دنبال هم با سرعت نسبی v_{rel} می‌دوند و از واگن پایین می‌پرند. آیا سرعت واگن در این‌صورت بیشتر است یا وقتی که همهٔ n نفر با هم با سرعت v_{rel} واگن را ترک کنند؟

۴۲. یک توپ ۱۴۰۰ کیلوگرمی، که گلوله‌های ۷۰ر۰ کیلوگرمی را با سرعت دهانه‌ای ۵۵۶m/s شلیک می‌کند، در امتداد °۳۹ر۰ بالای افق نشانه‌روی شده است. توپ روی ریلهای بدون اصطکاکی قرار گرفته است و در نتیجه می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت گلولهٔ توپ نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) گلوله با چه زاویه‌ای نسبت به زمین پرتاب شده است؟ (راهنمایی: مؤلفهٔ افقی تکانهٔ سیستم به هنگام شلیک توپ ثابت می‌ماند.)

۴۳. قالبی به جرم m روی گوه‌ای به جرم M واقع شده و گوه هم روی یک میز افقی قرار گرفته است (شکل ۳۹). سطحهای تماس بدون اصطکاک‌اند. اگر این سیستم از حال سکون از وضعیتی که نقطهٔ P در ارتفاع h از سطح میز قرار دارد شروع به حرکت کنند، سرعت گوه در لحظه‌ای که نقطهٔ P به سطح میز می‌رسد چقدر است؟



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۴۳

بخش ۹ـ۷ کار و انرژی در سیستم ذرات

۴۴. اتومبیلی که با مسافرانش ۳۶۸۰lb (یعنی ۱۶۴۰۰N) وزن دارد، با سرعت ۷۰ر۰mi/h (یعنی ۱۱۳km/h) در حرکت است که راننده ترمز می‌کند. جاده نیروی ۱۸۵۰lb (یعنی ۸۲۳۰N) را بر چرخها وارد می‌کند و لغزشی هم در کار نیست. این اتومبیل قبل از توقف چه مسافتی را طی می‌کند؟

۴۵. از وضعیت ایستاده به حالت نیم‌خیز در می‌آیید و در این فرایند مرکز جرم خودتان را ۱۸ر۰cm پایین می‌آورید. بعد در راستای قائم به بالا می‌پرید. نیرویی که از طرف زمین در حین پرش بر شما وارد می‌شود سه برابر وزن شماست. سرعت شما به طرف بالا، وقتی از وضعیت "تمام قد" می‌گذرید و زمین را ترک می‌کنید، چقدر است؟

۴۶. شخصی به جرم ۵۵٫۰ کیلوگرم از وضعیت نیم‌خیزی که در آن مرکز جرم او ۴۰٫۰ cm بالای سطح زمین است به‌طور قائم به بالا می‌پرد. مرکز جرم او که در لحظهٔ جدا شدن از زمین ۹۰٫۰ cm بالای سطح زمین است، در این پرش تا ارتفاع ۱۲۰ cm بالا می‌رود. (الف) زمین چه نیروی بالاسویی (فرض می‌کنیم ثابت باشد) بر شخص وارد می‌کند؟ (ب) حداکثر سرعتی که شخص به‌دست می‌آورد چقدر است؟

۴۷. یک بازیکن هاکی روی یخ به جرم ۱۱۶ kg با سرعت ۳٫۲۴ m/s به طرف نرده‌ای در مرز یخ حرکت می‌کند و با دستهای کشیده شده نرده را می‌گیرد و متوقف می‌شود. در حین این توقف، مرکز جرم او ۳۴٫۰ cm به سمت نرده حرکت می‌کند. (الف) متوسط نیرویی که شخص به نرده وارد می‌کند چقدر است؟ (ب) این شخص چقدر انرژی داخلی مصرف می‌کند؟

۴۸. در یک آزمایش ایمنی، یک اتومبیل ۲۳۴۰ کیلوگرمی را با سرعت ۱۲٫۶ km/h به یک دیوار برخورد می‌دهند. در طی مدت برخورد، مرکز جرم اتومبیل به‌اندازهٔ ۶۴٫۰ cm به طرف جلو جابه‌جا می‌شود، و دیوار به اندازهٔ ۸٫۳۰ cm فشرده می‌شود. از اصطکاک اتومبیل و جاده چشم بپوشید. (الف) نیروی وارد بر اتومبیل از دیوار را (که فرض می‌کنیم ثابت است) حساب کنید. (ب) انرژی داخلی اتومبیل چقدر افزایش پیدا می‌کند؟

۴۹. فرض کنید انرژی کل یک سیستم N ذره‌ای در چارچوب مرجع دلبخواهی به‌صورت $K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ اندازه‌گیری می‌شود. در چارچوب مرجع مرکز جرم، سرعتها عبارت‌اند از $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\rm cm}$، که در آن $\mathbf{v}_{\rm cm}$ سرعت مرکز جرم نسبت به چارچوب مرجع اصلی است. با در نظر گرفتن اینکه $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ است، نشان بدهید که انرژی جنبشی را می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$K = K_{\rm int} + K_{\rm cm}$$

که در آن $K_{\rm int} = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ و $K_{\rm cm} = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$ است. این رابطه نشان می‌دهد که، همان‌طور که در بخش ۹ـ۷ بیان شد، انرژی جنبشی سیستم ذرات را می‌شود به دو قسمت تقسیم کرد؛ یک بخش انرژی داخلی و یک بخش انرژی مرکز جرم. انرژی جنبشی داخلی در چارچوبی اندازه‌گیری می‌شود که در آن مرکز جرم ساکن است؛ مثلاً، حرکتهای کتره‌ای مولکولهای گاز در یک مخزن ساکن، عامل به‌وجود آورندهٔ انرژی جنبشی انتقالی داخلی است.

بخش ۹ـ۸ سیستمهای با جرم متغیر

۵۰. موشکی در فضا، در جایی‌که عملاً گرانشی وجود ندارد، ساکن است. جرم این موشک $۲٫۵۵ \times ۱۰^۵$ kg است که مقدار $۱٫۸۱ \times ۱۰^۵$ kg آن‌را مواد سوختنی تشکیل می‌دهد. موتور با آهنگ ۴۸۰ kg/s سوخت را مصرف می‌کند و سرعت خروج گازها ۳٫۲۷ km/s است. موتور به مدت ۲۵۰ s کار می‌کند. (الف) نیروی پیشران موتور را محاسبه کنید (ب) جرم موشک پس از این مدت چقدر است؟ (ج) سرعت نهایی موشک چقدر است؟

۵۱. موشک ساکنی را در فضای تهی در نظر بگیرید. برای آنکه سرعت موشک پس از اتمام سوخت (الف) برابر سرعت گازهای خروجی و (ب) دو برابر سرعت گازهای خروجی شود، نسبت جرم (نسبت جرم اولیه به نهایی) آن باید چقدر باشد؟

۵۲. در میانهٔ مأموریتی به ماه، یک تغییر سرعت به‌اندازهٔ ۲۲٫۶ m/s برای سفینه‌ای که با سرعت ۳۸۸ m/s در حرکت است لازم می‌شود. سرعت گازهای خروجی موتور موشک برابر ۱۲۳۰ m/s است. چه کسری از جرم اولیه سفینهٔ فضایی را باید، به عنوان جرم زاید، از آن بیرون ریخت؟

۵۳. قرار است موشکی به جرم کل $۱٫۱۱ \times ۱۰^۵$ kg را که $۸٫۷۰ \times ۱۰^۴$ kg از آن مواد سوختنی است به‌طور قائم پرتاب شود. سوخت با آهنگ ثابت ۸۲۰ kg/s مصرف می‌شود. حداقل سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک چقدر باشد تا موشک بتواند شروع به پرواز کند؟

۵۴. یک سورتمهٔ ۵٫۴ کیلوگرمی که حامل ۳۵ kg ماسه است از حال سکون روی یک سطح شیبدار یخزده به طول ۹۳ متر که زاویه شیب آن °۲۶ است به پایین می‌لغزد. ماسه با آهنگ ۲٫۳ kg/s از عقب سورتمه بیرون می‌ریزد. چه مدت طول می‌کشد تا سورتمه به پایین شیب برسد؟

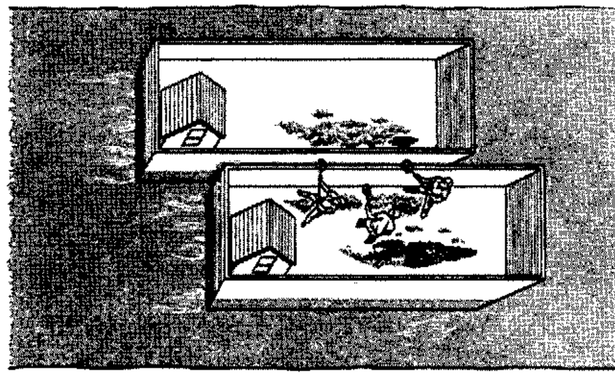
۵۵. برای در حرکت نگه داشتن یک تسمهٔ نقاله، وقتی بار حمل می‌کند نیروی محرک بیشتری لازم است تا وقتی که خالی است. اگر تسمه با سرعت ثابت ۱٫۵ m/s در حرکت باشد و بار را با آهنگ ۲۰ kg/s از یک سر تسمه روی آن قرار دهیم و از سر دیگر برداریم، چه نیروی محرک اضافی برای ثابت نگه داشتن سرعت حرکت تسمه لازم داریم؟ فرض کنید بار به طور قائم روی تسمه انداخته می‌شود و کارگرها قبل از بلند کردن بار از روی تسمه، آن‌را با دست می‌گیرند و نسبت به خودشان به حال سکون در می‌آورند.

۵۶. یک بارکش روباز به وزن ۹٫۷۵ تن متریک، با دندهٔ خلاص در یک مسیر افقی با اصطکاک ناچیز با سرعت ۱٫۳۶ متر بر ثانیه در حرکت است که باران تندی شروع می‌شود. قطره‌های باران در امتداد قائم نسبت به زمین فرو می‌ریزند. سرعت این بارکش وقتی به اندازهٔ ۰٫۵۰ تن متریک آب در آن جمع شده است چقدر است؟ برای به‌دست آوردن این جواب چه فرضی (اگر لازم باشد) کرده‌اید؟

۵۷. موشکی به جرم ۵۸۶۰ kg آماده پرواز قائم است. سرعت خروج گازها ۱٫۱۷ km/s است. برای اینکه در هر یک از موارد زیر نیروی پیشران کافی باشد، چه مقدار جرم باید درهر ثانیه از موشک خارج شود؟ (الف) برای خنثی کردن نیروی وزن، (ب) برای اینکه موشک با شتاب اولیه ۱۸٫۳ m/s² شروع به حرکت کند. توجه داشته باشید که، بر خلاف مثال ۱۲، در این مورد گرانش به عنوان یک نیروی خارجی روی موشک عمل می‌کند.

۵۸. دو یدک‌کش دراز در آبِ ساکن در یک جهت در حرکت‌اند. سرعت یکی ۹٫۶۵ km/h و سرعت دیگری ۲۱٫۲ km/h است. وقتی ازکنار هم می‌گذرند زغال سنگ با آهنگ ۹۲۵ کیلوگرم در دقیقه از یدک‌کش کندتر به داخل یدک‌کش تندتر ریخته می‌شود؛ (شکل ۴۰).

اگر قرار باشد سرعت هیچ‌کدام از یدک‌کشها تغییر نکند، چه مقدار نیروی اضافی باید توسط موتورهای آنها تأمین شود؟ فرض کنید که جابه‌جایی سنگ کاملاً به‌طور جانبی صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین یدک‌کشها و آب به وزن آنها بستگی ندارد.



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. هواپیمای جتی با سرعت ۱۸۴m/s (یعنی ۶۰۴ft/s) در حرکت است. موتور این هواپیما در هر ثانیه ۶۸٫۲m^3 (یعنی ۲۴۱۰ft^3) هوا به جرم ۷۰٫۲kg (یعنی ۴٫۸۱slug) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن ۲٫۹۲kg (یعنی ۰٫۲۰۰slug) سوخت در هرثانیه مصرف می‌شود. با استفاده از انرژی حاصل از احتراق سوخت، مواد حاصل از احتراق فشرده می‌شوند و از قسمت عقب موتور با سرعت ۴۹۷m/s (یعنی ۱۶۳۰ft/s)، نسبت به هواپیما، به بیرون رانده می‌شوند. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) توانی که به هواپیما داده می‌شود چقدر است؟

۶۰. ریسمان قابل انعطافِ ناکشسانی به طول L را از داخل لولهٔ صافی می‌گذرانیم و ریسمان می‌تواند به‌راحتی در لوله حرکت کند. لوله یک خم راستگوشه دارد که در صفحهٔ قائم چنان قرارگرفته است که یک شاخه‌اش قائم و شاخهٔ دیگرش افقی است. ابتدا، در $t = 0$، طول y_0 از ریسمان در داخل لوله آویخته است. ریسمان را رها می‌کنیم تا شروع به لغزیدن در داخل لوله کند. t ثانیه پس از رها شدن، ریسمان با سرعت dy/dt حرکت می‌کند؛ $y(t)$ طول قسمت آویختهٔ ریسمان است. (الف) نشان بدهید که بنابر فرمولبندی مسئلهٔ جرم متغیر، $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = 0$ است و بنابراین، معادلهٔ حرکت به‌صورت $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ در می‌آید. (ب) نشان بدهید که معادلهٔ حرکت، در این مورد، عبارت است از $d^2y/dt^2 = gy$. (ج) نشان بدهید که پایستگی انرژی مکانیکی به معادلهٔ $(dy/dt)^2 - gy^2 = \mathrm{const.}$ می‌انجامد، و این جواب با قسمت (ب) سازگار است. (د) نشان بدهید که $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ جوابی برای معادلهٔ حرکت است (با جانشانی در قسمت ب)، و دربارهٔ این معادله بحث کنید.

۱۰

برخورد

یکی از کاربردهای مهم پایستگی تکانهٔ خطی، بررسی برخورد میان اجسام است. این اجسام به هر اندازه‌ای هم که باشند (از ذرات بنیادی گرفته تا کهکشانها) و هر نیرویی هم که دخیل باشد (از نیروی هسته‌ای، قوی‌ترین، تا نیروی گرانش، ضعیف‌ترین) قانون پایستگی تکانهٔ خطی صادق است و امکان مطالعهٔ این فرایندها را فراهم می‌کند.

در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرایندهای برخورد را با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه تحلیل کرد، و مثالهایی از قلمرو فیزیک زیر اتمی می‌آوریم که نشان می‌دهد چگونه می‌توان از بررسی نتایج انواع مختلف برخوردها، اطلاعات اساسی دربارهٔ جهان فیزیکی به‌دست آورد.

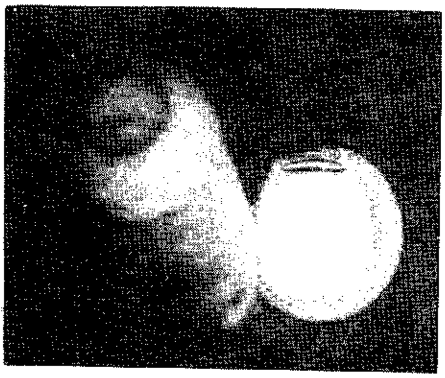
۱۰ـ۱ برخورد چیست

در برخورد، در زمانی نسبتاً کوتاه نیروی نسبتاً بزرگی به هر کدام از ذرات برخوردکننده اثر می‌کند. نظر اصلی دربارهٔ برخورد این است که حرکت ذره‌های برخوردکننده (یا دست‌کم یکی از آنها) به‌طور تقریباً ناگهانی تغییر می‌کند و در نتیجه می‌توانیم، کم‌وبیش به وضوح، زمانهای "قبل از برخورد" و "بعد از برخورد" را از هم تفکیک کنیم.

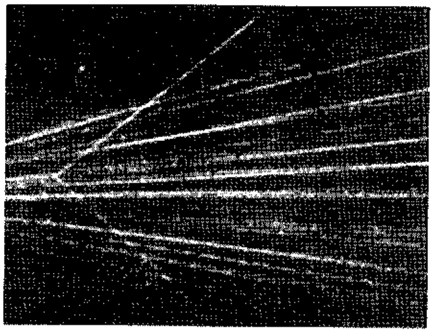
مثلاً، وقتی چوبدست به توپ بیسبال برخورد می‌کند، آغاز و پایان برخورد را می‌توان به‌طور نسبتاً دقیق تعیین کرد. زمان تماس چوبدست و توپ در مقایسه با مدتی که ما توپ را زیر نظر داریم بسیار کوتاه است. در حین برخورد، چوبدست نیروی بزرگی به توپ وارد می‌کند (شکل ۱). این نیرو چنان پیچیده با زمان تغییر می‌کند که مشکل می‌توانیم اندازه‌گیری‌اش کنیم. هم توپ و هم چوبدست در حین برخورد تغییر شکل می‌دهند. به نیروهایی که مدت اثر آنها در مقایسه با مدت زمان مشاهده سیستم کوتاه باشد نیروهای ضربه‌ای می‌گوییم.

وقتی یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ ^4He) با هستهٔ دیگری برخورد می‌کند (شکل ۲)، نیروی مؤثر میان آنها می‌تواند همان نیروی رانشی الکتروستاتیکی وابسته به بارهای این ذره‌ها باشد. ذره‌ها ممکن است عملاً در تماس با یکدیگر قرار نگیرند، اما باز هم این رویداد را برخورد می‌نامیم چون نیرویی نسبتاً قوی، در مدتی که در مقایسه با مدت مشاهدهٔ ذرهٔ آلفا کوتاه است، بر این ذره اثر می‌کند و تأثیری جدی بر حرکت آن می‌گذارد.

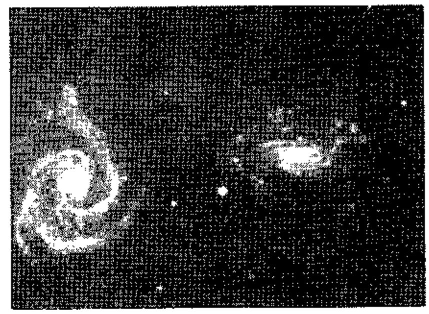
اگر این آمادگی را داشته باشیم که مدت مشاهده را به مقیاس زمانی



شکل۱. عکسی که با سرعت زیاد از برخورد چوبدست با توپ بیسبال گرفته شده است. به تغییر شکل توپ توجه کنید؛ این تغییر شکل حاکی از نیروی ضربه‌ای بزرگی است که بر توپ وارد می‌شود.



شکل۲. یک ذرهٔ آلفا در اتاقک ابر با یک هستهٔ هلیم برخورد می‌کند. اغلب ذرات ورودی (که از سمت چپ می‌آیند) بدون برخورد از اتاقک می‌گذرند.



شکل۳. برخورد دو کهکشان.

میلیونها یا میلیاردها، سال افزایش بدهیم، می‌توانیم حتی راجع به برخورد بین کهکشانها صحبت کنیم (شکل ۳). (البته یک راه عملی‌تر برای کوتاه کردن زمانهایی به این عظمت، استفاده از مدل‌سازی کامپیوتری است!)

برخوردهای میان ذرات بنیادی، منبع اصلی اطلاعات دربارهٔ ساختار داخلی آنهاست. وقتی دو ذره با انرژی زیاد با هم برخورد می‌کنند، محصولات برخورد اغلب با ذره‌های اصلی کاملاً فرق دارند (شکل ۴). گاهی در این برخوردها صدها ذرهٔ محصول تولید می‌شود، که جرم کل آنها ممکن است خیلی بیشتر از جرم ذره‌های برخوردکننده باشد (در این مورد انرژی جنبشی ذره‌های برخوردکننده در فرایند برخورد به انرژی سکون تبدیل می‌شود.) با مطالعهٔ مسیر ذره‌های خروجی و به کار بردن قوانین بنیادی پایستگی، می‌توانیم رویداد اصلی را بازسازی کنیم.

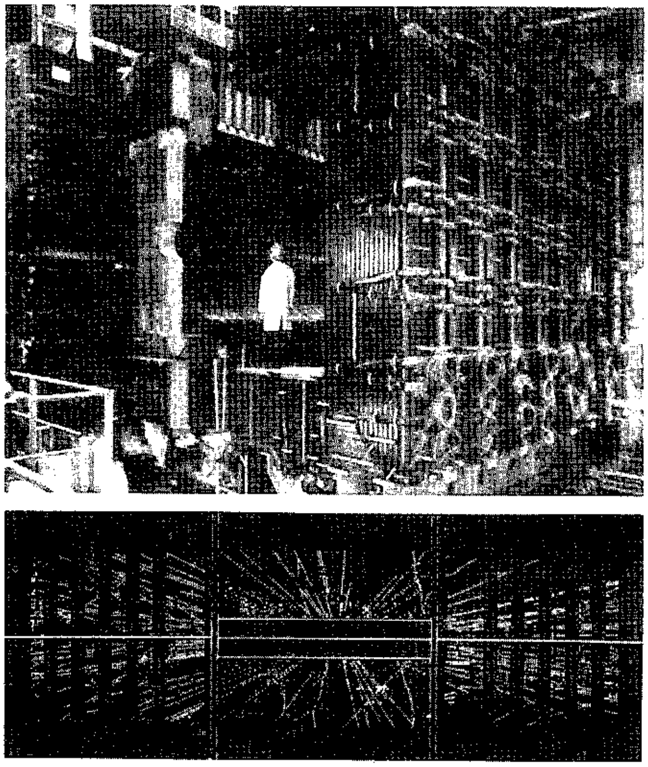
در زمینه‌ای دیگر، در بررسی تصادفات رانندگی هم سعی می‌کنند برخوردها را بازسازی کنند. از مسیرها و نقشهای برخورد اتومبیلهای درگیر در برخورد (شکل ۵)، اغلب می‌توان جزئیات مهمی مانند سرعت و جهت حرکت دو اتومبیل در لحظات قبل از برخورد را استنتاج کرد.

نوع دیگری از برخورد عبارت است از برخورد میان یک کاوهٔ فضایی و یک سیاره، که به آن "اثر تیرکمان" گفته می‌شود. در این برخورد می‌توان سرعت و جهت کاوهٔ فضایی را در "مواجههٔ نزدیک" با یک سیاره (متحرک) تغییر داد. کاوهٔ فضایی واقعاً با سیاره تماس پیدا نمی‌کند، ولی در یک بازهٔ زمانی کوتاه در مقایسه با کل مدت سفر، این کاوه به‌شدت تحت تأثیر گرانش سیاره قرار می‌گیرد. پس موجه است که چنین مواجهه‌ای را هم "برخورد" بنامیم (مسئلهٔ ۴).

۱۰ـ۲ ضربه و تکانه

منظور ما از مطالعهٔ برخورد در این فصل آن است که ببینیم با استفاده از اصول پایستگی تکانه و انرژی و با دانستن حرکت اولیهٔ ذرات برخوردکننده و با این فرض که چیزی از نیروهای مؤثر در حین برخورد نمی‌دانیم، چه اطلاعاتی دربارهٔ حرکت نهایی ذرات درگیر در برخورد می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

فرض کنید شکل ۶ نمودار مقدارِ نیروی خالص وارد بر یک جسم در حین یک برخورد باشد. این برخورد در لحظهٔ t_i شروع می‌شود و



(الف)

(ب)

شکل۴. (الف) آشکارساز عظیم UA1 که در برخورددهندهٔ پروتون-پروتون در سرن (CERN) از آن استفاده می‌شود. سرن یک مؤسسهٔ تحقیقاتی در کار فیزیک ذرات است که در نزدیکی شهر ژنو در کشور سوئیس قرار دارد. (ب) یک بازسازی کامپیوتری از مسیرهای ذرات تولیدشده در یک برخورد پروتون-پروتون. چنین بازسازیهایی در سال ۱۹۸۳ برای اثبات وجود ذراتی که W و Z نامیده می‌شوند به‌کارگرفته شد. وجود این ذرات مؤید نظریه‌ای است که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هسته‌ای ضعیف را دو نمود متفاوت از یک نیروی واحد بنیادی‌تر می‌داند.

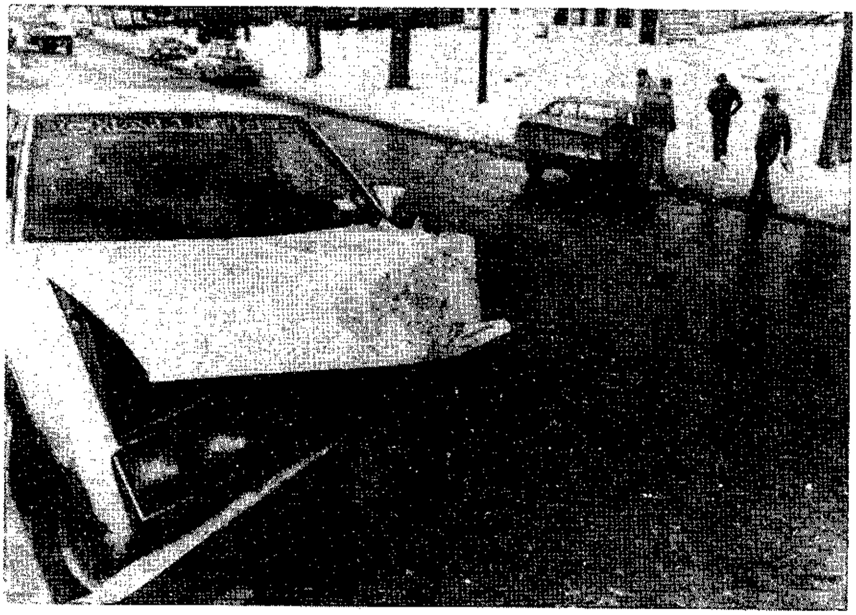
در لحظهٔ t_f پایان می‌یابد. نیروهای مؤثر قبل و بعد از برخورد برابر با صفرند. از قانون دوم نیوتون به‌صورت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$، می‌توانیم تغییر تکانهٔ $d\mathbf{p}$ یک ذره را که به مدت dt تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار گرفته است به شکل زیر بنویسیم

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt$$

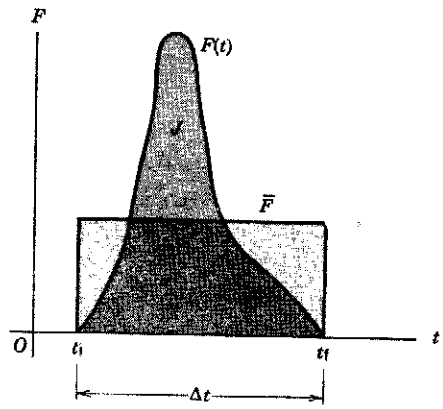
تغییر تکانهٔ یک جسم در خلال یک برخورد را می‌توانیم با انتگرال‌گیری روی مدت برخورد، یعنی، بین شرایط اولیه (تکانهٔ $\mathbf{p}_i$ در زمان t_i) و شرایط نهایی (تکانهٔ $\mathbf{p}_f$ در زمان t_f)، تعیین کنیم

$$\int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \qquad (۱)$$

سمت چپ معادلهٔ ۱ همان تغییر تکانه، $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$، است. سمت راست معادلهٔ ۱ را، که هم به شدت نیرو و هم به مدت زمان اثر آن بستگی



شکل۵. برخورد بین دو اتومبیل. قسمت اعظم انرژی جنبشی اولیه به انرژی تغییر شکل دو اتومبیل تبدیل شده است. متخصصان بازسازی تصادفها از پایستگی تکانه برای محاسبهٔ سرعتهای قبل از برخورد استفاده می‌کنند.



شکل۶. نیروی ضربه‌ای $F(t)$ در حین برخوردی که از t_i تا t_f طول می‌کشد به شکل دلبخواهی تغییر می‌کند. سطح زیرمنحنی $F(t)$ برابر ضربهٔ J است و مستطیلی که به نیروی میانگین $\overline{F}$ محدود شده است همان مساحت را دارد.

دارد، ضربه نیرو، $\mathbf{J}$، می‌نامند

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \qquad (۲)$$

و از معادلهٔ ۱ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \qquad (۳)$$

معادلهٔ ۳ بیان ریاضی قضیهٔ ضربه‌ـتکانه است:

ضربهٔ نیروی خالص وارد بر یک ذره در یک بازهٔ زمانی معین برابر است با تغییر تکانهٔ آن ذره در آن بازهٔ زمانی.

ضربه و تکانه هر دو بردارند و یکاها و ابعاد یکسان دارند.

گرچه در این فصل از معادلهٔ ۳ فقط در مواردی استفاده می‌کنیم که نیروهای ضربه‌ای (یعنی نیروهایی که زمان تأثیر آنها در مقایسه با زمان مشاهده کوتاه است) در کارند، ولی چنین محدودیتی برای این معادله ذاتی نیست. معادلهٔ ۳ همان کلیت قانون دوم نیوتون را دارد، کما اینکه خودش هم از همین قانون به‌دست آمده است. مثلاً، از معادلهٔ ۳ می‌توانیم برای پیدا کردن تکانه‌ای که جسمی بر اثر سقوط در میدان گرانشی زمین کسب می‌کند استفاده کنیم.

قضیهٔ ضربه‌ـتکانه خیلی شبیه قضیهٔ کارـانرژی است که در فصل ۷ به‌دست آوردیم. هر دو قضیه در مورد تک‌ذره به‌کار می‌روند و هر دو مستقیماً از قانون دوم نیوتون ناشی شده‌اند. کار شامل انتگرال نیروی خالص روی مکان است، در حالی‌که ضربه شامل انتگرال نیروی خالص روی زمان است. قضیهٔ کارـانرژی یک معادلهٔ اسکالر است که با تغییرات انرژی جنبشی ذره سروکار دارد، در حالی‌که قضیهٔ ضربه‌ـتکانه یک معادلهٔ برداری است که به تغییرات تکانهٔ ذره مربوط می‌شود.

فرض کرده‌ایم نیروی ضربه‌ای که مقدار آن در شکل ۶ نشان داده شده است جهت ثابتی دارد. مقدار ضربهٔ این نیرو با سطح زیرمنحنی $F(t)$ نشان داده می‌شود. این ساختار را می‌توانیم با مستطیل شکل ۶ به عرض Δt و ارتفاع $\overline{F}$ نشان بدهیم، که $\overline{F}$ مقدار نیروی متوسطی است که در طی بازهٔ زمانی Δt اثر می‌کند. به این ترتیب

$$J = \overline{F}\, \Delta t \qquad (۴)$$

در برخوردهایی نظیر برخورد توپ و چوبدست (شکل ۱)، اندازه‌گیری مستقیم $F(t)$ دشوار است، ولی می‌توانیم Δt را تخمین بزنیم (شاید چند میلی‌ثانیه) و مقدار معقولی از $\overline{F}$ به‌دست بیاوریم. این محاسبه

مبتنی بر ضربه‌ای است که بنابر معادلهٔ ۳ از تغییر تکانهٔ توپ محاسبه می‌شود (مثال ۱).

۳ـ۱۰ پایستگی تکانه در حین برخورد

اکنون برخورد بین دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را در نظر بگیرید (شکل ۷). در طی مدت کوتاه برخورد، این دو ذره نیروهای بزرگی بر یکدیگر وارد می‌کنند. در هر لحظه $\mathbf{F}_{12}$ نیرویی است که از ذرهٔ ۲ بر ذرهٔ ۱ وارد می‌شود و $\mathbf{F}_{21}$ نیرویی است که ذرهٔ ۱ بر ذرهٔ ۲ وارد می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتون این نیروها مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ ذرهٔ ۱ برابر است با

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12} dt = \overline{\mathbf{F}}_{12} \Delta t \qquad (۵)$$

که در آن $\overline{\mathbf{F}}_{12}$ عبارت است از مقدار متوسط نیروی $\mathbf{F}_{12}$ در مدت برخورد، یعنی در $\Delta t = t_f - t_i$.

تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ ذرهٔ ۲ برابر است با

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt = \overline{\mathbf{F}}_{21} \Delta t \qquad (۶)$$

که در آن $\overline{\mathbf{F}}_{21}$ عبارت است از مقدار متوسط نیروی $\mathbf{F}_{21}$ در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_f - t_i$.

اگر هیچ نیروی دیگری بر این ذرات وارد نشود $\Delta \mathbf{p}_1$ و $\Delta \mathbf{p}_2$ تغییر تکانهٔ کل هر یک از ذرات را به‌دست می‌دهد. دیدیم که در هر لحظه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ و در نتیجه $\overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21}$ است، پس

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2 \qquad (۷)$$

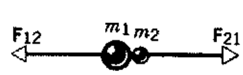
اگر دو ذره را به عنوان یک سیستم منزوی در نظر بگیریم، در آن صورت تکانهٔ کل سیستم عبارت است از

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad (۸)$$

و کل تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ سیستم صفر است، یعنی

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0 \qquad (۹)$$

پس، اگر هیچ نیروی خارجی در کار نباشد، تکانهٔ کل یک سیستم دوـذره‌ای در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. این عبارت بیانی است از قانون پایستگی تکانهٔ خطی (بخش ۹ـ۶) که در مورد یک سیستم دوذره‌ای



شکل ۷. دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 در برخورد با یکدیگر نیروهای مساوی و مخالف مبادله می‌کنند.

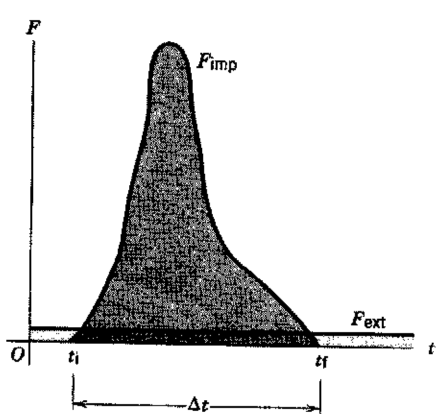
به‌کارگرفته شده است. نیروهای ضربه‌ای مؤثر در طی برخورد، نیروهای داخلی‌اند و اثری بر تکانهٔ کل سیستم ندارند.

برخورد را به‌صورت برهم‌کنشی تعریف کردیم که در مدت زمان Δt، که در مقایسه با زمانی که سیستم را مشاهده می‌کنیم قابل چشمپوشی است، انجام می‌شود. می‌توانیم آن‌را به‌صورت رویدادی هم که در آن نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد قابل چشمپوشی‌اند (مثال ۱) در نظر بگیریم. وقتی "چوبدست" به توپ بیسبال یا به توپ گلف برخورد می‌کند، یا دو گوی بیلیارد به یکدیگر اصابت می‌کنند، نیروهای خارجی هم روی این سیستمها اثر می‌کند. مثلاً، گرانش یا اصطکاک می‌توانند به سیستم نیرو وارد کنند؛ این نیروها ممکن است بر روی اجسام برخوردکننده یکسان نباشند و الزاماً توسط نیروهای خارجی دیگری خنثی نشوند. با این همه، صرفنظر کردن از نیروهای خارجی در حین برخورد کاملاً موجه است و می‌توان فرض کرد تکانه پایسته است مشروط بر اینکه این نیروهای خارجی در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد خیلی کوچک باشند، که معمولاً هم هستند. در نتیجه، تغییر ناشی از نیروی خارجی در تکانهٔ ذره در حین برخورد در مقایسه با تغییر ناشی از نیروی ضربه‌ای قابل چشمپوشی است (شکل ۸).

مثلاً، در برخورد چوبدست به توپ بیسبال، که فقط چند میلی ثانیه طول می‌کشد، چون تغییر تکانهٔ توپ بزرگ است و زمان برخورد کوچک، از رابطهٔ

$$\Delta \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}}\, \Delta t$$

نتیجه می‌شود که نیروی ضربه‌ای متوسط، $\overline{\mathbf{F}}$، نسبتاً بزرگ است. نیروی خارجی گرانش در مقایسه با این نیرو، قابل اغماض است. برای تعیین تغییر حرکت توپ می‌توانیم از این نیروی خارجی بی هیچ نگرانی چشمپوشی کنیم؛ هر چه زمان برخورد کوتاهتر باشد این کار موجه‌تر است.



شکل ۸. نیروی ضربه‌ای F_{imp} در حین برخورد معمولاً خیلی شدیدتر از هر نیروی خارجی دیگری (F_{ext} که در اینجا آن‌را ثابت گرفته‌ایم) است که ممکن است بر سیستم اثر کند.

بنابراین، در عمل می‌توانیم قانون پایستگی تکانه را در برخوردها به‌کار ببریم به این شرط که زمان برخورد به‌اندازهٔ کافی کوتاه باشد. در این صورت می‌توانیم بگوییم که تکانهٔ سیستم درست در لحظات قبل و بعد از برخورد ذرات، یکی است.

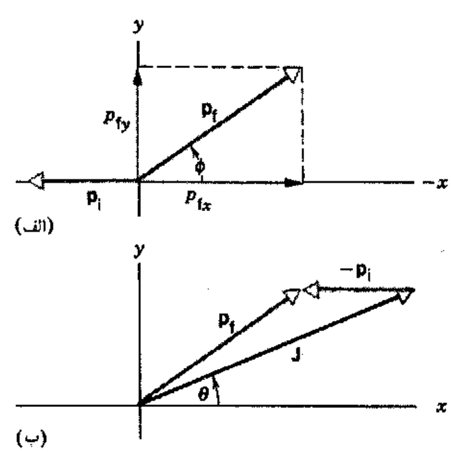
مثال ۱. توپ بیسبالی (که وزن آن حدوداً ۵ اونس است) با سرعت افقی 93mi/h (حدود ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت) در حرکت است که با چوبدستی به آن ضربه وارد می‌شود. این توپ چوبدست را در امتداد زاویه $\phi = ۳۵°$ بالاتر از مسیر فرودش با سرعت ۱۸۰km/h ترک می‌کند. (الف) ضربهٔ نیروی وارد بر توپ را تعیین کنید. (ب) فرض کنید برخورد ۱٫۵ میلی‌ثانیه ($۰٫۰۰۱۵\text{s}$) طول بکشد نیروی متوسط چقدر است؟ (ج) تغییر تکانهٔ چوبدست را پیدا کنید.

حل: (الف) شکل ۹الف تکانهٔ اولیهٔ $\mathbf{p}_\text{i}$ و تکانهٔ نهایی $\mathbf{p}_\text{f}$ مربوط به توپ بیسبال را نشان می‌دهد. جرم متناظر با 5oz برابر $۰٫۱۴\text{kg}$ است و سرعت نهایی توپ (برحسب یکای مناسبتر) ۵۰m/s است. مؤلفه‌های تکانهٔ نهایی عبارت‌اند از

$$p_{\text{f}x} = mv_\text{f}\cos\phi = (۰٫۱۴\text{kg})(۵۰\text{m/s})(\cos ۳۵°)$$
$$= ۵٫۷\text{kgm/s}$$
$$p_{\text{f}y} = mv_\text{f}\sin\phi = (۰٫۱۴\text{kg})(۵۰\text{m/s})(\sin ۳۵°)$$
$$= ۴٫۰\text{kgm/s}$$

در این دستگاه مختصات، تکانهٔ اولیه فقط دارای مؤلفهٔ x است، که مقدار آن (منفی) برابر است با

$$p_{\text{i}x} = mv_\text{i} = (۰٫۱۴\text{kg})(-۴۲\text{m/s}) = -۵٫۹\text{kgm/s}$$



شکل۹. مثال ۱. (الف) تکانه‌های اولیه و نهایی بیسبال. (ب) اختلاف $\mathbf{p}_\text{f} - \mathbf{p}_\text{i}$ برابر است با ضربهٔ $\mathbf{J}$.

اکنون می‌توانیم ضربه را به‌دست بیاوریم

$$J_x = p_{\text{f}x} - p_{\text{i}x} = ۵٫۷\text{kgm/s} - (-۵٫۹\text{kgm/s})$$
$$= ۱۱٫۶\text{kgm/s}$$
$$J_y = p_{\text{f}y} - p_{\text{i}y} = ۴٫۰\text{kgm/s} - ۰ = ۴٫۰\text{kgm/s}$$

به شکل دیگر، مقدار ضربه برابر است با

$$J = \sqrt{J_x^۲ + J_y^۲} = \sqrt{(۱۱٫۶\text{kgm/s})^۲ + (۴٫۰\text{kgm/s})^۲}$$
$$= ۱۲٫۳\text{kgm/s}$$

و راستای آن متناظر است با

$$\theta = \tan^{-۱}(J_y/J_x)$$
$$= \tan^{-۱}[(۴٫۰\text{kgm/s})/(۱۱٫۶\text{kgm/s})] = ۱۹°$$

این زاویه بالای افق است. شکل ۹ب بردار ضربه را نمایش می‌دهد و، طبق تعریف معادلهٔ ۳، به‌صورت نموداری ثابت کنید که

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_\text{f} - \mathbf{p}_\text{i} = \mathbf{p}_\text{f} + (-\mathbf{p}_\text{i})$$

(ب) می‌دانیم که $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{F}}\Delta t$ و از آنجا $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$ است. پس مقدار $\overline{\mathbf{F}}$ برابر است با

$$\overline{F} = (۱۲٫۳\text{kgm/s})/۰٫۰۰۱۵\text{s} = ۸۲۰۰\text{N}$$

که تقریباً برابر با یک تن است. این نیرو در همان جهت $\mathbf{J}$، یعنی، ۱۹° بالای افق وارد می‌شود. توجه کنید که این نیرو متوسط است؛ همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد نیروی ماکزیموم به مقدار قابل‌ملاحظه‌ای از این نیرو بیشتر است. همچنین، توجه داشته باشید که $\overline{F}(= ۸۲۰۰\text{N}) \gg mg(= ۱٫۴\text{N})$ است. به این‌ترتیب با خیال آسوده می‌توانیم فرض کنیم که نیروی ضربه‌ای خیلی بزرگتر از نیروی خارجی (در این مورد گرانش) است و بنابراین با تقریب خوبی برابر است با همان نیروی خالصی که در حین برخورد وارد می‌شود. (ج) تغییر تکانهٔ چوبدست بنابر معادلهٔ ۷ برابر است با تغییر تکانهٔ توپ ولی در جهت خلاف آن. به این ترتیب برای چوبدست داریم

$$\Delta p_x = -۱۱٫۶\text{kgm/s}$$
$$\Delta p_y = -۴٫۰\text{kgm/s}$$

آیا این تغییر تکانه، تغییر کوچکی است یا تغییر بزرگی است؟ برای پاسخگویی به این پرسش سعی کنید تکانهٔ چوبدست در حال حرکت را تخمین بزنید.

۴ـ۱۰ برخورد در یک بعد

در این بخش اثر برخورد میان دو جسم را بررسی می‌کنیم. معمولاً، سرعتهای اولیهٔ دو جسم قبل از برخورد را می‌دانیم و منظورمان این است که با استفاده از قوانین پایستگی یا قوانین حرکت، سرعتهای بعد از برخورد را تعیین کنیم.

اگر نیروهایی را که در حین برخورد اثر می‌کنند بشناسیم و اگر بتوانیم معادلات حرکت را حل کنیم، همیشه می‌توانیم حرکتِ پس از برخورد اجسام را از حرکت، قبل از برخوردشان محاسبه کنیم. اما دربیشتر برخوردها این نیروها را نمی‌شناسیم. قانون پایستگی تکانه باید در هر برخوردی که در آن فقط نیروهای داخلی شرکت دارند برقرار باشد، و حتی اگر این نیروها را نشناسیم هم می‌توانیم آن‌را به‌کار ببریم. اگرچه ممکن است جزئیات برهم‌کنش را ندانیم، ولی با استفاده از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی در بسیاری موارد می‌توانیم نتایج برخورد را پیش‌بینی کنیم.

تکانهٔ خطی همواره در برخوردها پایسته است. انرژی کل هم پایسته است: انرژی کل اولیهٔ ذرات برخوردکننده برابر است با انرژی کل نهایی محصولات برخورد. این انرژی ممکن است علاوه بر انرژی جنبشی شامل شکلهای دیگر انرژی از جمله انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل، انرژی چرخشی، و انرژی تابشی باشد.

در ردهٔ خاصی از برخوردها، که برخورد کشسان نامیده می‌شوند، از همهٔ اشکال دیگر انرژی چشمپوشی می‌کنیم و فقط انرژی مکانیکی، $U+K$، را در نظر می‌گیریم. بعلاوه، فرض می‌کنیم در برخوردهای ضربه‌ای نیروهای داخلی به‌مدت کوتاهی عمل می‌کنند و بنابراین در مسافت کوتاهی مؤثرند؛ ما ذرات را فقط در فواصل نسبی بسیار بزرگتری مشاهده می‌کنیم و در نتیجه می‌توانیم از آثار مربوط به انرژی پتانسیل داخلی آنها را ندیده بگیریم. در برخوردِ کشسان، انرژی جنبشی انتقالی تنها شکلی از انرژی است که باید در محاسبات منظور شود، و بنابراین پایستگی انرژی مکانیکی در این مورد هم‌ارز پایستگی انرژی جنبشی است: در برخوردهای کشسان انرژی جنبشی اولیهٔ K_i برابر است با انرژی جنبشی نهایی K_f.

در ردهٔ دیگری از برخوردها، که برخورد ناکشسان نامیده می‌شوند، اشکال دیگر انرژی هم پدید می‌آیند، و انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی با هم برابر نیستند. در بعضی موارد $K_i > K_f$ است، مثلاً وقتی که انرژی جنبشی اولیه به انرژی داخلی محصولات برخورد تبدیل می‌شود؛ در موارد دیگر $K_i < K_f$ است، مانند وقتی که انرژی داخلی ذخیره شده در ذرات برخوردکننده آزاد می‌شود. در برخوردهای ناکشسان انرژی مکانیکی $U+K$ پایسته نیست، ولی انرژی کل پایسته است . (بخش ۸ـ۶). وقتی اجسام برخوردکننده ساده‌اند، مانند اتمها یا مولکولها، اغلب می‌توانیم اختلاف بین K_i و K_f را برحسب حالتهای گسستهٔ انرژی داخلی سیستم توجیه کنیم. در سیستمهای پیچیده‌تر، مانند اتومبیلهای برخوردکننده، اختلاف انرژی را به‌صورت انرژی جنبشی "از دست رفته" یا "به دست آمده" در نظر می‌گیریم.

همهٔ برخوردهای میان اجسام واقعی تا حدودی ناکشسان‌اند. در مورد اجسام خیلی صلب، مانند گویهای بیلیارد، اغلب می‌توانیم به‌طور تقریبی برخورد را کشسان در نظر بگیریم. دراین مورد انرژی‌ای که از جنبشی به سایر اشکال تبدیل می‌شود (مثلاً به امواج صوتی که در برخورد گویها شنیده می‌شود) در مقایسه با انرژی جنبشی قابل اغماض است. توجه داشته باشید که طبقه‌بندی برخوردها به کشسان و ناکشسان مستقل از چارچوب مرجعی است که برخورد از آن مشاهده می‌شود.

اگر دو جسم برخوردکننده پس از برخورد به هم بچسبند، می‌گوییم برخورد کاملاً ناکشسان است. مثلاً، برخورد بین یک گلوله و قطعه چوبی که گلوله به آن شلیک شده است کاملاً ناکشسان است مشروط بر اینکه گلوله در داخل قطعه چوب باقی بماند. عبارت "کاملاً ناکشسان" الزاماً به این معنی نیست که تمام انرژی جنبشی اولیه از دست می‌رود، بلکه، همان‌طور که خواهیم دید، به این معنی است که انرژی جنبشی تا بیشترین مقداری که پایستگی تکانه مجاز می‌دارد از دست می‌رود.

با آنکه نیروهای برخورد ناشناخته‌اند، از حرکت ذرات قبل از برخورد می‌توانیم حرکت بعد از برخورد آنها را تعیین کنیم، مشروط بر اینکه برخورد کاملاً ناکشسان باشد، یا، اگر برخورد کشسان است، مشروط بر اینکه برخورد فقط در یک بعد صورت بگیرد. در برخورد یک‌بعدی، حرکت نسبی بعد از برخورد در امتداد همان خطی است که حرکت نسبی قبل از برخورد. فعلاً بحث را به حرکت یک‌بعدی محدود می‌کنیم.

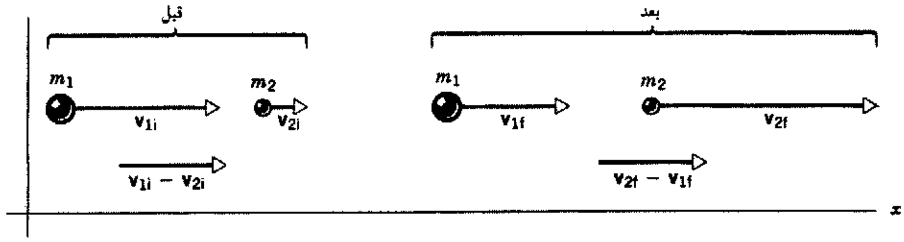
برخوردهای کشسان

ابتدا به برخورد کشسان یک‌بعدی می‌پردازیم. دو جسم را در نظر بگیرید که روی خط واصل بین مرکزهایشان در حرکت‌اند (مثلاً دو لغزنده روی یک ریل هوا)، و پس از برخورد رودررو در امتداد همان خط مستقیم به حرکت درمی‌آیند (شکل ۱۰). نیروهایی که این اجسام در حین برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند در راستای خط اولیهٔ حرکت است و بنابراین، حرکت نهایی هم در امتداد همین خط خواهد بود.

جرم ذرات برخوردکننده m_1 و m_2 است و سرعت آنها عبارت است از v_{1i} و v_{2i} قبل از برخورد و v_{1f} و v_{2f} بعد از برخورد. [در نمادگذاری این بخش، شاخصهای ۱ و ۲ ذرات را مشخص می‌کنند، و شاخصهای i و f به‌ترتیب مقادیر اولیه (قبل از برخورد) و نهایی (بعد از برخورد) را نشان می‌دهند.] جهت مثبت تکانه و سرعت را به طرف راست شکل ۱۰ می‌گیریم. فرض می‌کنیم سرعت ذرات برخوردکننده (در مقایسه با سرعت نور) آنقدر کم است که نیازی به استفاده از عبارتهای نسبیتی برای تکانه و انرژی جنبشی نداریم (مگر آنکه صریحاً غیر از این گفته باشیم). از پایستگی تکانه داریم

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (۱۰)$$

چون برخورد را کشسان در نظر گرفته‌ایم، انرژی جنبشی بنابه تعریف



شکل ۱۰. دو ذره قبل و بعد از یک برخورد کشسان. توجه کنید که سرعتهای نسبی قبل و بعد از برخورد با هم برابرند.

پایسته است و از $K_i = K_f$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (۱۱)$$

اگر جرمها و سرعتهای اولیه را بدانیم، می‌توانیم از دو معادلهٔ بالا سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} را محاسبه کنیم.

می‌توانیم معادلهٔ مربوط به تکانه را به‌صورت

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})=m_2(v_{2f}-v_{2i}) \qquad (۱۲)$$

و معادلهٔ مربوط به انرژی را به‌صورت

$$m_1(v_{1i}^2-v_{1f}^2)=m_2(v_{2f}^2-v_{2i}^2) \qquad (۱۳)$$

بنویسیم. از تقسیم معادلهٔ ۱۳ بر معادلهٔ ۱۲ و با این فرض که $v_{2f}\neq v_{2i}$ و $v_{1f}\neq v_{1i}$ است (پرسش ۱۵)، به‌دست می‌آوریم

$$v_{1i}+v_{1f}=v_{2f}+v_{2i}$$

که می‌شود آن‌را به این صورت مرتب کرد

$$v_{1i}-v_{2i}=-(v_{1f}-v_{2f}) \qquad (۱۴)$$

این معادله حاکی از آن است که در برخورد کشسان یک‌بعدی، سرعت نسبی (نزدیک شدن) دو جسم قبل از برخورد برابر و در جهت مخالف سرعت نسبی (دور شدن) آنها بعد از برخورد است، فرقی هم نمی‌کند که ذرات برخوردکننده چه جرمی داشته باشند.

برای اینکه سرعتهای بعد از برخورد، یعنی v_{1f} و v_{2f} را از سرعتهای قبل از برخورد، یعنی v_{1i} و v_{2i} تعیین کنیم معادله‌های ۱۴ و ۱۲ را ترکیب می‌کنیم تا v_{2f} را حذف و v_{1f} را به‌دست بیاوریم

$$v_{1f}=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{1i}+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_{2i} \qquad (۱۵)$$

به‌همین ترتیب، می‌توانیم v_{1f} را حذف و v_{2f} را تعیین کنیم

$$v_{2f}=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i}+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{2i} \qquad (۱۶)$$

روابط ۱۵ و ۱۶، که در تمام چارچوبهای لخت برقرارند، نتایجی کلی هستند که امکان محاسبهٔ سرعتهای نهایی را در هر برخورد یک‌بعدی کشسان فراهم می‌آورند. اغلب با انتخاب چارچوب مرجعی که در آن ذرهٔ هدف (مثلاً m_2) در آغاز ساکن است معادله‌های بالا را ساده می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم v_{2i} را در معادلات ۱۵ و ۱۶ برابر با صفر بگیریم. در اینجا چند مورد خاص را که بیشتر مورد توجه‌اند بررسی می‌کنیم.

۱. جرمهای مساوی. وقتی ذرات برخوردکننده دارای جرمهای برابر باشند ($m_1=m_2$)، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آیند

$$v_{1f}=v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f}=v_{1i} \qquad (۱۷)$$

یعنی، ذرات سرعتهایشان را مبادله می‌کنند: سرعت نهایی یک ذره برابر است با سرعت اولیهٔ ذرهٔ دیگر.

۲. ذرهٔ هدف ساکن. حالت جالب توجه دیگر آن حالتی است که در آن ذرهٔ m_2 در ابتدا ساکن است. پس $v_{2i}=0$ است و داریم

$$v_{1f}=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f}=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i} \qquad (۱۸)$$

از ترکیب این مورد خاص با مورد قبلی معلوم می‌شود که در برخورد بین دو ذره با جرمهای مساوی که یکی از آنها در آغاز ساکن باشد، ذرهٔ اول "یکباره متوقف" می‌شود و ذرهٔ دوم با سرعت اولیه ذرهٔ اول "یکباره به‌راه می‌افتد". این اثر را اغلب در برخورد گویهای بیلیارد، اگر چرخان نباشند، می‌توانیم مشاهده کنیم.

۳. ذرهٔ هدف پرجرم. اگر $m_2 \gg m_1$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورتهای سادهٔ زیر درمی‌آیند

$$v_{1f}\approx -v_{1i}+2v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f}\approx v_{2i} \qquad (۱۹)$$

وقتی ذرهٔ پرجرم به‌آرامی حرکت می‌کند یا ساکن است، داریم

$$v_{1f}\approx -v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f}=0 \qquad (۲۰)$$

این وقتی است که یک پرتابهٔ سبک با یک جسم ساکن خیلی پرجرم برخورد می‌کند، در این مورد سرعت جسم سبک "تقریباً معکوس" می‌شود و جسم پرجرم تقریباً ساکن می‌ماند. مثلاً، توپی که از ارتفاع h سقوط می‌کند پس از برخورد با زمین سرعتش معکوس می‌شود و از زمین باز می‌جهد و اگر برخورد کاملاً کشسان باشد و مقاومت هوا هم در کار نباشد، به همان ارتفاع h برمی‌گردد. حرکت الکترون [illegible] با یک اتم (نسبتاً پرجرم) وارونه می‌شود (از اتم

باز می‌جهد) در حالی که اتم هدف اساساً از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد و برجا می‌ماند.

۴. پرتابهٔ پرجرم. وقتی $m_1 \gg m_2$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \qquad (۲۱)$$

ذرهٔ هدفِ کم‌جرم اگر در آغاز ساکن باشد (یا خیلی کندتر از m_1 حرکت کند)، پس از برخورد با سرعتی معادل دو برابر سرعت m_1 به حرکت درمی‌آید. ذرهٔ m_1 پس از برخورد به هدف (که خیلی سبکتر است) تقریباً بدون تغییر سرعت به حرکتش ادامه می‌دهد.

در پراکندگی ذرهٔ آلفا (شکل ۲)، ذرهٔ آلفا فرودی (که جرم آن تقریباً ۸۰۰۰ برابر جرم الکترون است) اساساً حرکتش در برخورد با الکترونهای اتمهای هدف، تغییر نمی‌کند (شاهدش تعداد زیاد ردهای مستقیم‌الخط در شکل ۲ است). ذرهٔ آلفا فقط در برخوردهای نادر با هستهٔ سنگین اتم هدف منحرف می‌شود.

برخوردهای ناکشسان

اکنون برخوردهای ناکشسان را، که در آنها بنابه تعریف انرژی جنبشی پایسته نیست و البته تکانهٔ کل همچنان پایسته است، بررسی می‌کنیم. اگرچه پایستگی انرژی کل هم معتبر است. ولی منظورکردن صورتهای دیگر انرژی، جز انرژی جنبشی، جملات دیگری به معادلهٔ ۱۱ می‌افزاید و تا نتوانیم تبدیلات انرژی (مثلاً اینکه چقدر انرژی داخلی به انرژی جنبشی تبدیل شده است) را دقیقاً مشخص کنیم، دستگاه معادلات قابل حل نخواهیم داشت.

در یک مورد خاص، یعنی در برخورد کاملاً ناکشسان، نتیجهٔ نهایی را می‌توانیم از مقادیر اولیه پیدا کنیم. در این مورد، ذرات پس از برخورد به هم می‌چسبند و با سرعت نهایی v_f به حرکت درمی‌آیند. به این ترتیب تنها یک مجهول داریم که معادلهٔ تکانه (معادلهٔ ۱۰) برای پیدا کردن آن کفایت می‌کند. اگر در این معادله به‌جای v_{1f} و v_{2f} سرعت مشترک v_f را قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \qquad (۲۲)$$

وقتی جسم m_2 در ابتدا ساکن باشد، معادله بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (۲۳)$$

سرعت جسم m_1 به نسبت $m_1/(m_1+m_2)$ کم می‌شود. هر چه m_1 بزرگتر باشد، مجموعه تندتر حرکت می‌کند؛ و هر چه m_1 کوچکتر باشد کندتر.

معادلهٔ ۲۲ را می‌توانیم به همین خوبی به‌صورت وارونه هم به‌کار ببریم: یعنی به این صورت که جسمی به جرم M که با سرعت v_f در حرکت است به دو پاره تقسیم می‌شود، یک پاره به جرم m_1 با سرعت v_{1i} حرکت می‌کند و پارهٔ دیگر به جرم $m_2(=M-m_1)$ با سرعت v_{2i} در خلاف جهت به حرکت درمی‌آید. این نتیجه، حتی اگر انفجار مقدار معتنابهی انرژی جنبشی به پاره‌ها بدهد، به همین صورت معتبر است. در حالت خاصی که $v_f = 0$ (جسم اولیه در حال سکون) باشد، داریم $v_{1i}/v_{2i} = -m_2/m_1$. یعنی، همان‌طورکه انتظار می‌رود و لازمهٔ صفر شدن تکانهٔ کل است، ذرهٔ سنگینتر سرعت کمتری دارد و دو ذره در جهتهای مخالف هم حرکت می‌کنند. در بخش ۱۰ـ۷ کاربرد این اصل را درمورد فرایندهای واپاشی خودبه‌خود بررسی خواهیم کرد.

مثال ۲. (الف) انرژی جنبشی یک نوترون (جرم m_1) در برخورد رو در روی کشسان با یک هستهٔ اتم (به جرم m_2) که در ابتدا ساکن است، با چه کسری کاهش می‌یابد؟ (ب) این کاهش نسبی انرژی نوترون را برای برخوردهای کشسان با هستهٔ سرب، هستهٔ کربن، و هستهٔ هیدروژن پیدا کنید. نسبت جرم هسته به جرم نوترون (m_2/m_1) برای سرب ۲۰۶، برای کربن ۱۲ و برای هیدروژن برابر با ۱ است.

حل: (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ نوترون، K_i (که نانسبیتی فرض می‌شود) برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. انرژی جنبشی نهایی نوترون برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$. کاهش نسبی در انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

اما برای چنین برخوردی می‌دانیم (معادلهٔ ۱۸) که

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(ب) در مورد سرب داریم $m_2 = 206m_1$ و

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0{,}02 = \%2$$

در مورد کربن $m_2 = 12m_1$ است، پس

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0{,}28 = \%28$$

و برای اتم هیدروژن داریم $m_2 = m_1$، یعنی

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = \%100$$

این نتایج نشان می‌دهند که چرا موادی مانند پارافین، که هیدروژن زیادی دارد، در کند کردن نوترونها بسیار مؤثرتر از مواد سنگینی نظیر

سرب هستند. توجه داشته باشید که برخوردها، آن‌طور که ما در این بخش فرض کردیم، همیشه هم "رودررو" نیستند. در برخوردهای "یکبری" که معمول‌تر است، اگرچه نوترون همهٔ انرژی‌اش را به هیدروژن ساکن نمی‌دهد، اما به هر حال درمواد هیدروژن‌دار انرژی بیشتری از دست می‌دهد تا در موادی نظیر کربن یا سرب.

از شکافت اورانیم در رآکتور هسته‌ای نوترونهایی با انرژی جنبشی نسبتاً زیاد، در محدودهٔ MeV، تولید می‌شود و برای ایجاد واکنش زنجیره‌ای، باید از این نوترونها برای شکافتهای دیگر استفاده کرد، ولی با افزایش انرژی جنبشی نوترون، احتمال وقوع شکافت سریعاً کاهش پیدا می‌کند. بنابراین لازم است که نوترونها را کند یا آرام کنیم تا انرژی آنها به محدودهٔ eV برسد، که در این محدوده احتمال وقوع شکافت تقریباً سه مرتبهٔ بزرگی بیشتر است. محاسبهٔ بالا، با آنکه مبتنی بر فرضهای ساده‌کننده است، نشان می‌دهد که مواد غنی از هیدروژن، مانند آب یا پارافین، "آرامساز"های مناسبتری هستند.

مثال ۳. آونگ بالیستیک (شکل ۱۱) ابزاری است که از آن، قبل از به میدان آمدن زمان‌سنجهای الکترونیکی، برای تعیین سرعت گلوله‌ها استفاده می‌شد. این وسیله تشکیل شده است از یک قطعه چوب بزرگ به جرم M، که با دو رشته ریسمان آویزان شده است. گلوله‌ای به جرم m به قطعه چوب شلیک می‌شود و سریعاً نسبت به آن به حال سکون درمی‌آید. مجموعهٔ قطعه چوب و گلوله به طرف بالا تاب می‌خورد، و مرکز جرم مجموعه، قبل از سکون لحظه‌ای، به اندازهٔ مسافت h در راستای قائم جابه‌جا می‌شود. فرض کنید جرم قطعه چوب $M = ۵٫۴\,\mathrm{kg}$ و جرم گلوله $m = ۹٫۵\,\mathrm{g}$ باشد. (الف) اگر قطعه چوب تا ارتفاع $h = ۶٫۳$ سانتی‌متر بالا برود، سرعت اولیهٔ گلوله چقدر بوده است؟ (ب) انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله چقدر است؟ چه مقدار از این انرژی به‌صورت انرژی مکانیکی در آونگ باقی می‌ماند؟

حل: (الف) وقتی گلوله با آونگ برخورد می‌کند، از پایستگی تکانه در راستای افقی داریم

$$mv = (M + m)V$$

که درآن v سرعت گلوله قبل از برخورد و V سرعت مجموعهٔ گلوله و قطعه چوب پس از برخورد است. انرژی مکانیکی در حین برخورد گلوله و قطعه چوب مطمئناً پایسته نیست، اما بعد از برخورد برای آونگی که تاب می‌خورد پایسته است. به این ترتیب انرژی جنبشی مجموعه، وقتی در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر قوسی‌اش واقع می‌شود، باید برابر با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطهٔ این مسیر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{۲}(M + m)V^{۲} = (M + m)gh$$

اگر V را از دو معادلهٔ بالا حذف کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{M + m}{m}\right)\sqrt{۲gh} \\ &= \left(\frac{۵٫۴\mathrm{kg} + ۰٫۰۰۹۵\mathrm{kg}}{۰٫۰۰۹۵\mathrm{kg}}\right)\sqrt{(۲)(۹٫۸\mathrm{m/s^{۲}})(۰٫۰۶۳\mathrm{m})} \\ &= ۶۳۰\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

می‌توانیم آونگ بالیستیک را نوعی مبدل بدانیم که سرعت زیاد یک جسم سبک (گلوله) را به سرعت کم یک جسم سنگین (قطعه چوب) تبدیل می‌کند تا اندازه‌گیری آسانتر باشد.

(ب) انرژی جنبشی گلوله برابر است با

$$K_{\mathrm{b}} = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}(۰٫۰۰۹۵\mathrm{kg})(۶۳۰\mathrm{m/s})^{۲} = ۱۹۰۰\,\mathrm{J}$$

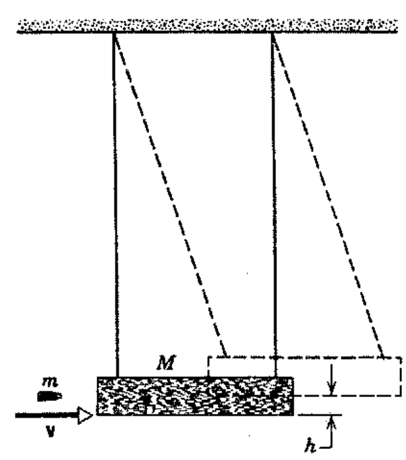
انرژی مکانیکی آونگ در حال تاب خوردن برابر است با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطهٔ مسیر، یعنی

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh \\ &= (۵٫۴\mathrm{kg} + ۰٫۰۰۹۵\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s^{۲}})(۰٫۰۶۳\mathrm{m}) \\ &= ۳٫۳\mathrm{J} \end{aligned}$$

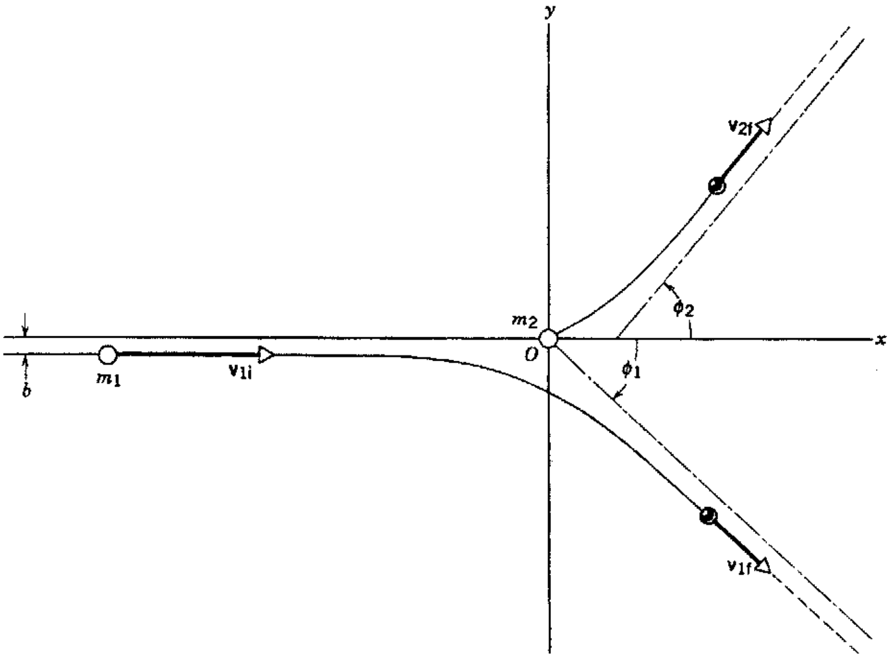
به این‌ترتیب فقط ۳٫۳/۱۹۰۰ یا ۰٫۲٪ از انرژی جنبشی اولیه گلوله به انرژی مکانیکی آونگ تبدیل شده است. بقیهٔ انرژی در داخل قطعه چوب به‌صورت انرژی داخلی ذخیره می‌شود، یا به‌صورت گرما و امواج صوتی به محیط منتقل می‌شود.

۱۰-۵ برخورد در دوبعد

اگر دو ذره به‌صورتی غیر از رودررو با هم برخورد کنند، ممکن است در راستاهایی غیر از راستاهای اولیه‌شان به حرکت در بیایند. شکل ۱۲ چنین برخوردی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات را چنان اختیار مؤلفهٔ x داشته باشد، و محاسبات تا حدودی ساده‌تر



شکل۱۱. مثال ۳. آونگ بالیستیک، که برای اندازه‌گیری سرعت گلوله از آن استفاده می‌شود.



شکل۱۲. دو ذره با هم برخورد می‌کنند. مکان آنها قبل از برخورد با دایره‌های توخالی و بعد از برخورد با دایره‌های توپر نشان داده‌ایم. پارامتر برخورد، b، درواقع فاصلهٔ "بری بودن" از برخورد رودرروست.

شود. فرض کرده‌ایم که ذرهٔ هدف، m_2، در ابتدا ساکن است. فاصلهٔ b بین خط حرکت ذرهٔ فرودی و خطی که به موازات آن از مرکز m_2 می‌گذرد، پارامتر برخورد نامیده می‌شود. برخورد رودررو متناظر است با $b = 0$ و مقادیر بزرگتر b معرف برخوردهای یکبری‌تر (سبکتر)اند. شکل ۱۲ می‌تواند مثلاً نشاندهندهٔ برخورد دو هسته تحت تأثیرنیروی رانشی الکتروستاتیکی میان آنها باشد؛ نیرو به‌عکس مجذور فاصلهٔ بین دو هسته بستگی دارد، و برای برخورد لازم نیست که هسته‌ها واقعاً با هم تماس پیدا کنند. در فواصلی که به‌قدر کافی دور باشند، نیرو کوچک می‌شود و ذرات بی‌آنکه اساساً متأثر از نیرو باشند در امتداد خطهای راست حرکت می‌کنند.

صرفنظر از اینکه چه نیرویی بین ذرات اثر می‌کند، تکانه باید پایسته باشد. نیروی بین ذرات یک نیروی داخلی است، و نمی‌تواند تکانهٔ کل سیستم دو ذره‌ای را تغییر بدهد. به‌علاوه، چون تکانه بردار است، می‌دانیم که مؤلفه‌های x و y دو معادلهٔ مستقل اسکالر به‌دست می‌دهند. در راستای x، تکانهٔ اولیه برابر است با $m_1 v_{1i}$، و تکانهٔ نهایی کل برابراست با مجموع مؤلفه‌های x تکانه‌های نهایی دو ذره

$$p_{ix} = p_{fx}$$
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\phi_1 + m_2 v_{2f} \cos\phi_2 \qquad (۲۴)$$

در اینجا جهتهای بردارهای $\mathbf{v}_{1f}$ و $\mathbf{v}_{2f}$ را به‌ترتیب با زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 مشخص کرده‌ایم؛ پس در معادلهٔ ۲۴ کمیتهای v_{1f} و v_{2f} مقدار سرعتها را نشان می‌دهند و همواره مثبت‌اند. این با معادله‌های ۱۵ و ۱۶ یا معادلهٔ ۲۲، که در آنها با مؤلفهٔ بردار سرعت سروکار داشتیم که ممکن بود مثبت یا منفی باشند، فرق می‌کند.

مؤلفهٔ y تکانهٔ اولیه صفر است (البته به‌خاطر انتخاب مناسب محورهای مختصات) و مؤلفهٔ y تکانهٔ نهایی عبارت است از اختلاف بین مؤلفه‌های y تکانه‌های دو ذره (زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 را در دو طرف محور xاند، بنابراین جمع مؤلفه‌های y تبدیل به تفاضل جبری می‌شود):

$$p_{iy} = p_{fy}$$
$$0 = m_1 v_{1f} \sin\phi_1 - m_2 v_{2f} \sin\phi_2 \qquad (۲۵)$$

اگر برخورد کشسان باشد، پایستگی انرژی برقرار است. از برابر قرار دادن انرژی جنبشی اولیه با انرژی جنبشی نهایی داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (۲۶)$$

اگر شرایط اولیه معلوم باشد (m_1, m_2 و v_{1i})، در معادله‌های ۲۴ تا ۲۶ چهار مجهول وجود دارد ($v_{1f}, v_{2f}, \phi_1, \phi_2$) ولی فقط سه معادله داریم که آنها را به هم مربوط می‌کند. برای چنین دستگاهی از معادلات چند مجهولی نامعین هیچ جواب منحصر به فردی وجود ندارد؛ یا در واقع بینهایت جواب وجود دارد. برای رسیدن به یک جواب واحد باید یک قید یا یک محدودیت دیگر به شرایط اولیه اضافه کنیم. مثلاً می‌توانیم انتخاب کنیم که ذرهٔ ۱ را تحت زاویهٔ مشخص ϕ_1 مشاهده کنیم (مثال ۴). چنین شرطی را که اعمال کردیم، می‌توانیم سه معادله را برای به‌دست آوردن سه مجهول باقی‌مانده حل کنیم.

مثال ۴. یک مولکول گاز که با سرعت $322\,\mathrm{m/s}$ در حرکت است به‌طور کشسان با مولکول دیگری با همان جرم که ساکن است برخورد می‌کند. بعد از برخورد، مولکول اول در راستایی که با امتداد سرعت اولیه‌اش زاویهٔ $30°$ می‌سازد، به حرکت درمی‌آید. سرعت هر یک از مولکولها را پس از برخورد و همچنین زاویهٔ راستای حرکت مولکول هدف با راستای حرکت مولکول فرودی را تعیین کنید.

حل: این مثال دقیقاً مربوط می‌شود به معادله‌های ۲۴ تا ۲۶، وقتی‌که $m_1 = m_2$، $v_{1i} = ۳۲۲\mathrm{m/s}$ و $\phi_1 = ۳۰°$ باشد. اگر m_1 را برابر m_2 بگیریم معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1i} = v_{1f}\cos\phi_1 + v_{2f}\cos\phi_2 \qquad (۲۷)$$

$$v_{1f}\sin\phi_1 = v_{2f}\sin\phi_2 \qquad (۲۸)$$

و

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \qquad (۲۹)$$

حالا باید این معادله‌ها را برای به‌دست آوردن v_{1f}، v_{2f} و ϕ_2 حل کنیم. برای انجام این کار ابتدا ϕ_2 را با مربع کردن معادلهٔ ۲۷ (که قبلاً آن‌را به صورت $v_{1i} - v_{1f}\cos\phi_1 = v_{2f}\cos\phi_2$ نوشته‌ایم) و افزودن آن به مربع معادلهٔ ۲۸، حذف می‌کنیم. با توجه به اینکه $\sin^2\phi_2 + \cos^2\phi_2 = ۱$ است، داریم

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\phi_1 = v_{2f}^2$$

از ترکیب این رابطه با معادلهٔ ۲۹ (مشروط بر اینکه $v_{1f} \neq ۰$ باشد) به‌دست می‌آوریم

$$v_{1f} = v_{1i}\cos\phi_1 = (۳۲۲\mathrm{m/s})(\cos ۳۰°) = ۲۷۹\mathrm{m/s}$$

از معادلهٔ ۲۹ نتیجه می‌شود که

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (۳۲۲\mathrm{m/s})^2 - (۲۷۹\mathrm{m/s})^2$$

یا

$$v_{2f} = ۱۶۱\mathrm{m/s}$$

سرانجام، از معادلهٔ ۲۸ داریم

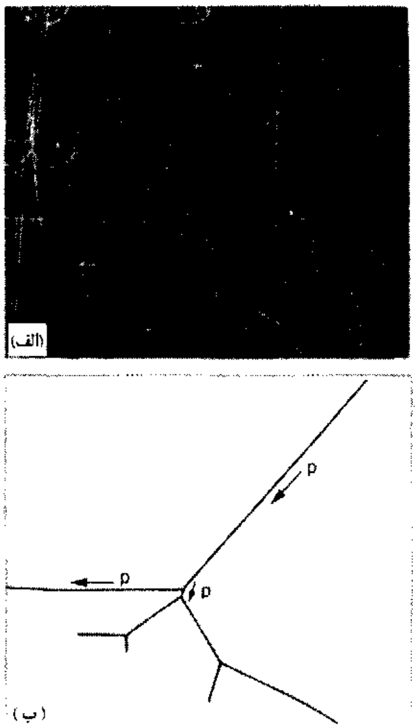
$$\sin\phi_2 = \frac{v_{1f}}{v_{2f}}\sin\phi_1 = \frac{۲۷۹\mathrm{m/s}}{۱۶۱\mathrm{m/s}}\sin ۳۰° = ۰٫۸۶۶$$

یا

$$\phi_2 = ۶۰°$$

دو مولکول در راستاهای متعامد از همدیگر دور می‌شوند (در شکل ۱۲ داریم $\phi_1 + \phi_2 = ۹۰°$).

باید بتوانید نشان بدهید که در برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای مساوی، که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، امتدادهای حرکت ذرات خروجی همیشه با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند. شکل ۱۳ رشته‌ای از چهار برخورد کشسان پیاپی بین پروتونها را نشان می‌دهد.



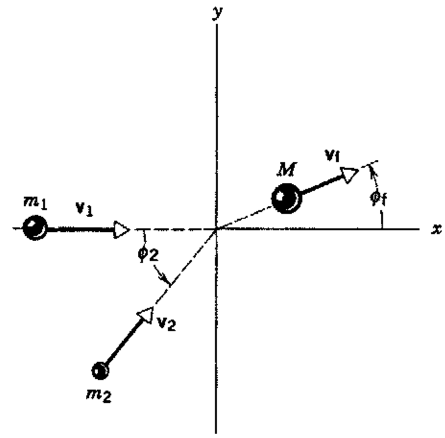
شکل۱۳. (الف) چهار برخورد پروتون-پروتون در یک اتاقک حباب. (ب) نمایش نموداری مسیرهای پروتونهای برخوردکننده. پروتون اصلی از قسمت بالا سمت راست وارد اتاقک می‌شود. همهٔ ردها در صفحهٔ تصویر قرار ندارند، و مشاهدهٔ استریوسکوپیکی نشان می‌دهد که، طبق انتظار، زاویهٔ بین ذرهٔ فرودی و ذرهٔ هدف پس از هر برخورد ۹۰° است. سایر ردهای موجود در تصویر ناشی از مزونها (انحنای جزئی) و الکترونها (حلزونیهای درهم فشرده) هستند.

این برخوردها وقتی روی می‌دهند که یک پروتون پرانرژی وارد اتاقک حبابی می‌شود که پر از هیدروژن مایع است. مولکولهای هیدروژن مایع نقش پروتونهای هدف را دارند. مسیر ذرات به‌وسیلهٔ رد حبابهای به‌جا مانده از آنها قابل مشاهده می‌شود. چون جرم ذرات برهم‌کنش کننده یکسان است و برخوردها هم کشسان‌اند، ذرات خروجی با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند؛ مسیرهای شکل ۱۳ با روش استریوسکوپیک [برجسته نمایی] به‌خوبی آشکار می‌شوند. نمونهٔ دیگری از این دست در شکل ۲ آمده است.

برخوردهای ناکشسان در دوبعد

در برخورد ناکشسان، دیگر معادلهٔ ۲۶ معتبر نیست. معمولاً می‌توانیم این معادله را با عبارت معادلی جایگزین کنیم که انرژی تبدیل شده به انرژی جنبشی یا انرژی جنبشی تبدیل شده به‌صورتهای دیگر را منظور کند و در نتیجه رابطه‌ای بین انرژی جنبشی اولیه و انرژی جنبشی نهایی به‌دست بدهد.

در برخورد کاملاً ناکشسان در دوبعد باید با دو جسم درحال حرکت آغاز شود. (چرا؟) باز هم دستگاه مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که راستای حرکت یکی از ذرات محور x را تعریف کند و



شکل۱۴. یک برخورد کاملاً ناکشسان در دوبعد. ذراتی با جرمهای $m_{۱}$ و $m_{۲}$ با هم برخورد می‌کنند و تبدیل به جسم مرکبی به جرم M می‌شوند.

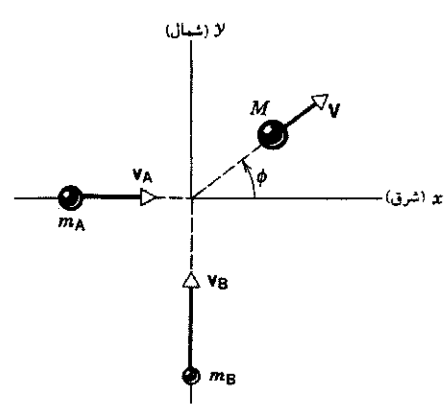
برخورد را چنان تنظیم می‌کنیم که دو ذره در مبدأ به هم برسند و با هم یکی شوند. در این‌صورت جسم مرکب با سرعت $\mathbf{v}_{f}$ در راستای ϕ_{f} حرکت می‌کند (شکل ۱۴). پایستگی تکانه برای مؤلفه‌های x و y نتایج زیر را به‌دست می‌دهد

$$m_{۱}v_{۱} + m_{۲}v_{۲}\cos\phi_{۲} = Mv_{f}\cos\phi_{f} \qquad :x \text{ مؤلفهٔ} \qquad (۳۰)$$

$$m_{۲}v_{۲}\sin\phi_{۲} = Mv_{f}\sin\phi_{f} \qquad :y \text{ مؤلفهٔ} \qquad (۳۱)$$

که در آن $M = m_{۱} + m_{۲}$ جرم کل مجموعه پس از برخورد است. چون پس از برخورد، فقط یک سرعت (مقدار و جهت) برای جسم مرکب داریم، چهار مجهول مورد مربوط به برخورد کشسان به دو مجهول، v_{f} و ϕ_{f}، کاهش می‌یابد و فقط دو معادله (معادله‌های ۳۰ و ۳۱) برای به‌دست آوردن یک جواب یکتا کافی است.

مثال ۵. دو اسکیت‌باز یک برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند. یعنی پس از برخورد، دست در دست هم حرکت می‌کنند (شکل ۱۵). در ابتدا یکی از آنها به جرم $m_{A} = ۸۳\text{kg}$ با سرعت $v_{A} = ۶{,}۴\text{km/h}$



شکل۱۵. مثال ۵. دو اسکیت‌باز (A و B) برخوردی کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند و پس از برخورد در راستای مشخص شده با ϕ به حرکت در می‌آیند.

به‌سمت شرق، و دیگری که جرمش $m_{B} = ۵۵\text{kg}$ است با سرعت $v_{B} = ۸{,}۸\text{km/h}$ به‌سمت شمال حرکت می‌کند. (الف) سرعت مشترک آنها پس از برخورد، $\mathbf{V}$، چقدر است؟ (ب) تغییر نسبی در انرژی جنبشی اسکیت‌بازان در اثر برخورد چقدر است؟

حل: (الف) تکانه در طی برخورد پایسته است. برای دو مؤلفه تکانه می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$m_{A}v_{A} = MV\cos\phi \qquad :x \text{ مؤلفهٔ} \qquad (۳۲)$$

$$m_{B}v_{B} = MV\sin\phi \qquad :y \text{ مؤلفهٔ} \qquad (۳۳)$$

که در آن $M = m_{A} + m_{B}$ است. از تقسیم معادلهٔ ۳۳ بر معادلهٔ ۳۲ نتیجه می‌شود

$$\tan\phi = \frac{m_{B}v_{B}}{m_{A}v_{A}} = \frac{(۵۵\text{kg})(۸{,}۸\text{km/h})}{(۸۳\text{kg})(۶{,}۴\text{km/h})} = ۰{,}۹۱۱$$

یا

$$\phi = \tan^{-۱}۰{,}۹۱۱ = ۴۲{,}۳^{\circ}$$

از معادلهٔ ۳۳ نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{m_{B}v_{B}}{M\sin\phi} = \frac{(۵۵\text{kg})(۸{,}۸\text{km/h})}{(۸۳\text{kg} + ۵۵\text{kg})(\sin ۴۲{,}۳^{\circ})} = ۵{,}۲۱\text{km/h}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیه عبارت است از

$$K_{i} = \frac{۱}{۲}m_{A}v_{A}^{۲} + \frac{۱}{۲}m_{B}v_{B}^{۲} = \frac{۱}{۲}(۸۳\text{kg})(۶{,}۴\text{km/h})^{۲} + \frac{۱}{۲}(۵۵\text{kg})(۸{,}۸\text{km/h})^{۲} = ۳۸۳۰\,\text{kg km}^{۲}/\text{h}^{۲}$$

انرژی جنبشی نهایی برابر است با

$$K_{f} = \frac{۱}{۲}MV^{۲} = \frac{۱}{۲}(۸۳\text{kg} + ۵۵\text{kg})(۵{,}۲۱\text{km/h})^{۲} = ۱۸۷۰\,\text{kg km}^{۲}/\text{h}^{۲}$$

آن کسری از انرژی که در جستجویش هستیم این است

$$f = \frac{K_{f} - K_{i}}{K_{i}} = \frac{۱۸۷۰\,\text{kg km}^{۲}/\text{h}^{۲} - ۳۸۳۰\,\text{kg km}^{۲}/\text{h}^{۲}}{۳۸۳۰\,\text{kg km}^{۲}/\text{h}^{۲}} = -۰{,}۵۱$$

یعنی ۵۱٪ از انرژی جنبشی اولیه در برخورد به هدر رفته است. این انرژی باید به هر حال به‌صورت انرژی داخلی دو اسکیت‌باز هدر شده باشد.

۱۰ـ۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

در عمل، وقتی آزمایشهای برخورد انجام می‌شوند، اندازه‌گیریها به‌طور عادی در چارچوب مرجعی که در آزمایشگاه ساکن است (چارچوب آزمایشگاه) صورت می‌گیرند. این نوع آزمایشها در اغلب موارد شامل پرتابه‌ای است که به‌سوی هدفی ساکن در آزمایشگاه پرتاب می‌شود. از طرف دیگر، در اکثر آزمایشهای مربوط به فیزیک ذرات، دو ذره با جرم و سرعت یکسان (دو پروتون یا شاید دو الکترون) مستقیماً به‌سوی یکدیگر شلیک می‌شوند. صرفنظر از چگونگی انجام آزمایش، بررسی و تحلیل برخورد در چارچوب مرجعی که به مرکز جرم ذرات برخوردکننده متصل باشد (چارچوب مرکز جرم) عموماً ساده‌تر است، و درک فیزیکی روشنتری فراهم می‌کند.

مثلاً، مورد سادهٔ برخورد کشسان یک‌بعدی (رودررو) بین دو ذرهٔ یکسان را در نظر بگیرید. اگر یکی از ذرات (هدف) در چارچوب آزمایشگاه ثابت باشد، ذرهٔ دیگر (ذرهٔ فرودی که در ابتدا با سرعت v در حرکت است) پس از برخورد متوقف می‌شود و ذرهٔ هدف با سرعت v به‌سمت جلو به حرکت درمی‌آید. اما در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره قبل از برخورد هر یک با سرعت $v/۲$ به طرف همدیگر حرکت می‌کنند و پس از برخورد هم با همان سرعت از هم دور می‌شوند. دیگر بین پرتابه و هدف وجه تمایزی وجود ندارد و توصیف رویداد در این چارچوب کاملاً متقارن است.

در شکل ۱۶الف یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" از یک برخورد کشسان بین یک ذرهٔ متحرک به جرم m_1 و یک ذرهٔ ساکن به جرم $m_2 = 3m_1$ را نشان داده‌ایم. چون در حین برخورد فقط نیروهای داخلی مؤثرند، همان‌طور که در شکل ۱۶الف می‌بینیم، حرکت مرکز جرم در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. مرکز جرم دو جسم m_1 و m_2، که با معادلهٔ ۴ فصل ۹ تعریف می‌شود، قبل و بعد از برخورد با همان سرعت ثابت v_{cm} حرکت می‌کند.

سرعت مرکز جرم از معادلهٔ ۵ فصل ۹ به‌دست می‌آید

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۴)$$

که در این مورد $v_{2i} = 0$ بوده است. اکنون می‌خواهیم نمودار همین برخورد را از دیدگاه چارچوب مرجع متحرکی که نسبت به آزمایشگاه با سرعت v_{cm} در حرکت است رسم کنیم. این چارچوب همان چارچوب مرجع مرکز جرم است. سرعتهای اجسام m_1 و m_2 در این چارچوب را می‌توانیم از معادلهٔ ۴۳ بخش ۴ـ۶ (مربوط به تبدیلات سرعت بین چارچوبهای مرجع) به‌دست بیاوریم

$$v = v' + u \qquad (۳۵)$$

که در آن v سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاه، v' سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب متحرک نسبت به آزمایشگاه، و u سرعت نسبی دو چارچوب مرجع است. در مورد مسئله‌ای که در دست بررسی داریم، چارچوب متحرک همان چارچوب مرکز جرم و $v_{cm} = u$ است.

حالا می‌توانیم سرعتهای اولیهٔ جسمهای m_1 و m_2 را در چارچوب متحرک تعیین کنیم

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i}$$
$$= \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۶)$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i}$$
$$= -\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۷)$$

سرعتهای نهایی اجسام در چارچوب آزمایشگاه را هم (که در معادلهٔ ۱۸ آمده است) می‌توانیم به سرعتهای نظیر درچارچوب مرکز جرم تبدیل کنیم

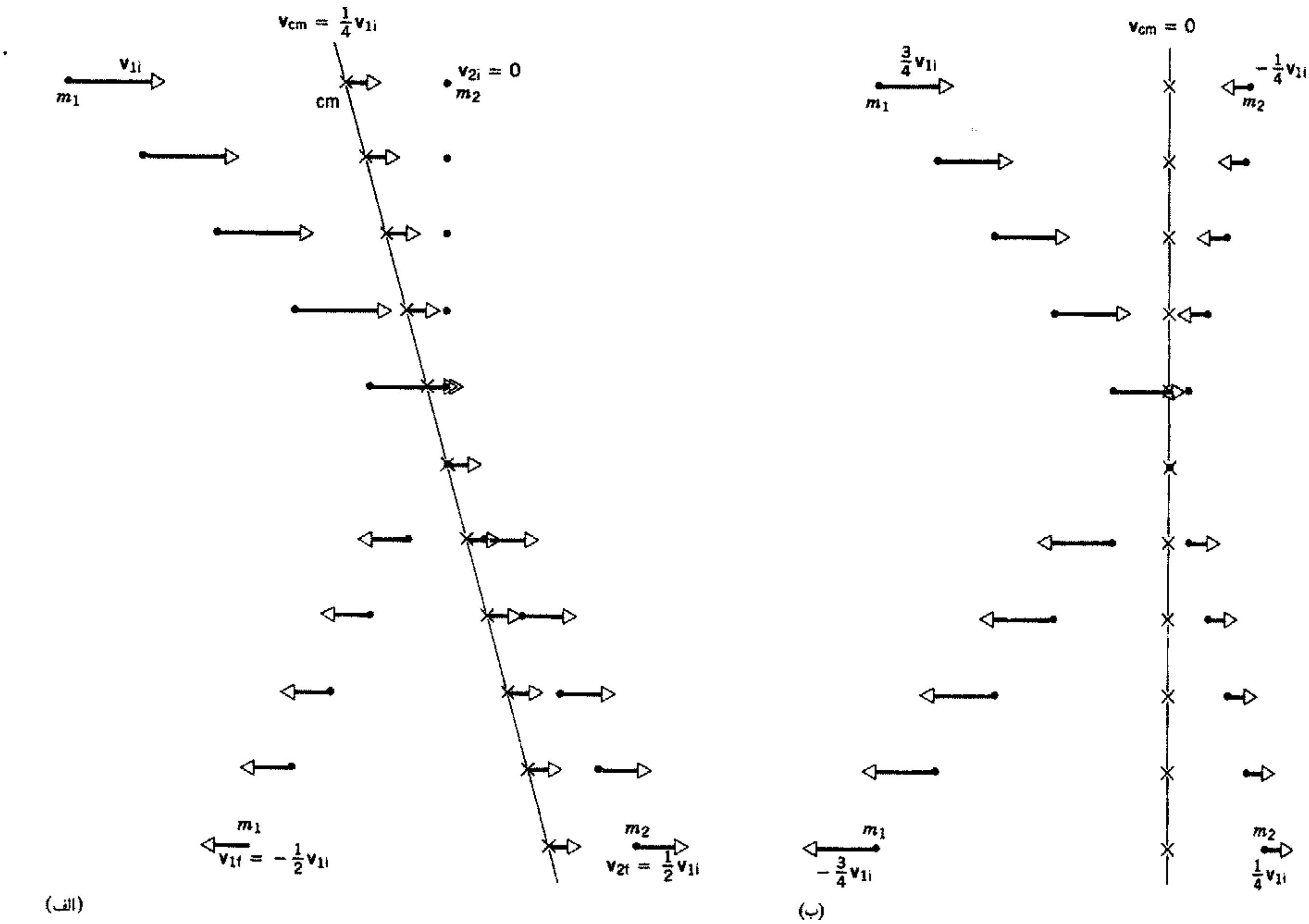
$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i}$$
$$= -\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۸)$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i}$$
$$= \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۹)$$

به تقارن این نتایج توجه کنید. در چارچوب مرکز جرم، دربرخورد فقط جهت سرعت جسمهای m_1 و m_2 وارونه می‌شود، به‌این ترتیب که سرعت جسم m_1 از $+m_2v_{1i}/(m_1+m_2)$ به $-m_2v_{1i}/(m_1+m_2)$ تغییر می‌کند و سرعت جسم m_2 از $-m_1v_{1i}/(m_1+m_2)$ به $+m_1v_{1i}/(m_1+m_2)$ تبدیل می‌شود. یک رشته تصویرهای لحظه‌ای برخورد در چارچوب مرجع مرکز جرم در شکل ۱۶ب نشان داده شده است. در این چارچوب مرجع خاص، حرکت هر ذره شبیه به حرکت توپی است که از یک سطح سخت بازمی‌جهد، ذرهٔ دیگر در آنجا حضور دارد تا ضربهٔ لازم برای وارونی حرکت را تأمین کند. این هم روشن است که در این چارچوب مرجع، انرژی جنبشی کل در حین برخورد ثابت می‌ماند. (در واقع، جداگانه برای هر یک از ذره‌ها ثابت می‌ماند.) با مشاهدهٔ برخورد از این دیدگاه، درک تازه‌ای از مفهوم برخورد "کشسان" پیدا می‌کنیم.

اکنون یک برخورد کاملاً ناکشسان یک‌بعدی را از دیدگاه چارچوب مرکز جرم بررسی می‌کنیم. باز هم فرض می‌کنیم جسم m_1 بر جسم m_2 (یعنی $3m_1$) که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است فرود می‌آید. پس از برخورد جسم مرکبی به جرم $M = m_1 + m_2$ داریم. سرعت مرکز جرم باز هم از معادلهٔ ۳۴ به‌دست می‌آید. تصویرهای لحظه‌ای در شکل ۱۷الف برخورد را در چارچوب آزمایشگاه نشان می‌دهد؛ اینجا هم مرکز جرم قبل و بعد از برخورد با سرعت یکسانی حرکت می‌کند.

تبدیل سرعتهای اولیهٔ جسمهای m_1 و m_2 دقیقاً مانند مورد قبلی است و طبق معادله‌های ۳۶ و ۳۷ انجام می‌شود. سرعت نهایی



شکل۱۶. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" مربوط به دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به‌طور کشسان در یک‌بعد با هم برخورد می‌کنند. مرکز جرم دو ذره با علامت × مشخص شده است. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

جسم M در چارچوب مرکز جرم را می‌توان از تبدیل نتیجهٔ کلی v_f در چارچوب آزمایشگاه، معادلهٔ ۲۳، به‌دست آورد

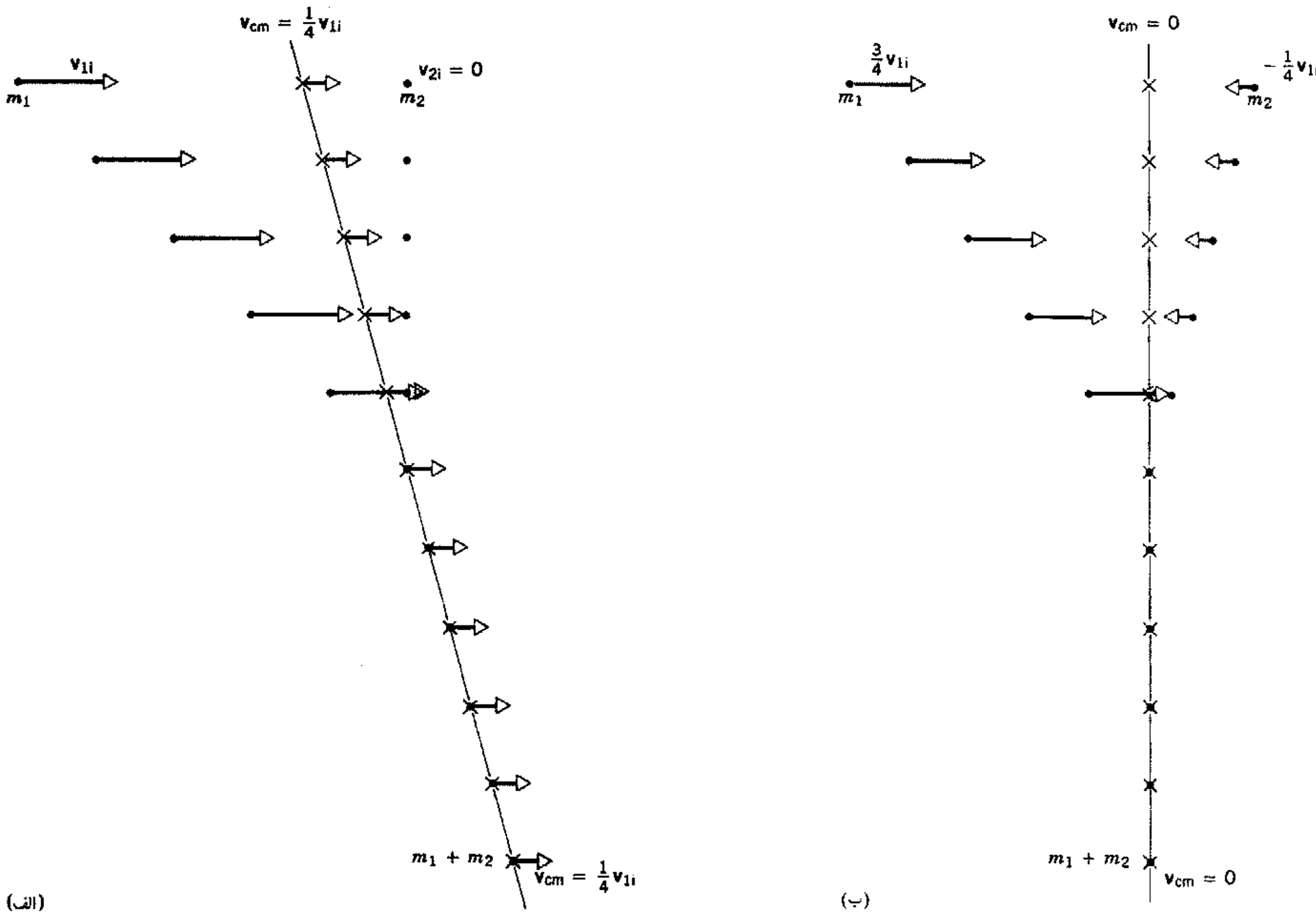
$$v'_f = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$
$$= 0$$

البته این نتیجه همان است که انتظار می‌رود و نباید عجیب باشد. جسم مرکب M همواره در مرکز جرم واقع می‌شود، زیرا شامل تمام جرم موجود در سیستم بعد از برخورد است. در چارچوب آزمایشگاه، M باید با سرعت مرکز جرم حرکت کند، و چنانچه معادله‌های ۲۳ و ۳۴ را مقایسه کنید می‌بینید که واقعاً با همین سرعت حرکت می‌کند. در چارچوب مرجعی که در آن مرکز جرم ساکن است، M هم باید در حال سکون باشد.

در چارچوب مرکز جرم (شکل ۱۷ب) باز هم تقارن وجود دارد: قبل از برخورد، اجسام m_1 و m_2 با تکانه‌های مساوی ولی در خلاف جهت به همدیگر نزدیک می‌شوند. پس از آنکه به هم برخوردند و با هم ترکیب شدند، تکانهٔ جسم مرکب باید صفر شود.

برخورد کاملاً ناکشسان در چارچوب مرجع مرکز جرم خاصیت جالب دیگری هم دارد. در چارچوب آزمایشگاه، انرژی جنبشی از دست رفته (یعنی تبدیل شده به انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل و مانند اینها) همواره کمتر از ۱۰۰٪ است؛ مثلاً، در برخورد بین دو ذرهٔ هم‌جرم، که در ابتدا یکی از آنها ساکن است، اتلاف انرژی جنبشی ۵۰٪ است. در چارچوب مرکز جرم اتلاف همیشه ۱۰۰٪ است، و فرقی هم نمی‌کند که m_1 و m_2 چه مقادیری داشته باشند. وقتی منظور از برخورد دادن ذرات تبدیل انرژی جنبشی به‌صورتهای دیگر انرژی باشد، صرفه در آن است که نه تنها نتایج را در چارچوب مرکز جرم تحلیل کنیم بلکه آزمایش را هم واقعاً در آن چارچوب انجام بدهیم.

در مطالعهٔ خواص ذرات بنیادی طبیعت، اغلب منظورمان این است که ذرات پر انرژی را به هم بکوبیم تا ذرات جدید و غریبی با جرمهای بیشتر تولید کنیم؛ در این مورد، انرژی جنبشی در طی برخورد به انرژی سکون، mc^2، ذرات دیگر تبدیل می‌شود. انرژی قابل حصول

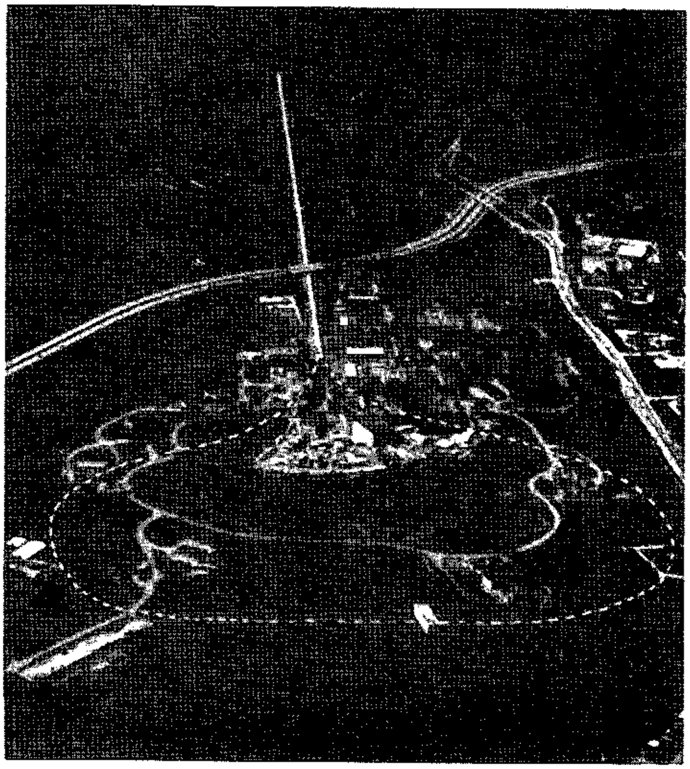


شکل ۱۷. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به‌طور کاملاً ناکشسان در یک‌بعد با هم برخورد می‌کنند. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

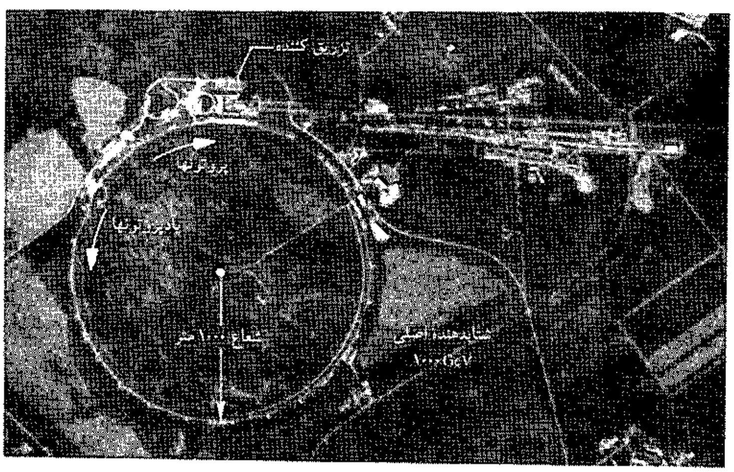
برای ایجاد ذرات جدید درست برابر با انرژی جنبشی "اتلافی" در برخورد ناکشسان است؛ در حوزهٔ این برخوردهای پرانرژی، جایی‌که باید از معادلات سینماتیک نسبیتی استفاده کرد، درمی‌یابیم که درچارچوب آزمایشگاه برای تولید ذرات جدید، انرژی جنبشی اولیهٔ مورد نیاز به‌صورت مربع انرژی سکون ذره‌ای که می‌خواهیم تولید کنیم افزایش می‌یابد. یعنی، برای تولید ذره‌ای که انرژی سکون آن ۱۰ برابر باشد نیاز به انرژی جنبشی ۱۰۰ برابر داریم و بنابراین به شتابگری نیاز داریم که ۱۰۰ برابر بزرگتر و پرهزینه‌تر است. ولی، اگر می‌توانستیم برخورد را درچارچوب مرکز جرم انجام بدهیم، در آن صورت می‌شد ذراتی با ۱۰ برابر انرژی سکون فقط با ۱۰ برابر (و نه ۱۰۰ برابر) انرژی جنبشی تولید کرد، زیرا کارایی این برخوردها در تبدیل انرژی جنبشی ۱۰۰٪ است.

نسل فعلی شتابدهنده‌های ذرات شامل نمونه‌های بسیاری از این‌گونه وسایل برخورددهندهٔ باریکه است. در مرکز شتابدهندهٔ خطی استانفورد (SLAC) در کالیفرنیا، باریکه‌های الکترون و پوزیترون (پادالکترون) هر یک با انرژی ۵۰GeV برخورد داده می‌شوند (شکل ۱۸). در آزمایشگاه شتابدهندهٔ فرمی (FNAL) در ایلینویز، باریکه‌های پروتون و پادپروتون با انرژی ۱۰۰۰GeV (۱TeV) در حلقهٔ واحدی در جهتهای مخالف می‌چرخند و در هر دور یک‌بار به هم می‌خورند (شکل ۱۹). البته، واکنشی که انجام می‌شود در هر دو چارچوبهای مرجع یکسان است؛ فقط تعبیر نتایج است که فرق می‌کند.

تا اینجا در چارچوب مرکز جرم فقط برخوردهای یک‌بعدی را مطالعه کرده‌ایم. برخورد کشسان دوبعدی هم از دیدگاه چارچوب مرجع مرکز جرم ساختار متقارن‌تری دارد. باز هم فرض می‌کنیم که جسم m_2 در ابتدا نسبت به چارچوب آزمایشگاه ساکن باشد. در اینجا به محاسبات ریاضی مربوط به برخورد دوبعدی در چارچوب مرکز جرم (که کمی پیچیده‌تر از حالت یک‌بعدی است) نمی‌پردازیم؛ فقط یک توصیف نموداری از آن را در شکل ۲۰ ارائه می‌کنیم. مانند مورد یک‌بعدی، در این برخورد هم صرفاً سرعت هر ذره معکوس می‌شود. تنها تفاوت در این است که در اینجا دو ذره پس از برخورد در امتداد خطی حرکت می‌کنند که در حالت کلی با راستای اولیهٔ حرکت فرق می‌کند. تقارن ایجاب می‌کند که زاویه‌های بین سرعتهای نهایی و سرعتهای اولیهٔ دو ذره با هم مساوی باشند؛ البته وقتی سرعتها را



شکل۱۸. شتابدهندهٔ الکترون، مرکز شتابدهندهٔ خطی استانفورد، به طول ۳٫۲ کیلومتر. الکترونها و پوزیترونها در قسمت مستقیم شتابدهنده شتاب می‌گیرند، و پس از طی مسیرهای زیرزمینی، که با خط‌چین نشان داده شده است، در آزمایشگاهی که در پایین عکس است به هم برخورد می‌کنند.

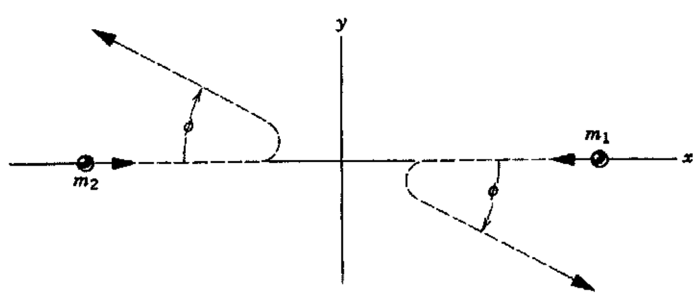


شکل۱۹. آزمایشگاه شتابدهندهٔ ملی فرمی. پروتونها و پادپروتونها از حلقهٔ کوچکی در بالای عکس به داخل حلقهٔ بزرگ (به شعاع یک کیلومتر) تزریق می‌شوند. این ذرات در جهتهای مخالف به چرخش در می‌آیند و در هر دور یکبار با هم برخورد می‌کنند.

به چارچوب آزمایشگاه بازگردانیم، در حالت کلی زاویه‌های نامساوی ϕ_1 و ϕ_2 شکل ۱۲ به‌دست می‌آیند.

۷ـ۱۰ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)

از بیش از ۲۰۰۰ گونه از هسته‌های اتمی‌ای که تاکنون شناسایی شده‌اند، بیشترشان ناپایدارند و ـــ دیر یا زود ـــ همه یا بخشی از انرژی اضافی‌شان را با شکافتن به دو یا چند پاره از دست می‌دهند. میانگین عمر چنین فرایندهای واپاشی پرتوزایی از چندین میلیارد سال (مثلاً، برای ^{238}U) تا کسرهای بسیار کوچکی از ثانیه تغییر می‌کند. تمام این واپاشیها خودبه‌خود روی می‌دهند. در یک نمونهٔ معین از یک مادهٔ



شکل۲۰. یک برخورد کشسان دوبعدی در چارچوب مرکز جرم. در این چارچوب ذرات باید در جهتهای مخالف همدیگر حرکت کنند، بنابراین هر دو، پس از برخورد، تحت زاویهٔ یکسانی منحرف می‌شوند.

پرتوزا که شامل تعداد زیادی (شاید $۱۰^{۲۰}$) هسته است می‌توانیم دقیقاً تخمین بزنیم که در یک بازهٔ زمانی معلوم چند تا از هسته‌ها وامی‌پاشند، اما هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم پیش‌بینی کنیم کدام هسته واخواهد پاشید.

اتمها، مثلاً اتمهایی که گاز داخل لامپهای مهتابی را تشکیل می‌دهند، ممکن است در حالتی با انرژی اضافی واقع شده باشند و با گسیل (باز هم خودبه‌خودی، برای یک اتم منزوی) یک کوانتوم تابش به ساختار پایدار بازگردند. ذرات بنیادی‌ای که از برخوردهای پروتون-پروتون در شتابدهنده‌های پرانرژی تولید می‌شوند نیز ممکن است خودبه‌خود واپپاشند و به ذرات دیگر تبدیل شوند (شکل ۴). واپاشی خودبه‌خودی بعضی از این ذرات چنان سریع روی می‌دهد (مثلاً، برای ذرهٔ J/ψ در حدود $۱۰^{-۲۰}$ ثانیه) که تنها شاهدی که برای وجود آنها داریم عبارت از مشاهدهٔ محصولات واپاشی تحت شرایط مساعد برای ایجاد آن ذرات است.

در این بخش دربارهٔ واپاشیهای خودبه‌خودی از نوع

$$A \to B + C$$

که در آن A ذرهٔ واپاشنده و B و C محصولات واپاشی هستند، گفتگو می‌کنیم. معمولاً این رویداد را در آزمایشگاه از چارچوبی مشاهده می‌کنیم که در آن A در حال سکون است. بنابراین واپاشی $A \to B + C$ درست وارونهٔ برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \to A$ است که از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده شده باشد (شکل ۱۷ب). در واقع، اگر در شکل ۱۷ب زمان را به عقب برگردانیم، یعنی اطلاعات روی شکل را از پایین به بالا بخوانیم و جهت بردارهای سرعت را برعکس کنیم، تصویر ذهنی خوبی از فرایند واپاشی به‌دست می‌آوریم.

در برخورد کاملاً ناکشسان، انرژی جنبشی ذرات برخوردکننده در طی برخورد "گم" می‌شود. البته، انرژی کل باید پایسته باشد و بنابراین، انرژی جنبشی "گم" شده باید در سیستم مرکب به‌صورت دیگری ظاهر شود، که آن را به‌صورت افزایش انرژی سکون جسم مرکب مشاهده می‌کنیم (رجوع کنید به بخش ۸-۷). در فرایند واپاشی، معکوس این رویداد صورت می‌گیرد: انرژی سکون A به انرژی جنبشی B و C تبدیل می‌شود. پس در فرایند واپاشی، پایستگی انرژی را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$E_A = E_B + E_C$$
$$m_A c^۲ + K_A = (M_B c^۲ + K_B) + (m_C c^۲ + K_C) \qquad (۴۰)$$

در اینجا انرژی کل هر ذره به‌صورت مجموع انرژی سکون $mc^۲$ و انرژی جنبشی K آمده است. معادلهٔ ۴۰ را به کلی‌ترین صورت نوشته‌ایم و این را هم در نظر گرفته‌ایم که ذره A به هنگام واپاشی ممکن است دارای انرژی جنبشی K_A باشد، ولی معمولاً مواردی را بررسی می‌کنیم که در آنها $K_A = ۰$ است.

معادلهٔ ۴۰ را می‌توانیم با گردآوردن جملات انرژی سکون در یک طرف و جملات انرژی جنبشی در طرف دیگر، به‌صورت زیر بنویسیم

$$m_A c^۲ - m_B c^۲ - m_C c^۲ = K_B + K_C - K_A \qquad (۴۱)$$

انرژی آزاد شده در واپاشی، Q، را به‌صورت تفاوت میان انرژی سکون اولیه $m_i c^۲$ و انرژی سکون نهایی $m_f c^۲$ تعریف می‌کنیم:

$$Q = m_i c^۲ - m_f c^۲ \qquad (۴۲)$$

که برای واپاشی مورد مطالعه چنین می‌شود

$$Q = (m_A - m_B - m_C)c^۲ \qquad (۴۳)$$

یا، با استفاده از معادلهٔ ۴۱

$$Q = K_B + K_C - K_A \qquad (۴۴)$$

یعنی، Q برابر است با انرژی جنبشی خالصی که محصولات واپاشی، کسب می‌کنند. در صورتی‌که A از حال سکون واپپاشد، Q برابر است با انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی.

در فرایند واپاشی تکانهٔ خطی باید پایسته باشد. اگر A در حال سکون باشد، باشد، تکانهٔ اولیه کل صفر است، و در نتیجه تکانهٔ نهایی هم باید صفر باشد

$$p_i = p_f$$
$$۰ = p_B - p_C \qquad (۴۵)$$

معادله‌های ۴۴ (با $K_A = ۰$) و ۴۵ دو معادله با دو مجهول‌اند که می‌توان آنها را برای انرژیها یا تکانه‌های محصولات واپاشی B و C حل کرد. حاصل حل این معادلات، وقتی انرژی سکون هیچ‌یک از ذرات B و C صفر نباشد، عبارت است از

$$K_B = Q\frac{m_C}{m_B + m_C} \qquad (۴۶)$$

$$K_C = Q\frac{m_B}{m_B + m_C} \qquad (۴۷)$$

در بسیاری از فرایندهای واپاشی که در آزمایشگاه بررسی می‌شوند، یکی از محصولات، مثلاً B، انرژی سکون بسیار کمتری از دیگری دارد، یعنی $m_B \ll m_C$ است. مثلاً B ممکن است یک الکترون (با انرژی سکون $۰٫۵۱۱\text{MeV}$) یا یک ذرهٔ آلفا (با انرژی سکون ۳۷۲۷MeV) باشد، در حالی‌که C ممکن است یک اتم یا هستهٔ سنگین (نوعاً، با انرژی سکون $۱۰^۵\text{MeV}$) باشد. اغلب این ذرهٔ سبکتر است که باید در آزمایش مشاهده شود. در چنین صورتی، همان‌طور که معادلات ۴۶ و ۴۷ نشان می‌دهند، $K_B \approx Q$ و $K_C \ll K_B$ است. توجه داشته باشید که اگر چه انرژیهای جنبشی دو ذره کاملاً متفاوت است، مقدار تکانه‌ها (که در جهتهای مخالف یکدیگرند)، همان‌طور که معادله ۴۵

ایجاب می‌کند، دقیقاً یکسان باقی می‌ماند. در چنین حالتی اغلب از تکانهٔ پس‌زنی یا انرژی (جنبشی) پس‌زنی C صحبت می‌کنیم، گویی که C تفنگ سنگینی است که پس از شلیک گلولهٔ سبک B پس می‌زند (مثال ۷ از فصل ۹).

مثال ۶. گسیل ذره‌های آلفا (هسته‌های اتم هلیم) را در واپاشی طبیعی عنصر پرتوزای رادیم (^{226}Ra) به عنصر گازی رادون (^{222}Rn) در نظر بگیرید

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}\mathrm{Rn} + \alpha$$

اگر ^{226}Ra از حال سکون واپاشد، انرژی جنبشی محصولات چقدر است؟

حل: جرمهای اتمی عبارت‌اند از

$$^{226}\mathrm{Ra}: ۲۲۶{,}۰۲۵۴۰۳\mathrm{u}; \qquad ^{222}\mathrm{Rn}: ۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u}$$
$$\alpha: ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}$$

می‌توانیم از معادلهٔ ۴۳ مقدار Q را محاسبه کنیم، در این محاسبه مقدار $c^2 = ۹۳۲\mathrm{MeV/u}$ را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} Q &= [m(^{226}\mathrm{Ra}) - m(^{222}\mathrm{Rn}) - m(\alpha)]c^2 \\ &= (۲۲۶{,}۰۲۵۴۰۳\mathrm{u} - ۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} \\ &\quad - ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u})(۹۳۲\mathrm{MeV/u}) \\ &= ۴{,}۸۷\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

حالا می‌توانیم انرژی جنبشی ذرات را از معادله‌های ۴۶ و ۴۷ پیدا کنیم

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{Rn}} &= (۴{,}۸۷\mathrm{MeV})\frac{۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}}{۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} + ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}} \\ &= ۰{,}۰۹\mathrm{MeV} \\ K_{\alpha} &= (۴{,}۸۷\mathrm{MeV})\frac{۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u}}{(۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} + ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}} \\ &= ۴{,}۷۸\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

توجه کنید که، بنابه معادلهٔ ۴۴ (با $K_A = ۰$)، دو انرژی جنبشی روی هم Q را به‌دست می‌دهند؛ همچنین توجه کنید که ذرهٔ سبکتر آلفا قسمت اعظم انرژی (ولی نه همهٔ آن) را به خودش اختصاص می‌دهد ـــ در مورد این مسئله در حدود ۹۸٪.

پرسشها

۱. چگونگی پایستگی تکانه را در مورد بازجهش توپ از دیوار توضیح بدهید.

۲. آیا ضربهٔ یک نیروی غیرصفر می‌تواند صفر باشد؟ در هر صورت توضیح بدهید.

۳. شکل ۲۱ یک وسیلهٔ زورآزمایی تفریحی را نشان می‌دهد. زورآزما سعی می‌کند با پتک هر چه شدیدتر روی هدف بکوبد و یک شاخص متحرک سنگین وزن را حتی‌الامکان بالاتر بفرستد. این ابزار کدام کمیت فیزیکی را اندازه‌گیری می‌کند؟ نیروی متوسط، نیروی بیشینه، کارانجام شده، ضربه، انرژی انتقال‌یافته، تکانهٔ انتقال‌یافته، یا چیز دیگری را؟ جواب خودتان را توضیح بدهید.

شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. اگرچه شتاب توپ بیسبال پس از ضربه خوردن ارتباطی به‌زنندهٔ ضربه ندارد، ولی باید کمیتی مربوط به پرواز توپ به زنندهٔ ضربه بستگی داشته باشد. آن کمیت کدام است؟

۵. توضیح بدهید که چگونه ممکن است یک کیسهٔ هوا در اتومبیل، مسافر را از صدمات شدید در تصادف تا حدودی حفظ کند.

۶. گفته می‌شود که در یک تصادف با سرعت $۳۰\mathrm{mi/h}$، کودک $۱۰\mathrm{lb}$ می‌تواند نیروی $۳۰۰\mathrm{lb}$ به مسافری که او را در بغل نشانده است وارد کند. نیرویی به این‌بزرگی از کجا ناشی می‌شود؟

۷. نظرتان را دربارهٔ گفتهٔ زیر بیان کنید: در تصادف اتومبیل نیرویی را که اتومبیل در ضمن متوقف شدن وارد می‌کند می‌توان از تکانه یا انرژی جنبشی آن تعیین کرد. در مورد اول باید زمان توقف و در مورد دوم باید مسافت توقف را بدانیم.

۸. فولاد از لاستیک کشسان‌تر است. توضیح بدهید که منظور از این گفته چیست؟

۹. اگر می‌توانستیم همهٔ حرکتهای داخلی اتمهای اجسام را به‌حساب بیاوریم، می‌شد همهٔ برخوردها را کشسان تلقی کرد. در این باره بحث کنید.

۱۰. اگر (فقط) دو ذره با هم برخورد کنند، آیا هیچ‌وقت مجبور خواهیم شد که برای وصف کردن این رویداد از توصیف سه‌بعدی استفاده کنیم؟ توضیح بدهید.

۱۱. دیده‌ایم که تکانه می‌تواند پایسته باشد صرفنظر از اینکه انرژی جنبشی پایسته باشد یا نباشد. آیا برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی، آیا در فیزیک کلاسیک پایستگی انرژی جنبشی پایستگی تکانه را ایجاب می‌کند؟[1]

۱۲. آنچه می‌آید از یک ورقهٔ امتحان انتخاب شده است: "برخورد بین دو اتم هلیم کاملاً کشسان است، و در نتیجه تکانه پایسته می‌ماند." نظر شما دربارهٔ این گفته چیست؟

۱۳. در بزرگراهی با سرعت $50\,\mathrm{mi/h}$ در حرکتیم، و یک اتومبیل دیگر پشت سر ما با همین سرعت حرکت می‌کند. سرعتمان را به $40\,\mathrm{mi/h}$ کاهش می‌دهیم ولی اتومبیل پشت سری چنین نمی‌کند و برخورد روی می‌دهد. سرعتهای اولیهٔ اتومبیلهای برخوردکننده از دیدگاه هر یک از چارچوبهای مرجع زیر چقدر است؟ (الف) خودمان، (ب) رانندهٔ اتومبیل عقبی، و (ج) پلیسی که در اتومبیل گشت خود درکنار بزرگراه متوقف است. (د) قاضی تصادفات می‌پرسد که آیا شما به او "زدید" یا ماشین عقبی به شما زد. شما، به عنوان فیزیک‌پیشه، چه جوابی به این سؤال می‌دهید؟

۱۴. سی آر دایش نوشته است که، برای گلف‌بازان حرفه‌ای، سرعت اولیهٔ توپ موقع جدا شدن از چوبدست در حدود $140\,\mathrm{mi/h}$ است. و دیگر اینکه: (الف) "اگر می‌شد ساختمان "امپایر استیت "را به عنوان چوبدست با همان سرعت چوبدست تاب داد و به توپ ضربه وارد کرد، سرعت اولیهٔ توپ فقط در حدود ۲٪ افزایش می‌یافت" و (ب) همین که گلف‌باز حرکت تاب رو به پایین چوبدست را آغاز کرد، دیگر صدای شاتر دوربین، عطسه، و مانند اینها تأثیری در حرکت توپ نخواهد داشت. آیا می‌توانید با ارائهٔ یک بحث کیفی این دو گزاره را تأیید کنید؟

۱۵. از معادله‌های ۱۲ و ۱۳ روشن است که یک جواب قابل قبول برای مسئلهٔ برخورد یک‌بعدی کشسان عبارت است از $v_{1f} = v_{1i}$ و $v_{2f} = v_{2i}$ تعبیر فیزیکی این جوابها چیست؟

۱۶. دو گلوله گلی با سرعت و جرم مساوی با یکدیگر رودررو برخورد می‌کنند، به هم می‌چسبند، و به حال سکون در می‌آیند. در این برخورد، انرژی جنبشی قطعاً پایسته نیست. چه بر سر انرژی جنبشی می‌آید؟ تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

۱۷. یک فوتبالیست، در لحظه‌ای که ساکن است، توپی را دریافت می‌کند و در همان موقع مورد اصابت بازیکن دوانِ تیم مقابل قرار می‌گیرد. مسلماً این رویداد یک برخورد (ناکشسان) است و تکانه باید در آن پایسته بماند. در چارچوب مرجع زمین فوتبال، قبل از برخورد تکانه وجود داشته است ولی به نظر می‌رسد که بعد از برخورد تکانه‌ای در کار نیست. آیا تکانهٔ خطی واقعاً پایسته است؟ اگر چنین است توضیح بدهید چگونه؟ و اگر چنین نیست توضیح بدهید که چرا؟

۱۸. برخورد یک‌بعدی کشسان بین جسم متحرک A و جسم ساکن B را در نظر بگیرید. برای اینکه جسم B پس از برخورد با (الف) بیشترین سرعت، (ب) بیشترین تکانه، و (ج) بیشترین انرژی جنبشی به‌حرکت در بیاید جرم آن‌را در مقایسه با جرم جسم A چگونه انتخاب می‌کنید؟

۱۹. دو جسم مکعب شکل یکسان، که هر دو در یک راستا با سرعت یکسان v در حرکت‌اند، با جسم سومی که مشابه آنهاست و در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارد، برخورد می‌کنند. حرکت این سه جسم پس از برخورد چگونه است؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با هم در تماس باشند یا نباشند؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با چسب به همدیگر چسبانده شده باشند؟ فرض کنید برخوردها (الف) کاملاً ناکشسان و (ب) کشسان باشند.

۲۰. چگونه می‌توانید تفنگی طراحی کنید که پس‌زنی نداشته باشد؟[1]

۲۱. در برخورد دو جسم در چارچوب مرجع مرکز جرم تکانه‌های آنها، هم قبل از برخورد و هم بعداز برخورد، مساوی و مختلف‌الجهت‌اند. آیا خط مشخص‌کنندهٔ حرکت نسبی بعد از برخورد الزاماً همان خط پیش از برخورد است؟ تحت چه شرایطی مقدار سرعتهای اجسام بر اثر برخورد زیاد می‌شود؟ کم می‌شود؟ تغییر نمی‌کند؟

۲۲. یک ساعت ماسه‌ای را با یک ترازوی حساس وزن می‌کنیم؛ یک‌بار وقتی ماسه با جریان ثابتی از قسمت بالایی به قسمت پایینی می‌ریزد و یک‌بار هم وقتی قسمت بالایی خالی است. آیا وزن این جسم در دو مورد یکسان است؟ دربارهٔ جواب خودتان توضیح بدهید.

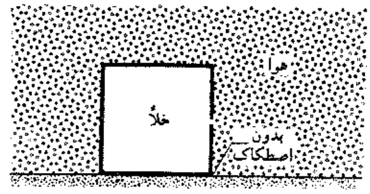
۲۳. توضیح معقولی برای شکسته شدن تخته‌های چوبی و یا آجرها در اثر ضربه‌های کاراته ارائه کنید.[2]

۲۴. یک جعبهٔ تخلیه‌شده از هوا روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد. سوراخ کوچکی در یک وجه آن ایجاد می‌کنیم به‌طوری که هوا بتواند به آن وارد شود (شکل ۲۲). جعبه چگونه حرکت خواهد کرد؟ استدلال شما برای رسیدن به این جواب چیست؟

---

۱. نگاه کنید به
"Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum," Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, May 1976, p. 483.

۲. نگاه کنید به
"Karate Strikes," Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, October 1975, p. 845.



شکل ۲۲. پرسش ۲۴

۲۵. در اظهار نظر دربارهٔ پایسته نبودن انرژی جنبشی در برخورد کاملاً ناکشسان، دانشجویی می‌گوید که در انفجار انرژی جنبشی پایسته نیست و برخورد کاملاً ناکشسان هم صرفاً معکوس فرایند انفجار است. آیا چنین استدلالی مفید یا معقول هست؟

۲۶. تحت چه شرایطی، اگر اصلاً شرطی لازم باشد، مجازیم بگوییم که واپاشی $A \to B + C$ صرفاً معکوس برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \to A$ است؟

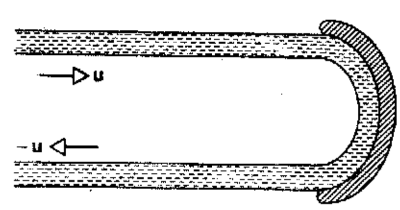
مسئله‌ها

بخش ۱۰ـ۳ پایستگی تکانه در حین برخورد

۱. در یک آزمایش استحکام سپر، اتومبیل ۲۳۰۰ کیلوگرمی که با سرعت ۱۵m/s در حرکت است با پایهٔ کناری پلی برخورد می‌کند و در مدت ۰٫۵۴ ثانیه متوقف می‌شود. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در طی این برخورد چقدر بوده است؟

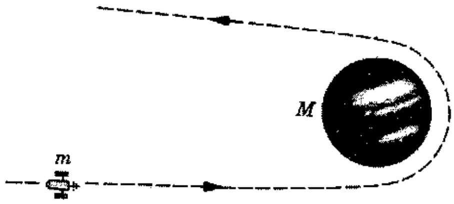
۲. توپی به جرم m با سرعت v به‌طور عمود با دیواری برخورد می‌کند و بی‌آنکه سرعتش کم شود از دیوار باز می‌جهد. (الف) اگر زمان برخورد برابر Δt باشد، نیروی متوسط وارد بر دیوار از توپ چقدر است؟ (ب) این نیروی متوسط را برای یک توپ لاستیکی ۱۴۰ گرمی که با سرعت ۷٫۸m/s در حرکت است و برخورد آن با دیوار ۳٫۹ms طول می‌کشد، محاسبه کنید.

۳. جریان آبی به پرهٔ "بشقابی" توربین که ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۲۳). سرعت آب قبل و بعد از برخورد با سطح خمیدهٔ پره برابر با u است و جرم آبی که در واحد زمان با پره برخورد می‌کند مقدار ثابت μ است. چه نیرویی از آب به پره وارد می‌شود؟



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۳

۴. فضاپیمای ویجر ۲ (با جرم m و سرعت v نسبت به خورشید) به سیارهٔ مشتری (با جرم M و سرعت V نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود (شکل ۲۴). فضاپیما سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف از آن دور می‌شود. سرعت فضاپیما (نسبت به خورشید) پس از این "برخورد پرتابی" چقدر است؟ فرض کنید $v =$ ۱۲km/s و $V =$ ۱۳km/s (سرعت مداری مشتری) است. جرم مشتری خیلی بیشتر از جرم فضاپیماست ($M \gg m$).[1]



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۴

۵. گلف‌بازی ضربه‌ای به توپ وارد می‌کند و به آن سرعت اولیهٔ ۵۲٫۲m/s در راستای ۳۰° بالای افق می‌دهد. با فرض اینکه جرم توپ ۴۶٫۰ گرم باشد و چوبدست و توپ ۱٫۲۰ms در تماس باشند، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) ضربهٔ وارد بر توپ، (ب) ضربهٔ وارد بر چوبدست، (ج) نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست و (د) کار انجام شده روی توپ.

۶. یک اتومبیل ۱۴۲۰ کیلوگرمی با سرعت ۵٫۲۸m/s به‌طرف شمال در حرکت است. این اتومبیل یک گردش به راست ۹۰° را در ۴٫۶۰ ثانیه انجام می‌دهد. پس از آن اتومبیل به یک درخت برخورد می‌کند و در مدت ۳۵۰ms متوقف می‌شود. ضربهٔ وارد بر اتومبیل در هر یک از حالتهای زیر چقدر است؟ (الف) در طی گردش به‌راست و (ب) در طی برخورد. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در دو حالت زیر چقدر است؟ (ج) در طی گردش به‌راست و (د) در طی برخورد.

۷. یک توپ بیسبال ۱۵۰ گرمی (وزن = ۵٫۳۰oz) که با سرعت ۴۱٫۶m/s در حرکت است با چوبدست ضربه می‌خورد و با سرعت ۶۱٫۵m/s مستقیماً به عقب برمی‌گردد. مدت تماس توپ و چوبدست ۴٫۷۰ms است. نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست چقدر است؟

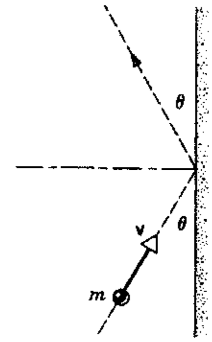
۸. در برخوردی که ۲۷٫۰ms طول می‌کشد، نیروی متوسط ۹۸۴N به یک گوی فولادی ۴۲۰ گرمی که با سرعت ۱۳٫۸m/s در حرکت است وارد می‌شود. اگر نیرو در جهت مخالف سرعت اولیهٔ گوی باشد، سرعت نهایی گوی را پیدا کنید.

۹. یک توپ ۳۲۵ گرمی با سرعت $v =$ ۶٫۲۲m/s تحت زاویهٔ $\theta =$ ۳۳٫۰° به دیواری برخورد می‌کند و تحت همان زاویه و با همان

---

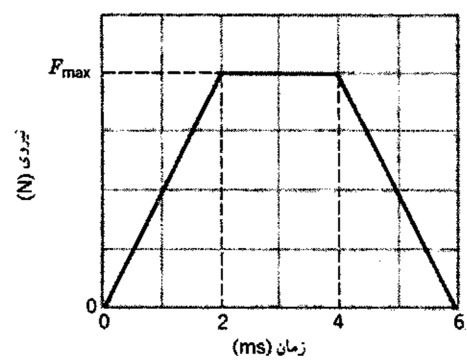
۱. نگاه کنید به
"The Slingshot Effect: Explanation and Analogies," Albert A. Bartlett and Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, November 1985, p. 466.

سرعت از دیوار باز می‌جهد (شکل ۲۵). توپ به مدت ۱۰٫۴ms با دیوار در تماس بوده است. (الف) چه ضربه‌ای به توپ وارد می‌شود؟ (ب) نیروی متوسطی که توپ به دیوار وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۹

۱۰. شکل ۲۶ نمودار تقریبی نیرو برحسب زمان را برای یک توپ تنیس ۵۸٫۰ گرمی در طی برخورد با یک دیوار نشان می‌دهد. سرعت اولیه توپ ۳۲m/s و عمود بر دیوار است؛ این توپ با همان سرعت و عمود بر دیوار از آن باز می‌جهد. مقدار نیروی ماکزیموم در طی برخورد چقدر است؟



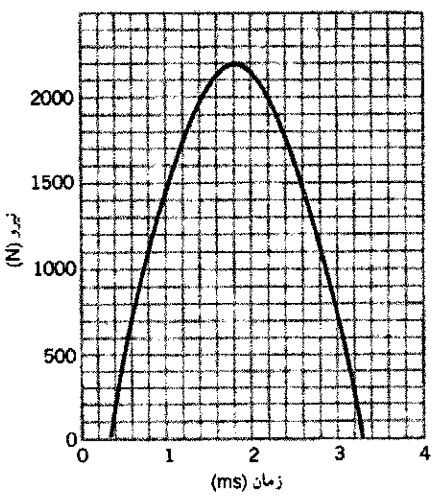
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. یک کاوشگر فضایی بدون سرنشین به جرم ۲۵۰۰ کیلوگرم با سرعت ثابت ۳۰۰m/s در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. موتور موشکی کاوشگر در یک مرحله نیروی پیشران ۳۰۰۰N برای مدت ۶۵٫۰ ثانیه تولید می‌کند. (الف) اگر نیروی پیشران به سوی عقب، یا به‌سوی جلو، یا در جهت جانبی باشد، تغییر تکانهٔ کاوشگر (فقط مقدار) چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی جنبشی کاوشگر در همان سه حالت بالا چقدر است؟ فرض کنید جرم سوختی که به بیرون رانده شد در مقایسه با جرم کل کاوشگر قابل چشم‌پوشی است.

۱۲. نیرویی به جسمی به جرم m ضربهٔ J وارد می‌کند و سرعت آن را از u به v تغییر می‌دهد. حرکت جسم در همان راستای نیروست. نشان بدهید که کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر است با $\frac{1}{2}J(u+v)$.

۱۳. دو قسمت یک فضاپیما با انفجار مهره‌های منفجره‌ای که آنها را متصل به هم نگه می‌دارد، از هم جدا می‌شوند. جرم دو تکهٔ جدا شده ۱۲۰۰kg و ۱۸۰۰kg است؛ ضربه‌ای که به هر تکه وارد می‌شود برابر با ۳۰۰Ns است. سرعت نسبی دور شدن تکه‌ها چقدر است؟

۱۴. توپی به جرم ۰٫۵۰kg ضربه‌ای می‌خورد که نمودار آن در شکل ۲۷ نشان داده شده است. سرعت توپ درست پس از لحظه‌ای که نیرو صفر می‌شود، چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. گلوله‌ها و سایر پرتابه‌هایی که به سوپرمن شلیک می‌شوند، معمولاً از سینهٔ او باز می‌جهند (شکل ۲۸). فرض کنید یک "آدم بد" رگباری از گلوله‌های ۳٫۰ گرمی را با آهنگ ۱۰۰ گلوله بر دقیقه به سینهٔ سوپرمن شلیک می‌کند، و سرعت هر گلوله ۵۰۰m/s است. باز هم فرض کنید

شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۵

که گلوله‌ها بدون از دست دادن سرعت مستقیماً به عقب باز می‌جهند. نشان بدهید که متوسط نیرویی که از این رگبار به سینهٔ سوپرمن وارد می‌شود فقط ۵٫۰ نیوتون (۱۸oz =) است.

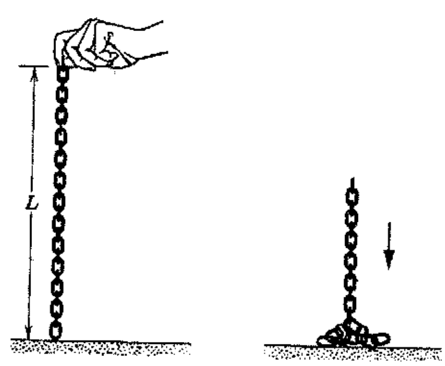
۱۶. یک قهرمان کاراته تخته‌ای به ضخامت ۲٫۲cm را با یک ضربهٔ دست می‌شکند. فیلمبرداری آهسته نشان می‌دهد که دست، که جرم آن‌را می‌توان ۵۴۰g در نظر گرفت، با سرعت ۹٫۵m/s به بالای تخته برخورد می‌کند و در فاصلهٔ ۲٫۸cm پایین‌تر از این نقطه متوقف می‌شود. (الف) مدت زمان این ضربه (با فرض نیروی ثابت) چقدر است؟ (ب) چه نیروی متوسطی اعمال شده است؟

۱۷. یک تفنگ ساچمه‌ای در هر ثانیه ۱۰ ساچمه ۲٫۱۴ گرمی را با سرعت ۴۸۳m/s شلیک می‌کند. ساچمه‌ها در برخورد به یک دیوار صلب متوقف می‌شوند. (الف) تکانهٔ هر ساچمه را معین کنید. (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه را به‌دست بیاورید. (ج) میانگین نیروی وارد بر دیوار از رگبار ساچمه‌ها را محاسبه کنید. (د) اگر هر ساچمه به مدت ۱٫۲۵ms با دیوار در تماس باشد، میانگین نیروی وارد بر دیوار از هر ساچمه در طی مدت تماس چقدر است؟ چرا این جواب تا این حد با جواب قسمت (ج) تفاوت دارد؟

۱۸. در یک توفان تندری، دانه‌های تگرگ به قطر یک سانتی‌متر با سرعت ۲۵m/s فرو می‌ریزند. تخمین زده می‌شود که در هر مترمکعب هوا ۱۲۰ تگرگ موجود باشد. از بازجهش تگرگها به هنگام برخورد چشمپوشی کنید. (الف) جرم هر دانهٔ تگرگ چقدر است؟ (ب) در طی این توفان از طرف تگرگ چه نیرویی بر یک بام مسطح به ابعاد ۱۰m × ۲۰m وارد می‌شود؟ فرض کنید که هر سانتی‌متر مکعب تگرگ، مانند یخ، ۰٫۹۲g جرم داشته باشد.

۱۹. فرض کنید پره‌های چرخان یک هلیکوپتر، ستون استوانه‌ای شکل هوای زیرشان را به سمت پایین می‌رانند. جرم کل هلیکوپتر ۱۸۲۰kg و طول پره‌ها ۴٫۸۸m است. حداقل توان مورد نیاز برای اینکه هلیکوپتر در هوا بماند چقدر است؟ چگالی هوا را ۱٫۲۳kg/m^3 بگیرید.

۲۰. زنجیر یکنواخت بسیار قابل انعطافی به جرم M و طول L از یک انتها آویزان شده است. این زنجیر به‌طور قائم قرار گرفته است و انتهای آزاد آن درست مماس با سطح یک میز است. انتهای بالایی

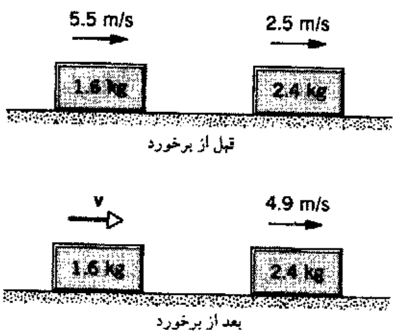


شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۰

ناگهان آزاد می‌شود و زنجیر روی میز می‌افتد و به‌صورت کپهٔ کوچکی در می‌آید (شکل ۲۹). هر حلقه زنجیر در لحظهٔ برخورد با میز به حال سکون در می‌آید. نیروی وارد بر زنجیر از طرف میز را در هر لحظه برحسب وزن آن طولی از زنجیر که در آن لحظه روی میز قرار دارد، معین کنید.

بخش ۱۰ـ۴ برخورد در یک‌بعد

۲۱. قالبهای نشان داده شده در شکل ۳۰ بدون اصطکاک می‌لغزند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد کشسان است؟



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۱ و ۲۲

۲۲. در شکل ۳۰ فرض کنید جهت سرعت اولیه قالب ۲٫۴ کیلوگرمی برعکس شود و این قالب مستقیماً به‌سوی قالب ۱٫۶ کیلوگرمی حرکت کند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد یک برخورد کشسان است؟

۲۳. فیل خشمگینی با سرعت ۲٫۱m/s به پشه سمجی حمله می‌کند. با فرض کشسان بودن برخورد، پشه با چه سرعتی از فیل دور می‌شود؟ توجه داشته باشید که در این مورد پرتابه (فیل) بسیار سنگین‌تر از هدف (پشه) است.

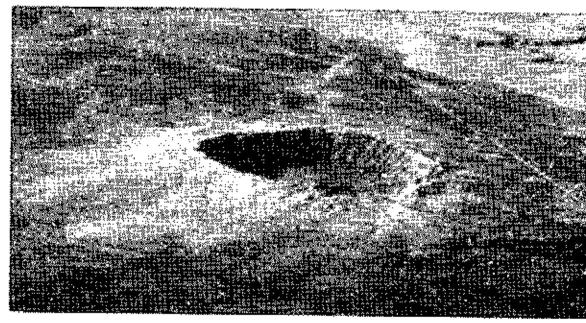
۲۴. دو کره از جنس تیتانیم با سرعت یکسانی به همدیگر نزدیک می‌شوند و رودررو برخورد کشسان می‌کنند. پس از برخورد، یکی از کره‌ها که جرم آن ۳۰۰ گرم است ساکن می‌شود. جرم کرهٔ دیگر چقدر است؟

۲۵. گلوله‌ای به جرم ۴٫۵۴g در راستای افقی به‌سوی یک قالب چوبی به جرم ۲٫۴۱kg که روی سطحی افقی به‌حال سکون قرار دارد شلیک می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان قالب و سطح برابر با ۰٫۲۱۰ است. گلوله در داخل قالب چوبی، که مسافت ۱٫۸۳m را روی سطح طی می‌کند، متوقف می‌شود. (الف) سرعت قالب چوبی درست در لحظه‌ای که گلوله در داخل آن متوقف می‌شود چقدر است؟ (ب) سرعت اولیهٔ گلوله چقدر است؟

۲۶. لغزنده‌ای به جرم ۳۴۲ گرم که با سرعت اولیهٔ ۱٫۲۴m/s روی یک ریل هوای خطی بدون اصطکاک در حرکت است با لغزندهٔ دیگری با جرم مجهول که روی ریل ساکن است برخورد می‌کند. برخورد بین این اجسام کشسان است. پس از برخورد، جسم اول در همان جهت

اولیه‌اش با سرعت $0{,}636\,\text{m/s}$ به حرکتش ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دوم چقدر است؟ (ب) سرعت جسم دوم پس از برخورد چقدر است؟

۲۷. چنین تصور می‌شود که "حفرهٔ آریزونا" (شکل ۳۱) بر اثر برخورد یک شهاب‌سنگ با زمین در حدود ۲۰۰۰۰ سال قبل ایجاد شده باشد. تخمین زده می‌شود که جرم این شهاب‌سنگ $5 \times 10^{10}\,\text{kg}$ و سرعت آن $7{,}2\,\text{km/s}$ بوده است. چنین شهاب‌سنگی در یک برخورد رودررو چه سرعتی می‌تواند به زمین بدهد؟



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۷

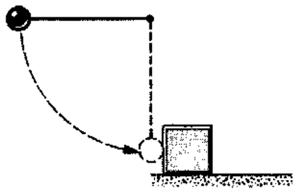
۲۸. یک گلولهٔ ۵٫۱۸ گرمی که با سرعت $672\,\text{m/s}$ در حرکت است با یک قالب چوبی به جرم ۷۱۵ گرم که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد برخورد می‌کند. این گلوله با سرعت کاهش‌یافتهٔ $428\,\text{m/s}$ از طرف دیگر قالب خارج می‌شود. سرعت نهایی قالب را پیدا کنید.

۲۹. جسمی به جرم $2{,}0\,\text{kg}$ با جسم دیگری که ساکن است برخورد می‌کند و با سرعتی برابر با یک چهارم سرعت اولیه‌اش در همان راستای اولیه به حرکت ادامه می‌دهد. جرم جسم دیگر چقدر است؟

۳۰. در یک تفنگ خودکار قدیمی، سازوکار "بار کردن" در قسمت عقب لوله وقتی وارد عمل می‌شود که گلنگدن، که پس از شلیک گلوله عقب‌نشینی می‌کند، یک فنر را به اندازهٔ معین d می‌فشارد. (الف) نشان بدهید که برای خودکار بودن تفنگ، باید سرعت گلوله در لحظهٔ شلیک حداقل برابر باشد با $d\sqrt{kM}/m$ که درآن k نیروی ثابت فنر و M جرم گلنگدن، و m جرم گلوله است. (ب) در چه صورتی می‌توانیم (اگر اصولاً بتوانیم) این فرایند را "برخورد " تلقی کنیم؟

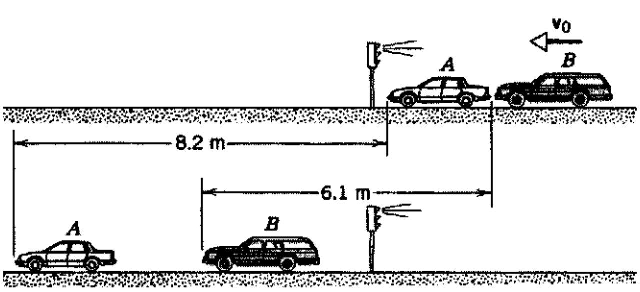
۳۱. سر چوبدست گلف که با سرعت $45{,}0\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند با توپ گلفی به جرم ۴۶٫۰ گرم که روی "پایه"اش قرار دارد برخورد می‌کند. جرم مؤثر قسمت سرچوبدست ۲۲۰ گرم است. (الف) توپ با چه سرعتی پایه را ترک می‌کند؟ (ب) اگر جرم قسمت سر چوبدست را دو برابرکنیم سرعت پرتاب توپ از پایه چقدر خواهد شد؟ اگر سه برابرکنیم چطور؟ در مورد استفاده از چوبدستهای سنگین چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ فرض کنید برخوردها کاملاً کشسان‌اند و دیگر اینکه گلف‌باز می‌تواند چوبدستهای سنگین را تا لحظهٔ برخورد به همان سرعت چوبدست سبک برساند (پرسش ۱۴).

۳۲. گلوله‌ای فولادی به جرم ۰٫۵۱۴ کیلوگرم از یک سر ریسمانی به طول ۶۸٫۷ سانتی‌متر آویزان شده است. ریسمان را از حالت کشیدهٔ افقی رها می‌کنیم. در پایین‌ترین قسمت مسیر، این گلوله با یک قالب فولادی به جرم ۲٫۶۳ کیلوگرم که روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۳۲). برخورد کشسان است. کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله درست پس از برخورد، (ب) سرعت قالب فولادی، درست پس از برخورد، (ج) اکنون فرض کنید که در ضمن برخورد، نیمی از انرژی جنبشی مکانیکی به انرژی داخلی و انرژی صوتی تبدیل شود. در این‌صورت سرعتهای نهایی را به‌دست بیاورید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۲

۳۳. دو اتومبیل A و B که می‌خواهند قبل از چراغ راهنما متوقف شوند روی جادهٔ یخ‌زده می‌لغزند. جرم اتومبیل A برابر با ۱۱۰۰ کیلوگرم و جرم اتومبیل B برابر با ۱۴۰۰ کیلوگرم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخهای قفل‌شدهٔ هر دو اتومبیل و جاده برابر با ۰٫۱۳۰ است. اتومبیل A موفق می‌شود که قبل از چراغ راهنما بایستد، ولی اتومبیل B نمی‌تواند متوقف شود و از پشت به اتومبیل A می‌زند. پس از برخورد، اتومبیل A در فاصلهٔ ۸٫۲۰ متر از محل برخورد، و اتومبیل B در فاصلهٔ ۶٫۱۰ متر از همان محل متوقف می‌شود (شکل ۳۳). در طی این رویداد ترمزهای هر دو اتومبیل قفل بوده است. (الف) با استفاده از مسافتهایی که اتومبیلها پس از برخورد پیموده‌اند، سرعت آنها را درست پس از برخورد تعیین کنید. (ب) با استفاده از پایستگی تکانه، سرعت اولیهٔ اتومبیل B را در لحظهٔ برخورد با اتومبیل A به‌دست بیاورید. بر چه اساسی می‌توان به کاربرد پایستگی تکانه در این مورد ایراد گرفت؟



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. یک وزنهٔ ۲٫۹ تنی از ارتفاع ۶٫۵ فوت سقوط می‌کند و یک ستون

۵۰٫۰ تنی را به اندازهٔ ۱٫۵ اینچ در زمین فرو می‌برد. فرض کنید برخورد وزنه‌ـستون کاملاً ناکشسان است، و میانگین نیروی مقاومت زمین را تعیین کنید.

۳۵. یک واگن‌باری ۳۵٫۰ تنی با یک واگن خدماتی ساکن برخورد می‌کند و به آن "وصل" می‌شود. در این برخورد ۲۷٫۰٪ از انرژی جنبشی اولیه به‌صورت گرما، صوت، ارتعاش و مانند آن هدر می‌رود. وزن واگن خدماتی را پیدا کنید.

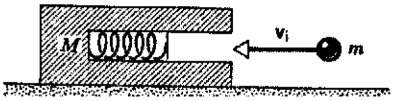
۳۶. سپر یک اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی چنان طراحی شده است که بتواند تمام انرژی را وقتی اتومبیل با سرعت ۵٫۲۰km/h با یک دیوار سنگی برخورد می‌کند، جذب کند. این اتومبیل هنگامی که با سرعت ۷۵٫۵km/h در حرکت است با اتومبیل جلویی به جرم ۹۳۴ کیلوگرم که با سرعت ۶۲٫۰km/h در همان جهت در حرکت است تصادف می‌کند. در نتیجه این برخورد سرعت اتومبیل ۹۳۴ کیلوگرمی تا ۷۱٫۳km/h افزایش می‌یابد. (الف) سرعت اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی بلافاصله پس از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جذب شده در برخورد بر آنچه سپر اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی می‌تواند جذب کند چقدر است؟

۳۷. یک واگن باری ۳۱٫۸ تنی که با سرعت ۵٫۲۰ft/s در حرکت است با یک واگن باری ۲۴٫۲ تنی که با سرعت ۲٫۹۰ft/s در همان جهت در حرکت است برخورد می‌کند. (الف) اگر واگنها پس از برخورد به همدیگر ملحق شوند، سرعت مجموعه پس از برخورد چقدر است و چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد به هدر می‌رود؟ (ب) اگر برخورد واگنها کشسان می‌بود (گرچه بسیار نامحتمل است)، سرعت هر واگن پس از برخورد چقدر می‌شد؟

۳۸. یک ترازوی کفه‌ای چنان مدرج شده است که جرم اجسامی را که روی کفه‌اش قرار می‌گیرند برحسب کیلوگرم نشان بدهد. ذراتی از ارتفاع ۳٫۵۳متری پایین می‌افتند و با کفهٔ ترازو برخورد می‌کنند. برخوردها کشسان‌اند و ذرات با همان سرعتی که به کفه می‌خورند از آن باز می‌جهند. جرم هر ذره ۱۱۰ گرم و آهنگ برخوردها ۴۲s^{-1} است. این ترازو در حین ریزش ذرات چه جرمی را نشان می‌دهد.

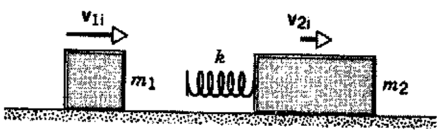
۳۹. جعبه‌ای روی ترازویی قرار دارد، و ترازو چنان تنظیم شده است که وقتی جعبه خالی است رقم صفر را نشان می‌دهد. جریانی از تیله‌ها از ارتفاع h نسبت به ته جعبه، با آهنگ R (تیله در ثانیه) به داخل آن می‌ریزد. جرم هرتیله m است. برخورد میان تیله‌ها و جعبه کاملاً ناکشسان است. ترازو t ثانیه پس از شروع ریزش تیله‌ها چه رقمی را نشان می‌دهد؟ برای وقتی که $R =$ ۱۱۵s^{-1}، $h =$ ۹٫۶۲m، $m =$ ۴٫۶۰g و $t =$ ۶٫۵۰s است جواب عددی پیدا کنید.

۴۰. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_i به داخل لولهٔ یک تفنگ فنری به جرم M که در آغاز روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است شلیک می‌شود (شکل ۳۴). گلوله در نقطهٔ حداکثر فشردگی فنر به داخل لوله گیر می‌کند. هیچ انرژی‌ای صرفِ مقابله با اصطکاک نمی‌شود. (الف) سرعت تفنگ فنری، پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شد، چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره شده است؟



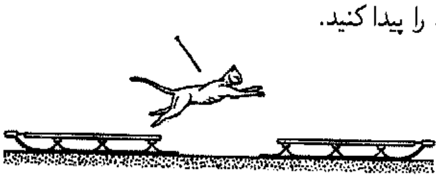
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. قالبی به جرم $m_1 =$ ۱٫۸۸kg روی میز بدون اصطکاکی با سرعت ۱۰٫۳m/s حرکت می‌کند. دقیقاً در جلو این قالب، قالب دیگری به جرم $m_2 =$ ۴٫۹۲kg در همان جهت با سرعت ۳٫۲۷m/s در حرکت است. فنر بدون جرمی با ثابت نیروی $k =$ ۱۱٫۲N/cm به قسمت عقب قالب m_2 وصل شده است (شکل ۳۵). وقتی دو قالب با هم برخورد می‌کنند، حداکثر فشردگی فنر چقدر است؟ (راهنمایی: در لحظهٔ حداکثر فشردگی فنر دو قالب به صورت جسم واحدی حرکت می‌کنند؛ با توجه به اینکه در این نقطه برخورد کاملاً ناکشسان است، سرعت را محاسبه کنید.)



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۱

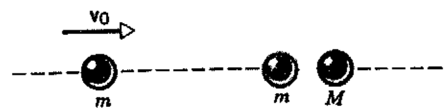
۴۲. دو سورتمه، که جرم هرکدام ۲۲٫۷ کیلوگرم است، در فاصلهٔ کمی پشت سرهم روی سطح یخزدهٔ بدون اصطکاکی قرار دارند (شکل ۳۶). گربه‌ای به جرم ۳٫۶۳ کیلوگرم که روی یکی از دو سورتمه ایستاده است روی سورتمهٔ دیگر می‌پرد و بلافاصله با پرش دیگری به سورتمهٔ اول بازمی‌گردد. هر دو پرش با سرعت ۳٫۰۵m/s نسبت به سورتمه‌ای که پرش از آن صورت می‌گیرد انجام می‌شود. سرعت نهایی هر یک از دو سورتمه را پیدا کنید.


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. الکترونی به جرم m، رودررو، با اتم ساکنی به جرم M برخورد می‌کند. در نتیجهٔ این برخورد مقدار معینی انرژی، E، به‌صورت انرژی داخلی در اتم ذخیره می‌شود. حداقل سرعت اولیه‌ای که الکترون باید داشته باشد، v_0، چقدر است؟ (راهنمایی: اصول پایستگی منجر به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای سرعت نهایی الکترون و یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای سرعت نهایی اتم می‌شود. حداقل مقدار v_0 از این شرط حاصل می‌شود که رادیکال موجود در جوابهای v و V حقیقی باشد.)

۴۴. دو کرهٔ سمت راستِ شکل ۳۷ کمی با هم فاصله دارند و در ابتدا

هر دو ساکن‌اند؛ کرهٔ سمت چپ با سرعت v_0 به طرف آنها در حرکت است. فرض کنید برخوردها رودررو و کشسان باشند. (الف) نشان بدهید که اگر $M \leq m$ باشد دو برخورد روی می‌دهد و سرعتهای نهایی را معین کنید. (ب) نشان بدهید که اگر $M > m$ باشد سه برخورد انجام می‌شود و سرعتهای نهایی سه کره را معین کنید.



شکل ۳۷. مسئله‌های ۴۴ و ۴۵

۴۵. وضعیتی مانند مسئلهٔ قبل را در نظر بگیرید (شکل ۳۷) ولی فرض کنید که در این مورد برخوردها ممکن است همگی کشسان، همگی غیرکشسان، یا بعضی کشسان و بعضی ناکشسان باشند؛ به‌علاوه در این مسئله جرمها را m، m' و M انتخاب می‌کنیم. نشان بدهید برای اینکه بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود باید جرم جسم واسط برابر با $m' = \sqrt{mM}$ ـ یعنی میانگین هندسی دو جرم مجاور ـ باشد. (در آکوستیک هم همین رابطه بین جرمهای لایه‌های متوالی هوا در "شیپور نمایی" برقرار است.)[1]

بخش ۱۰ـ۵ برخورد در دو بعد

۴۶. دو خودرو A به وزن ۲۷۲۰ پوند و B به وزن ۳۶۴۰ پوند که به ترتیب به سمت غرب و جنوب در حرکت‌اند در یک تقاطع با هم تصادف می‌کنند و در هم قفل می‌شوند. قبل از برخورد، سرعت خودرو A ۳۸٫۵mi/h و سرعت خودرو B ۵۸٫۰mi/h است. بلافاصله پس از برخورد، خودروهای درهم قفل شده با چه سرعتی و در کدام جهت حرکت می‌کنند؟

۴۷. اجسام A و B با هم برخورد می‌کنند. جرم جسم A برابر با ۲٫۰kg و جرم جسم B برابر با ۳٫۰ کیلوگرم است. سرعتهای این اجسام قبل از برخورد عبارت است از $\mathbf{v}_{iA} = 15\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ و $\mathbf{v}_{iB} = -10\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}$. بعد از برخورد سرعت جسم A به صورت $\mathbf{v}_{fA} = -6.0\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ است. تمام سرعتها برحسب متر بر ثانیه بیان شده‌اند. (الف) سرعت نهایی جسم B را پیدا کنید. (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی به سیستم افزوده یا از سیستم کاسته می‌شود؟

۴۸. ذرهٔ آلفایی با یک هستهٔ اکسیژن که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. ذرهٔ آلفا تحت زاویهٔ ۶۴٫۰° بالاتر از راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود و هستهٔ اکسیژن تحت زاویهٔ ۵۱٫۰° پایین‌تر از همان راستا پس می‌زند. سرعت نهایی هسته برابر با $1.2 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$ است. سرعت نهایی ذرهٔ آلفا چقدر است؟ (جرم ذرهٔ آلفا ۴٫۰۰u و جرم هستهٔ اکسیژن ۱۶٫۰u است.)

۴۹. یک نوترون کند (که نوترون گرمایی هم نامیده می‌شود) در برخورد کشسان با یک دوترون ساکن تحت زاویهٔ ۹۰° پراکنده می‌شود. نشان بدهید که این نوترون دو سوم انرژی جنبشی اولیه‌اش را به دوترون می‌دهد. (جرم نوترون ۱٫۰۱u و جرم دوترون ۲٫۰۱u است.)

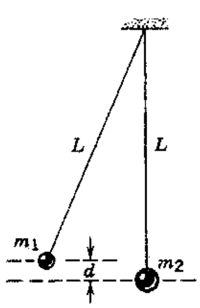
۵۰. دو جسم با جرمهای یکسان که سرعتهای اولیه‌شان هم یکی است در یک برخورد کاملاً ناکشسان به هم می‌چسبند و با سرعت مشترکی که برابر با نصف سرعت اولیهٔ هر یک از آنهاست حرکت می‌کنند. زاویهٔ‌میان سرعتهای اولیه دو جسم چقدر بوده است؟

۵۱. پروتونی (با جرم اتمی ۱٫۰۱u) با سرعت ۵۱۸m/s با پروتون ساکنی برخورد کشسان انجام می‌دهد. پروتون متحرک با زاویهٔ ۶۴٫۰° نسبت به راستای اولیهٔ حرکتش پراکنده می‌شود. (الف) جهت حرکت پروتونِ هدف پس از برخورد کدام است؟ (ب) سرعت هر یک از پروتونها پس از برخورد چقدر است؟

۵۲. دو گوی A و B با جرمهای متفاوت و مجهول با هم برخورد می‌کنند. گوی A در آغاز ساکن است و گوی B با سرعت v حرکت می‌کند. پس از برخورد، گوی B دارای سرعت $v/2$ است و در راستای عمود بر سرعت اولیه‌اش حرکت می‌کند. (الف) تعیین کنید که گوی A پس از برخورد در چه جهتی حرکت می‌کند. (ب) آیا می‌توانید سرعت گوی A را از اطلاعات داده شده در این مسئله تعیین کنید؟ دربارهٔ پاسخ خودتان توضیح‌بدهید.

۵۳. در یک بازی بیلیارد، به توپ "چوبخور" سرعت اولیهٔ V داده می‌شود و این توپ با مجموعهٔ ۱۵ توپ که مماس به یکدیگر در وسط میز قرار دارند برخورد می‌کند. همهٔ ۱۶ توپ (یکسان) در برخوردهای متعدد توپ به توپ و توپ به دیوارهٔ میز درگیر می‌شوند. برحسب تصادف، پس از اندک زمانی معلوم می‌شود که همهٔ توپها دارای سرعت یکسان vاند. فرض کنید همهٔ برخوردها کشسان باشند و از جنبهٔ چرخشی حرکت توپها هم چشمپوشی کنید. سرعت v را برحسب V به‌دست بیاورید.

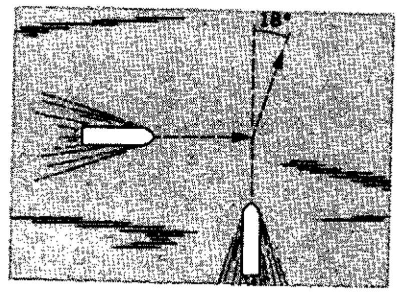
۵۴. دو آونگ هر یک به طول L در آغاز مطابق شکل ۳۸ قرارگرفته‌اند. آونگ اول از ارتفاع d رها می‌شود و با آونگ دوم برخورد می‌کند. فرض کنید برخورد کاملاً ناکشسان است و از جرم ریسمانها و هر نوع آثار اصطکاکی چشمپوشی کنید. مرکز جرم این مجموعه پس از برخورد تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



شکل ۳۸. مسئلهٔ ۵۴

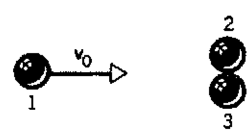
۱. نگاه کنید به
"Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects," John B Hart and Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, Jonuary 1968, p. 46.

۵۵. یدک‌کشی به جرم $۱٫۵۰ \times ۱۰^{۵}\mathrm{kg}$ با سرعت $۶٫۲۰\,\mathrm{m/s}$ در مه غلیظی به طرف پایین رودخانه‌ای در حرکت است که از پهلو با یدک‌کش دیگری که مستقیماً عرض رودخانه را می‌پیماید برخورد می‌کند (شکل ۳۹). جرم یدک‌کش دوم $۲٫۷۸ \times ۱۰^{۵}\mathrm{kg}$ و سرعت آن $۴٫۳۰\,\mathrm{m/s}$ است. بلافاصله پس از برخورد، ناخدای یدک‌کش دوم در می‌یابد که مسیرش به اندازهٔ ۱۸° از جهت جریان رودخانه انحراف دارد و سرعتش هم به $۵٫۱۰\,\mathrm{m/s}$ افزایش یافته است. سرعت جریان آب در زمان وقوع این حادثه عملاً صفر است. (الف) سرعت و راستای حرکت یدک‌کش اول بلافاصله پس از برخورد چقدر و کدام است؟ (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی "تلف" می‌شود؟



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۵۵

۵۶. توپی که با سرعت اولیهٔ $۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ در حرکت است با دو توپ مشابه مماس به یکدیگر که خط واصل مراکز آنها عمود بر سرعت اولیهٔ خودش است برخورد کشسان می‌کند (شکل ۴۰). توپ اول مستقیماً به طرف نقطهٔ تماس دو توپ دیگر نشانه‌روی شده است. همهٔ توپها بدون اصطکاک‌اند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد معین کنید. (راهنمایی: در صورت نبود اصطکاک، هر ضربه در امتداد خط واصل مراکز توپها و عمود بر سطوح تماس است.)



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۶

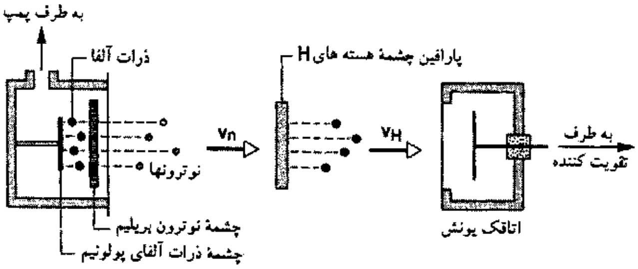
۵۷. در یک بازی بیلیارد، گوی "چوبخور" به گوی دیگری که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. پس از برخورد، گوی چوبخور با سرعت $۳٫۵۰\,\mathrm{m/s}$ در امتداد خطی که با راستای سرعت اولیه‌اش زاویهٔ $۶۵٫۰^\circ$ می‌سازد حرکت می‌کند. گوی دوم سرعتی معادل با $۶٫۷۵\,\mathrm{m/s}$ کسب می‌کند. با استفاده از پایستگی تکانه (الف) زاویهٔ راستای حرکت گوی دوم را با امتداد سرعت اولیهٔ گوی چوبخور، و (ب) سرعت اولیهٔ گوی چوبخور را، پیدا کنید.

۵۸. در سال ۱۹۳۲ جیمز چادویک، فیزیکدان انگلیسی، وجود و خواص نوترون (یکی از ذرات اساسی در ساختار اتم) را به‌وسیلهٔ دستگاهی که طرح آن در شکل ۴۱ آمده است، نشان داد. در یک اتاقک تخلیه، نمونه‌ای از پلونیم پرتوزا وامی‌پاشد و ذرات آلفا (هسته‌های هلیم) تولید می‌شوند. این ذرات به قالبی از بریلیم برخورد می‌کنند و فرایندی صورت می‌گیرد که حاصل آن گسیل نوترون است. (آنچه از واکنش He و Be به‌دست می‌آید کربن پایدار + نوترون است) از برخورد این نوترونها به لایه‌ای از پارافین (CH_2)، به آزاد شدن هسته‌های هیدروژن می‌انجامد، که در اتاقک یونش آشکارسازی می‌شوند. به عبارت دیگر، برخورد کشسانی صورت می‌گیرد که در آن بخشی از تکانهٔ نوترون به هستهٔ هیدروژن منتقل می‌شود. (الف) عبارتی برای بیشترین سرعتی که هستهٔ هیدروژن (با جرم m_H) می‌تواند کسب کند، v_H، به دست بیاورید. فرض کنید که نوترون فرودی دارای جرم m_n و سرعت v_n باشد. (راهنمایی: فکر کنید که آیا در برخورد رودررو انرژی بیشتری منتقل می‌شود یا در برخورد سایشی؟) (ب) یکی از هدفهای چادویک پیدا کردن جرم این ذرهٔ جدیدی بود که خودش کشف کرده بود. بررسی عبارت به‌دست آمده در قسمت (الف)، که شامل این پارامتر است، نشان می‌دهد که در آن دو مجهول وجود دارد، m_n و v_n (v_H معلوم است؛ آن را می‌شود در اتاقک یونش اندازه‌گیری کرد). برای حذف پارامتر مجهول v_n، چادویک به‌جای لایهٔ پارافین از پاراسیانوژن (CN) استفاده کرد. در این صورت، نوترونها به جای هستهٔ هیدروژن با هستهٔ نیتروژن برخوردهای کشسان انجام می‌دهند. البته، عبارت به‌دست آمده در قسمت (الف) باز هم معتبر است، کافی است به جای v_H و m_H به ترتیب v_N و m_N بگذاریم. بنابراین اگر v_H و v_N در آزمایشهای جداگانه‌ای اندازه‌گیری شوند، می‌توانیم v_n را بین دو رابطهٔ مربوط به هیدروژن و نیتروژن حذف کنیم تا مقداری برای m_n حاصل شود. مقادیری که چادویک به‌دست آورد اینها بود:

$$v_H = ۳٫۳ \times ۱۰^{۹}\mathrm{cm/s}$$

$$v_N = ۰٫۴۷ \times ۱۰^{۹}\mathrm{cm/s}$$

مقدار m_n (که چادویک محاسبه کرد) چقدر است؟ این مقدار را با مقدار تثبیت شده $m_n = ۱٫۰۰۸۶۷\mathrm{u}$ مقایسه کنید. (در این مسئله فرض کنید $m_H = ۱٫۰\,\mathrm{u}$ و $m_N = ۱۴\,\mathrm{u}$ است.)



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. در برخورد کشسان بین ذرهٔ m_1 و ذرهٔ m_2 که در ابتدا ساکن است، نشان بدهید که: (الف) زاویه‌ای که تحت آن ذرهٔ m_1

ممکن است بر اثر برخورد بیشترین انحراف را پیدا کند، θ_m، با رابطهٔ $\cos^2\theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$ بیان می‌شود، به‌طوری که اگر $m_1 > m_2$ باشد، $0 \leqq \theta_m \leqq \pi/2$ است؛ (ب) اگر $m_1 = m_2$ باشد، $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ است؛ (ج) اگر $m_1 < m_2$ باشد، θ_1 می‌تواند تمام مقادیر بین ۰ و π را اختیار کند.

بخش ۱۰ـ۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

۶۰. (الف) نشان بدهید که، در برخورد کشسان یک‌بعدی بین دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 که به‌ترتیب با سرعتهای اولیهٔ v_{1i} و v_{2i} در حرکت‌اند، سرعت حرکت مرکز جرم برابر است با

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

(ب) با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶ نشان بدهید که v_{cm} بعد از برخورد هم همان است که قبل از برخورد بود.

۶۱. در چارچوب آزمایشگاه، جسمی به جرم ۳٫۱۶ کیلوگرم با سرعت ۱۵٫۶m/s به سمت چپ در حرکت است که با جسمی به جرم ۲٫۸۴ کیلوگرم که با سرعت ۱۲٫۲m/s به سمت راست در حرکت است رودررو برخورد می‌کند. مرکز جرم این سیستم دو جسمی بعد از برخورد با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶۲. ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_{1i} در حرکت است با ذرهٔ دیگری به جرم m_2 که ساکن است، برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهد. (الف) انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد چقدر است؟ (ج) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه هدررفته است؟ (د) فرض کنید $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت حرکت مرکز جرم این سیستم باشد. برخورد را از چارچوب مرجعی که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند (چارچوب پریم‌دار) نظاره کنید، که درآن $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$ و $v'_{2i} = -v_{cm}$ است. محاسبات قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را از دید ناظر این چارچوب تکرار کنید. آیا انرژی جنبشی هدر رفته در هر دو مورد یکسان است؟ در این باره توضیح بدهید.

بخش ۱۰ـ۷ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی

۶۳. ذره‌ای که Σ^- (سیگمای منفی) نامیده می‌شود و در چارچوب مرجع معینی در حال سکون است، به‌طور خودبه‌خودی به‌صورت زیر به دو ذرهٔ دیگر وامی‌پاشد

$$\Sigma^- \to \pi^- + n$$

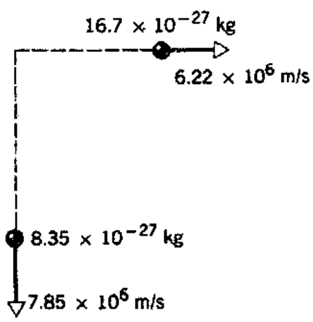
جرم این ذره‌ها عبارت است از

$$m_\Sigma = 2340.5\, m_e$$
$$m_\pi = 273.2\, m_e$$
$$m_n = 1838.65\, m_e$$

که در آنها m_e جرم الکترون است. (الف) انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی را به‌دست بیاورید. (ب) هر یک از محصولات واپاشی چقدر انرژی جنبشی کسب می‌کنند؟

۶۴. ذرهٔ ساکنی به جرم m خودبه‌خود، به دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 وامی‌پاشد که سرعتهای آنها به ترتیب v_1 و v_2 است. نشان بدهید که $m > m_1 + m_2$ است.

۶۵. هستهٔ ساکنی خودبه‌خود به سه ذره وامی‌پاشد. دو ذره از این سه ذره آشکارسازی می‌شوند؛ جرمها و سرعتهای آنها در شکل ۴۲ مشخص شده است. (الف) تکانهٔ ذرهٔ سوم که می‌دانیم جرمی برابر با 11.7×10^{-27}kg دارد چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی (برحسب MeV) در این فرایند واپاشی ظاهر می‌شود؟



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۶۵

۶۶. یک پیون ساکن به‌صورت زیر وامی‌پاشد

$$\pi \to \mu + \nu$$

μ نمایندهٔ میون (با انرژی سکون ۱۰۵٫۷MeV) و ν نمایندهٔ نوترینو (با انرژی سکون صفر) است. انرژی جنبشی اندازه‌گیری شده برای میون ۴٫۱۰۰MeV است. (الف) تکانهٔ نوترینو را برحسب یکای MeV/c محاسبه کنید. (ب) انرژی سکون پیون را محاسبه کنید.

پروژهٔ کامپیوتری

۶۷. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید که برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 و سرعتهای اولیهٔ v_{1i} و v_{2i} را توصیف کند. این برنامه باید مقادیر عددی این چهارکمیت را به عنوان داده‌های ورودی بگیرد و مقادیر عددی سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} و همچنین سرعت مرکز جرم، v_{cm}، را به عنوان خروجی به‌دست بدهد. از برنامه‌ای که می‌نویسید برای بررسی هر تعداد از حالتهای خاصی که به فکرتان می‌رسد ــ مثلاً $m_1 = m_2$، $m_1 \gg m_2$، $m_1 \ll m_2$، $v_{1i} \gg v_{2i}$، $v_{1i} = v_{2i}$، و $v_{1i} = -v_{2i}$ ــ استفاده کنید.

۱۳

تکانهٔ زاویه‌ای

در فصل ۱۲ دینامیک حرکت دورانی جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت را بررسی کردیم. دیدیم که رابطهٔ اسکالر $\sum \tau = I\alpha$ برای حل مسائل دوران حول محور ثابت کافی است.

در این فصل، بررسی‌مان را به وضعیتهایی که در آنها ممکن است محور دوران در یک چارچوب مرجع لخت ثابت نباشد تعمیم می‌دهیم. برای حل این نوع مسائل دینامیکی، یک رابطهٔ برداری برای حرکت دورانی پیدا می‌کنیم که مشابه با شکل برداری قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$، برای حرکت ذره است. **تکانهٔ زاویه‌ای** را هم معرفی می‌کنیم و اهمیت آن‌را، به عنوان یک خاصیت دینامیکی دوران، نشان می‌دهیم.

سرانجام نشان می‌دهیم که، در سیستمهایی که هیچ گشتاور خارجی خالصی به آنها وارد نمی‌شود، قانون مهم **پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای** برقرار است.

۱ـ۱۳ تکانهٔ زاویه‌ای ذره

دیدیم که تکانهٔ خطی برای مطالعهٔ حرکت انتقالی تک‌ذره‌ها یا سیستمهایی از ذره‌ها، منجمله اجسام صلب، کمیت مفیدی است. مثلاً در برخوردها تکانهٔ خطی پایسته‌است. تکانهٔ خطی یک تک‌ذره عبارت است از $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (معادلهٔ ۱۹، فصل ۹)، و تکانهٔ خطی سیستمی از ذره‌ها برابر است با $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\rm cm}$ (معادلهٔ ۲۵، فصل ۹) که در آن M جرم کل سیستم و $\mathbf{v}_{\rm cm}$ سرعت مرکز جرم آن است. مشابه تکانهٔ خطی درحرکت دورانی را تکانهٔ زاویه‌ای می‌نامند، که آن‌را برای مورد خاص یک تک‌ذره در زیر تعریف می‌کنیم. بعداً، این تعریف را گسترش می‌دهیم تا شامل مجموعه‌های ذرات شود و نشان می‌دهیم که تکانهٔ زاویه‌ای در مطالعهٔ حرکت دورانی همان‌قدر مفهوم مفیدی است که تکانهٔ خطی در حرکت انتقالی.

ذره‌ای به جرم m و تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ را در مکان $\mathbf{r}$ نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت در نظر بگیرید؛ برای سادگی، دستگاه مختصات را در شکل ۱ چنان اختیارکرده‌ایم که صفحهٔ متشکل از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ همان صفحهٔ xy باشد. تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ ذره نسبت به مبدأ O را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (۱)$$

توجه کنید که برای تعریف تکانهٔ زاویه‌ای باید مبدأ O مشخص باشد تا بتوانیم بردار مکان $\mathbf{r}$ را تعریف کنیم.

تکانهٔ زاویه‌ای بردار است. اندازهٔ این بردار برابر است با

$$l = rp\ \sin\ \theta \qquad (۲)$$

که θ زاویهٔ کوچکتر بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ است؛ راستای این بردار عمود است بر صفحه‌ای که $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ تشکیل می‌دهند، و جهت آن طبق قاعدهٔ دست راست معین می‌شود: بردار $\mathbf{r}$ را، از طریق زاویهٔ کوچکتر، در جهت چهار انگشت خمیدهٔ دست راست به طرف $\mathbf{p}$ بچرخانید؛ حالا شست کشیدهٔ دست راست شما در جهت $\mathbf{l}$ است (موازی با محور z در شکل ۱).

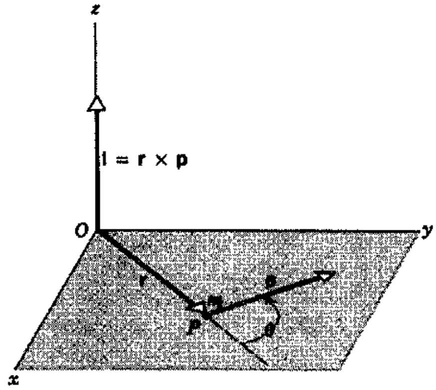
اندازهٔ بردار $\mathbf{l}$ را می‌توانیم به‌صورت

$$l = (r\ \sin\ \theta)p = pr_{\perp} \qquad (۳الف)$$

یا به‌صورت

$$l = r(p\ \sin\ \theta) = rp_{\perp} \qquad (۳ب)$$

بنویسیم، که $r_{\perp} = r\ \sin\ \theta$ مؤلفهٔ بردار $\mathbf{r}$ در راستای عمود بر خط اثر $\mathbf{p}$ است و $p_{\perp} = p\ \sin\ \theta$ مؤلفهٔ $\mathbf{p}$ در راستای عمود بر $\mathbf{r}$ است. معادلهٔ ۳ب نشان می‌دهد که فقط مؤلفهٔ عمود بر $\mathbf{r}$ بردار $\mathbf{p}$ در تکانهٔ زاویه‌ای سهیم است. وقتی زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ برابر °۰ یا °۱۸۰ باشد، مؤلفه عمودی وجود ندارد ($p_{\perp} = p\ \sin\ \theta = ۰$)؛ در این‌صورت خط اثر $\mathbf{p}$ از مبدأ می‌گذرد و $r_{\perp}$ نیز برابر صفر است. در این مورد هر



شکل۱. ذره‌ای به جرم m، در نقطهٔ P قرار دارد که با بردار مکان $\mathbf{r}$ مشخص شده است. تکانهٔ خطی این ذره $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است. (برای سادگی، هم $\mathbf{r}$ و هم $\mathbf{p}$ را در صفحهٔ xy گرفته‌ایم.) نسبت به مبدأ O، تکانهٔ زاویه‌ای ذره $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ است که در این مورد با محور z موازی است.

یک از معادلات ۳الف و ۳ب نشان می‌دهند که تکانهٔ زاویه‌ای l برابر با صفر است.

حالا برای یک ذره رابطهٔ مهمی بین گشتاور نیرو و تکانهٔ زاویه‌ای به‌دست می‌آوریم. ابتدا از معادلهٔ ۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \qquad (۴)$$

مشتق‌گیری از یک حاصل‌ضرب برداری به همان صورتی انجام می‌شود که مشتق‌گیری از یک حاصل‌ضرب معمولی، جز آنکه در این مورد مجاز به عوض کردن ترتیب جمله‌ها نیستیم. پس از انجام مشتق‌گیری داریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$d\mathbf{r}/dt$ همان سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ ذره است و $\mathbf{p}$ هم برابر با $m\mathbf{v}$ است. با نشاندن این مقادیر در جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۵)$$

ولی $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = ۰$، چون حاصل‌ضرب برداری دو بردار موازی صفر است. حالا اگر به جای $d\mathbf{p}/dt$ در جملهٔ دوم، نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر ذره را قرار بدهیم داریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$$

طرف راست معادلهٔ بالا همان گشتاور خالص وارد بر ذره است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \qquad (۶)$$

این رابطه می‌گوید که گشتاور خالص وارد بر یک ذره برابر با آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای آن با زمان است. گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ و تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ باید نسبت به مبدأ مشترکی تعریف شده باشند. معادلهٔ ۶ مشابه دورانی $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادلهٔ ۲۰ فصل ۹) است، که بنابه این معادله، نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ خطی آن ذره.

معادلهٔ ۶ مانند هر معادلهٔ برداری دیگر، هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر است که عبارت‌اند از

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt} \qquad (۷)$$

به‌این ترتیب، مؤلفهٔ x گشتاور خارجی برایند برابر است با آهنگ زمانی تغییر در مؤلفهٔ x تکانهٔ زاویه‌ای. در راستاهای y و z هم روابط مشابهی برقرار است.

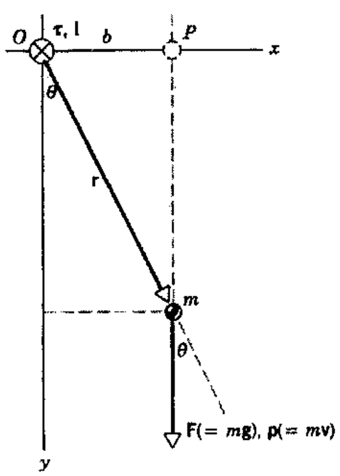
مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از حالت سکون از نقطهٔ P در شکل ۲ رها شده است، این ذره موازی محور y (در امتداد قائم) سقوط می‌کند. (الف) گشتاور نیروی وارد بر ذرهٔ m نسبت به مبدأ O را در هر زمان t به‌دست بیاورید. (ب) تکانهٔ زاویه‌ای m را نسبت به همان مبدأ در زمان t پیدا کنید. (ج) نشان بدهید که جوابهای شما در معادلهٔ ۶، $\sum \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، صدق می‌کنند.

حل: (الف) گشتاور نیرو عبارت است از $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ و اندازهٔ آن برابر است با

$$\tau = rF \sin\ \theta$$

در این مثال، داریم $r \sin\ \theta = b$ و $F = mg$، بنابراین

$$\tau = mgb = \text{مقدار ثابت}$$



شکل۲. مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از نقطهٔ P سقوط می‌کند. گشتاور نیروی $\boldsymbol{\tau}$ و تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ نسبت به مبدأ O هر دو عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل‌اند؛ نشانهٔ $\otimes$ در نقطهٔ O به همین معنی بکار رفته است.

توجه کنید که گشتاور نیرو حاصل‌ضرب نیروی mg در بازوی گشتاور b است. قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که $\boldsymbol{\tau}$ عمود بر صفحهٔ شکل و به‌طرف داخل است.

(ب) تکانهٔ زاویه‌ای از معادلهٔ ۱، $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$، به‌دست می‌آید و اندازهٔ آن (از معادلهٔ ۲) برابر است با

$$l = rp \sin \theta$$

در این مثال، $r \sin \theta = b$ و $p = mv = m(gt)$ است، بنابراین داریم

$$l = mgbt$$

قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که بردار $\mathbf{l}$ عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل صفحه است، یعنی در واقع $\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\tau}$ با هم موازی‌اند. بردار $\mathbf{l}$ برحسب زمان فقط از لحاظ اندازه تغییر می‌کند و جهت آن در این مورد همواره ثابت می‌ماند.

(ج) اگر معادلهٔ ۶ را برحسب اندازهٔ بردارها بنویسیم، داریم

$$\tau = \frac{dl}{dt}$$

با قراردادن عبارتهای مربوط به τ و l از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb$$

که حاصل این عمل یک اتحاد است. به این‌ترتیب رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ در این مورد ساده نتیجهٔ صحیح را به‌دست می‌دهد. در واقع، اگر ثابت b را از طرفین دو جملهٔ اول در رابطهٔ بالا حذف کنیم و اگر به‌جای gt کمیت هم‌ارز آن یعنی v را قرار بدهیم، داریم

$$mg = \frac{d}{dt}(mv)$$

از آنجا که $F = mg$ و $p = mv$ است، رابطهٔ بالا همان رابطهٔ آشنای $F = dp/dt$ است. به‌این ترتیب، همان‌طور که قبلاً گفته‌ایم، روابطی مانند $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، که خیلی هم مفیدند، روابط اساساً جدیدی در مکانیک کلاسیک نیستند، بلکه فرمولبندی مناسبی از همان قوانین نیوتون برای حرکت دورانی‌اند.

توجه داشته باشید که مقادیر τ و l بستگی به مبدأ مختصاتی دارند که انتخاب می‌کنیم یعنی به b وابسته است. درحالت خاص، اگر $b = 0$ باشد، $\tau = 0$ و در نتیجه $l = 0$ است.

۱۳ـ۲ سیستمهای ذرات

تا اینجا فقط تک‌ذره‌ها را بررسی کرده‌ایم. برای اینکه تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ یک سیستم از ذرات را حول یک نقطهٔ معلوم محاسبه کنیم باید تکانهٔ زاویه‌ای تک‌تک‌ذره‌ها حول این نقطه را به‌صورت برداری با هم جمع کنیم. برای یک سیستم N ذره‌ای داریم

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \cdots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{l}_n$$

که در آن جمع (برداری) روی همهٔ ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم انجام می‌شود.

ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ یک سیستم حول یک نقطهٔ مرجع ثابت (که بنابر تعریف $\mathbf{l}$ در معادلهٔ ۱، آن‌را مبدأ یک چارچوب مرجع لخت در نظر می‌گیریم) برحسب زمان تغییر کند. یعنی

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}$$

می‌دانیم که برای هر ذره $d\mathbf{l}_n/dt = \boldsymbol{\tau}_n$ است، و با قراردادن در معادلهٔ بالا، داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$$

یعنی، آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات برابر است با برایند گشتاورهای وارد بر آن سیستم.

گشتاورهای وارد بر یک سیستم را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: (۱) گشتاورهای ناشی از نیروهای داخلی بین ذرات و (۲) گشتاورهای مربوط به نیروهای خارجی. اگرقانون سوم نیوتون به‌صورت (به‌اصطلاح) قوی آن برقرار باشد، یعنی، اگر نیروهای بین هر دو ذره نه تنها برابر و در خلاف جهت همدیگر باشند بلکه در امتداد خط واصل بین دو ذره نیز عمل کنند، گشتاور داخلی کل صفر است زیرا گشتاور حاصل از هر زوج نیروی عمل‌ـعکس‌العمل صفر است.

به‌این‌ترتیب چشمهٔ اول، یعنی گشتاور حاصل از نیروهای داخلی، هیچ سهمی در تغییر $\mathbf{L}$ ندارد. تنها چشمهٔ دوم (گشتاور نیروی حاصل از نیروهای خارجی) باقی می‌ماند، و می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{۸}$$

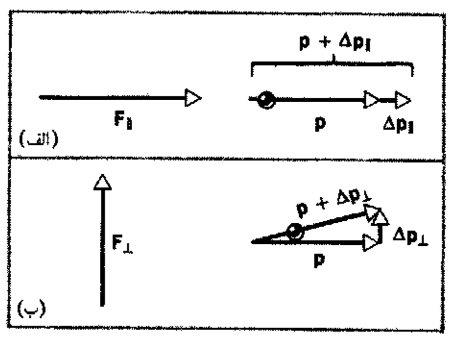
که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ عبارت از برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم است. معادلهٔ ۸ را می‌توان چنین بیان کرد: گشتاور خارجی خالص وارد بر یک سیستم از ذرات برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل آن سیستم است. گشتاور و تکانهٔ زاویه‌ای، هر دو باید نسبت به مبدأ مشترکی در یک چارچوب مرجع لخت محاسبه شوند. در مواردی که امکان بروز هیچ ابهامی در کار نباشد، شاخص پایین τ_{ext} را حذف می‌کنیم.

معادلهٔ ۸ تعمیم معادلهٔ ۶ به مجموعه‌ای از ذرات است. این معادله، چه ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم نسبت به هم در حرکت باشند و چه نسبت به هم وضعیت ثابتی در فضا داشته باشند (مانند جسم صلب) برقرار است.

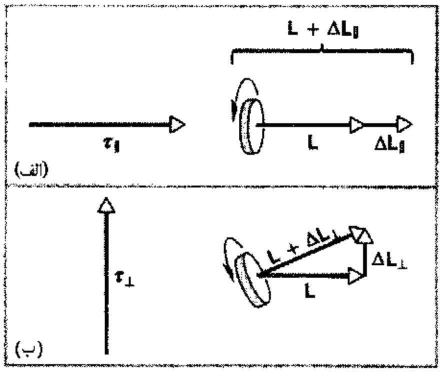
معادلهٔ ۸ مشابه دورانی معادلهٔ ۲۷ فصل ۹ ($\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$) است، و می‌گوید که برای یک سیستم از ذرات (اعم از اینکه صلب باشد یا نباشد) نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم برابر است با آهنگ زمانی تغییر در تکانهٔ خطی کل آن سیستم.

می‌خواهیم ببینیم که بین تغییر تکانهٔ خطی در اثر نیرو و تغییر تکانهٔ زاویه‌ای در اثر گشتاور، چه شباهتی هست. فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$ به ذره‌ای با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ در حرکت است وارد شود. نیروی $\mathbf{F}$ را می‌توانیم، مانند شکل ۳، به دو مؤلفه تجزیه کنیم: یک مؤلفهٔ آن ($\mathbf{F}_\parallel$) موازی با جهت (لحظه‌ای) $\mathbf{p}$ و مؤلفهٔ دیگر ($\mathbf{F}_\perp$) عمود بر $\mathbf{p}$. در بازهٔ زمانی کوتاه Δt، نیروی $\mathbf{F}$ سبب تغییر تکانه‌ای برابر با $\Delta\mathbf{p}$ می‌شود، که مطابق با رابطهٔ $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$ است. پس $\Delta\mathbf{p}$ موازی با $\mathbf{F}$ است. مؤلفه $\mathbf{F}_\parallel$ موجب تغییر تکانهٔ $\Delta\mathbf{p}_\parallel$ موازی با $\mathbf{p}$ می‌شود، که این مؤلفه به $\mathbf{p}$ افزوده می‌شود و اندازهٔ آن‌را تغییر می‌دهد ولی جهت آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳الف). از طرف دیگر، مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{F}_\perp$ موجب تغییر تکانهٔ $\Delta\mathbf{p}_\perp$ می‌شود که جهت $\mathbf{p}$ را تغییر می‌دهد، ولی تا وقتی که $\Delta\mathbf{p}_\perp$ در مقایسه با $\mathbf{p}$ کوچک باشد مقدار آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳ب). نمونه‌ای از این حرکت، حرکت ذره‌ای است که با سرعتی به اندازهٔ ثابت روی یک دایره می‌گردد. این حرکت فقط تحت تأثیر نیروی مرکزگرایی که همواره عمود بر سرعت مماسی است انجام می‌شود.

همین تحلیل در مورد اثر گشتاور هم صادق است (شکل ۴). در این مورد $\boldsymbol{\tau} = \Delta\mathbf{L}/\Delta t$ است و $\Delta\mathbf{L}$ باید موازی با $\boldsymbol{\tau}$ باشد. $\boldsymbol{\tau}$ را هم به‌دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم؛ $\boldsymbol{\tau}_\parallel$ موازی با $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}_\perp$ عمود بر $\mathbf{L}$. مؤلفهٔ موازی با $\mathbf{L}$ فقط اندازهٔ تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و نه جهت آن‌را (شکل ۴الف). مؤلفهٔ عمود بر $\mathbf{L}$ سبب تغییر $\Delta\mathbf{L}_\perp$ عمود بر بردار $\mathbf{L}$ می‌شود، که جهت $\mathbf{L}$ را تغییر می‌دهد ولی مقدار آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۴ب). این وضعیت اخیر همان است که در حرکت فرفره و ژیروسکوپ بروز می‌کند (اینها را در بخش ۱۳ـ۵ بررسی خواهیم کرد). از مقایسهٔ شکلهای ۳ و ۴ می‌توانید شباهتهای میان دینامیک انتقالی و دینامیک دورانی را مشاهده کنید.



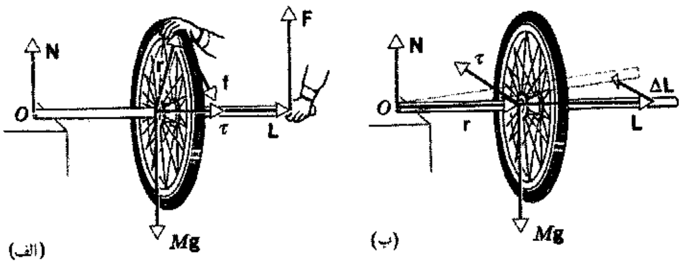
شکل۳. (الف) وقتی نیرو یک مؤلفهٔ موازی $\mathbf{F}_\parallel$ با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ ذره داشته باشد، تکانهٔ خطی ذره به اندازهٔ $\Delta\mathbf{p}_\parallel$ تغییر می‌کند که موازی با $\mathbf{p}$ است. (ب) وقتی نیرو یک مؤلفهٔ عمود $\mathbf{F}_\perp$ بر تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ ذره داشته باشد، تکانهٔ خطی ذره به اندازهٔ $\Delta\mathbf{p}_\perp$ تغییر می‌دهد که عمود بر $\mathbf{p}$ است. در این‌صورت ذره در راستای بردار $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}_\perp$ حرکت می‌کند.



شکل۴. (الف) مؤلفهٔ $\boldsymbol{\tau}_\parallel$ (موازی با تکانهٔ زاویه‌ای) گشتاور نیرو، تکانهٔ زاویه‌ای را به‌اندازهٔ $\Delta\mathbf{L}_\parallel$ تغییر می‌دهد که با $\mathbf{L}$ موازی است. (ب) مؤلفهٔ $\boldsymbol{\tau}_\perp$ گشتاور نیرو (عمود بر تکانهٔ زاویه‌ای)، تکانهٔ زاویه‌ای را به‌اندازهٔ $\Delta\mathbf{L}_\perp$ تغییر می‌دهد که بر $\mathbf{L}$ عمود است. در این‌صورت محور دوران در راستای برایند برداری $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}_\perp$ قرار می‌گیرد.

یک شباهت دیگر میان پدیده‌های خطی و دورانی این است که اگر (الف) نیرو عمود بر تکانهٔ خطی اثر کند (شکل ۳ب) یا (ب) اگر گشتاور نیرو عمود بر تکانهٔ زاویه‌ای اثر کند (شکل ۴ب)، کاری انجام نمی‌شود. در هیچ‌یک از این دو مورد، عامل خارجی موجب تغییر انرژی جنبشی نمی‌شود، و حرکت با همان سرعت خطی یا دورانی ادامه می‌یابد.

نمونه‌ای از کاربرد معادلهٔ ۸ برای دینامیک دورانی در شکل ۵ نشان داده شده است. در شکل ۵الف یک سر محور یک چرخ چرخان روی ستونی قرار گرفته است و سر دیگر محور را دانشجویی در دست دارد. دانشجو برای اینکه چرخ تندتر بچرخد نیرویی مماس بر لبهٔ چرخ به آن وارد می‌کند. گشتاوری که این نیرو ایجاد می‌کند موازی با تکانهٔ زاویه‌ای چرخ است، و هر دو بردار $\boldsymbol{\tau}$ و $\mathbf{L}$ به‌طرف دانشجو هستند. این گشتاور، موجب افزایش تکانهٔ زاویه‌ای چرخ می‌شود. در شکل ۵ب، دانشجو یک سر محور را رها کرده است. حالا گشتاورها را حول تنها تکیه‌گاه دیگر بررسی می‌کنیم. دو نیرو به سیستم اثر می‌کند؛ یکی نیروی



شکل۵. (الف) نیروی مماسی $\mathbf{f}$ وارد بر طوق چرخ سبب ایجاد گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ (حول مرکز چرخ) در امتداد محور دوران می‌شود، و مقدار سرعت زاویه‌ای چرخ را افزایش می‌دهد ولی جهت آن‌را عوض نمی‌کند. (ب) اگر انتهای محور را رها کنیم، گشتاور نیروی گرانشی حول نقطهٔ O به‌طرف داخل صفحهٔ کتاب، یعنی عمود بر محور دوران است (شکل ۴ب). این گشتاور جهت محور دوران را تغییر می‌دهد و محور چرخ در صفحهٔ افقی به‌طرف وضعیتی که با خط‌چین نشان داده شده است حرکت می‌کند.

عمود بر سطح در نقطهٔ تکیه‌گاه، که حول این نقطه گشتاوری ندارد و دیگری نیروی وزن چرخ که به طرف پایین در مرکز جرم وارد می‌شود. گشتاور ناشی از وزن چرخ حول O بر بردار $\mathbf{L}$ عمود است و اثر آن تغییر جهت $\mathbf{L}$ است (شکل ۴ب). ولی، چون جهت $\mathbf{L}$ همان جهت محور چرخ است.[1] اثر نیروی (رو به پایین) گرانی آن است که محور را به‌طور جانبی بچرخاند. محور چرخ (در صفحهٔ افقی) حول نقطهٔ تکیه‌گاه می‌چرخد. خودتان امتحان کنید! (اگر چرخ در اختیار ندارید، می‌توانید از یک ژیروسکوپ بازیچه‌ای استفاده کنید.)

معادلهٔ ۸ در صورتی درست است که τ و $\mathbf{L}$ نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری شوند. ممکن است این سؤال پیش بیاید که اگر این دو بردار را نسبت به یک نقطهٔ اختیاری (مثلاً، یک ذرهٔ مشخص) از سیستم متحرک اندازه‌گیری کنیم، آیا باز هم این معادله برقرار هست یا نه. در حالت کلی، چنین نقطه‌ای وقتی جسم یا سیستم ذرات حرکت انتقالی انجام می‌دهد، پایین و بالا می‌شود، و وضعیت نسبی ذراتش تغییر می‌کند حرکت بسیار پیچیده‌ای دارد و معادلهٔ ۸ در مورد چنین نقطهٔ مرجعی قابل استفاده نیست. ولی اگر نقطهٔ مرجع را مرکز جرم سیستم اختیار کنیم، با آنکه ممکن است این نقطه در چارچوب مرجع لخت مورد نظر ما شتاب داشته باشد، باز هم معادلهٔ ۸ برقرار است. (نگاه کنید به مسئلهٔ ۸) این خاصیت قابل توجه دیگری از مرکز جرم است. به‌این ترتیب می‌توانیم حرکت کلی سیستمی از ذرات را به‌حرکت انتقالی مرکز جرم (معادلهٔ ۲۷ فصل ۹) و حرکت دورانی حول مرکز جرم (معادلهٔ ۸) تجزیه کنیم.

۱۳ـ۳ تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

برای معرفی وضعیتهایی که در آنها توجه به ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و تکانهٔ زاویه‌ای کاملاً ضروری است، ابتدا مثال ساده‌ای از حرکت دورانی یک ذره را در نظر می‌گیریم، که نمونه‌ای از مواردی است که در آنها سرعت زاویه‌ای و تکانهٔ زاویه‌ای با هم موازی نیستند.

شکل ۶الف ذره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که توسط یک بازوی صلب بی‌جرم به طول r'، به محور صلب بی‌جرمی متصل شده است. بازو بر محور عمود است. ذره در دایره‌ای به شعاع r' با سرعتی به مقدار ثابت v حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم آزمایش در ناحیه‌ای انجام می‌شود که در آن گرانش ناچیز است، یعنی منظور کردن نیروی گرانی وارد بر ذره ضروری نیست. تنها نیرویی که به این ذره وارد می‌شود یک نیروی مرکزگراست. این نیرو توسط بازویی که ذره به محور متصل می‌کند اعمال می‌شود.

محور دوران توسط دو یاتاقان ایده‌آل (بدون اصطکاک) مقید به محور z است. یاتاقان پایینی را مبدأ دستگاه مختصات می‌گیریم. خواهیم دید که یاتاقان بالایی برای جلوگیری از لنگی محور دوران حول محور z ضروری است. لنگش در صورتی اتفاق می‌افتد که سرعت زاویه‌ای موازی با تکانهٔ زاویه‌ای نباشد.

سرعت زاویه‌ای ω جسم به طرف بالا در امتداد (یا به‌طور معادل، موازی با) محور z است (شکل ۶ب). این جهت با رابطهٔ برداری $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (معادلهٔ ۱۶ فصل ۱۱) سازگار است. بردار سرعت زاویه‌ای موازی با محور z است، و فرقی نمی‌کند که مبدأ را در کجای این محور گرفته باشیم. همچنین مقدار این بردار هم بستگی به جای مبدأ ندارد، چون این مقدار (از تعریف حاصل‌ضرب خارجی) با رابطهٔ $v/(r\sin\theta) = v/r'$ بیان می‌شود.

تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ ذره نسبت به مبدأ O چارچوب مرجع از رابطهٔ ۱ به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ (یعنی $m\mathbf{v}$) را در شکل ۶ب نشان داده‌ایم. بردار $\mathbf{l}$ بر صفحهٔ متشکل از بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ عمود است و به‌همین دلیل $\mathbf{l}$ موازی با ω نیست. توجه کنید (شکل ۶ج) که $\mathbf{l}$ دارای یک مؤلفهٔ (برداری)، $\mathbf{l}_z$، موازی با ω دارد، ولی مؤلفهٔ (برداری) دیگری هم دارد، $\mathbf{l}_\perp$، که عمودند بر ω است. این حرکت یکی از مواردی است که در آن شباهت میان حرکت خطی و دایره‌ای برقرار نیست: $\mathbf{p}$ همواره موازی با $\mathbf{v}$ است، ولی $\mathbf{l}$ همیشه‌موازی با ω نیست. اگر مبدأ مختصات را چنان اختیار کنیم که در صفحهٔ ذرهٔ چرخنده واقع شود، در آن‌صورت $\mathbf{l}$ موازی با ω هست؛ در غیر این‌صورت دو بردار موازی نیستند.[1]

حالا می‌خواهیم رابطهٔ‌میان l_z و ωی ذرهٔ چرخان را بررسی کنیم. از شکل ۶ج، که در آن بردار $\mathbf{l}$ را به مرکز دایره منتقل کرده‌ایم، داریم

$$l_z = l\sin\theta = r(mv)\sin\theta = r(mr'\omega)\sin\theta$$

که در آن از رابطهٔ $v = r'\omega$ استفاده کرده‌ایم. در رابطهٔ بالا به‌جای $r\sin\theta$ کمیت r' (شعاع دایره‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند) را می‌نشانیم و نتیجه می‌گیریم

$$l_z = mr'^2\omega \qquad (۹)$$

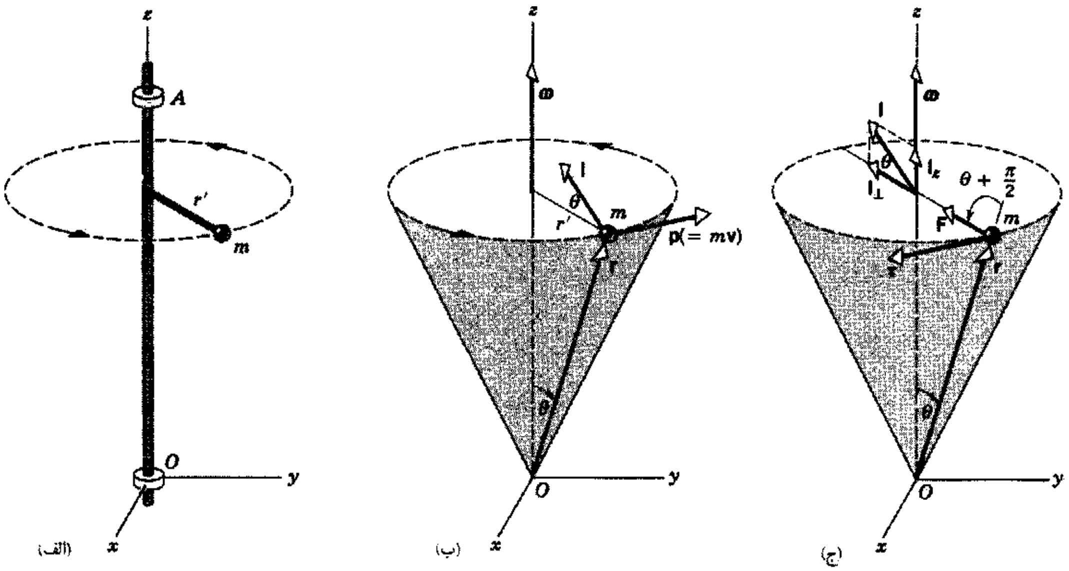
که mr'^2 لختی دورانی ذره، I، نسبت به محور z است. بنابراین

$$l_z = I\omega \qquad (۱۰)$$

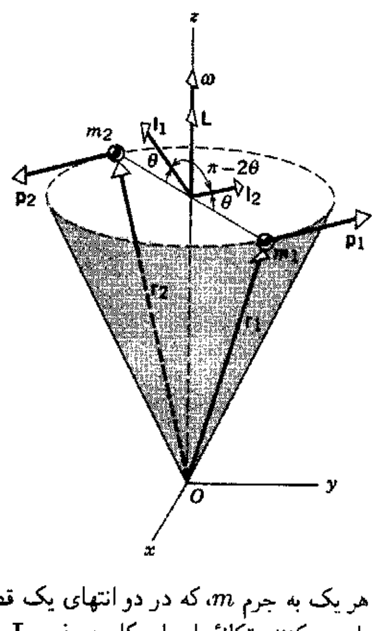
توجه داشته باشید که رابطهٔ برداری $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ (که مشابه رابطهٔ خطی $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است) در این مورد صحیح نیست، چون $\mathbf{l}$ و ω هم‌جهت نیستند.

در چه شرایطی تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در یک جهت قرار می‌گیرند؟ برای نشان دادن مطلب، فرض کنید ذرهٔ دیگری با همان جرم به این سیستم اضافه کنیم. این کار را، آن‌طورکه در شکل ۷ نشان داده شده است، با اتصال یک بازوی دیگر به محور مرکزی شکل ۶الف در همان موقعیت بازوی اول ولی در جهت مخالف انجام می‌دهیم. مؤلفهٔ $\mathbf{l}_\perp$ ناشی از این ذرهٔ دوم مساوی و از نظر جهت مخالف مؤلفهٔ

۱. این فقط در صورتی درست است که محور دوران یک محور تقارن جسم باشد.



شکل۶. (الف) ذره‌ای به جرم m توسط بازویی به طول r' به محوری که توسط دو یاتاقان (در نقاط O و A) نگه داشته شده متصل است و می‌تواند حول محور z دوران کند (ب) ذره با سرعت مماسی v در دایره‌ای به شعاع r' حول محور z می‌چرخد (به منظور ساده کردن شکل میله‌ها و یاتاقانها را حذف کرده‌ایم). تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ را حول مبدأ O نشان داده‌ایم. (ج) برای اینکه ذره در یک دایره حرکت کند، باید نیروی مرکزگرای $\mathbf{F}$ به جسم وارد شود. این نیرو در شکل نشان داده شده است. این نیروگشتاوری نیروی τ حول O ایجاد می‌کند. برای روشن شدن وضعیت حرکت، بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ و مؤلفه‌های موازی با و عمود بر محور z آن‌را در مرکز دایره نشان داده‌ایم.



شکل۷. دو ذره، هر یک به جرم m، که در دو انتهای یک قطر واقع شده‌اند حول محور z دوران می‌کنند. تکانهٔ زاویه‌ای کل دو ذره، $\mathbf{L}$، در این مورد با سرعت زاویه‌ای ω موازی است.

$\mathbf{l}_\perp$ مربوط به ذرهٔ اول است، و جمع دو بردار $\mathbf{l}_\perp$ برابر با صفر می‌شود. ولی، دو بردار $\mathbf{l}_z$ همسو هستند و با هم جمع می‌شوند. پس برای این سیستم دو ذره‌ای، تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ موازی با ω است.

حالا می‌توانیم سیستم دو ذره‌ای را به یک جسم صلب، که از تعداد بی‌شماری ذره تشکیل شده است، تعمیم بدهیم. اگر جسم حول محور دوران متقارن باشد، یعنی به‌ازای هر ذره‌ای از جسم، یک ذره با همان جرم کاملاً در نقطهٔ مقابل ذرهٔ اول و درهمان فاصله از محور دوران قرار داشته باشد، در آن‌صورت جسم را می‌توان مانند مجموعه‌ای از زوج ذره‌هایی که بررسی کردیم، در نظر گرفت. دو بردار $\mathbf{L}$ و ω چون برای همهٔ چنین زوجهایی موازی هستند، در واقع برای تمام اجسام صلبی که چنین تقارنی داشته باشند نیز موازی‌اند. این نوع تقارن را تقارن محوری می‌گویند.

برای چنین اجسام صلب متقارنی $\mathbf{L}$ و ω موازی‌اند و می‌توانیم رابطهٔ برداری زیر را بنویسیم

$$\mathbf{L} = I\omega \qquad (۱۱)$$

ولی، فراموش نکنید که اگر $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای کل باشد، معادلهٔ ۱۱ فقط در مورد اجسامی صادق است که نسبت به محور دوران متقارن باشند. اگر $\mathbf{L}$ نشاندهندهٔ مؤلفهٔ بردار تکانهٔ زاویه‌ای حول محور دوران باشد (یعنی $\mathbf{L}_z$)، در آن‌صورت معادلهٔ ۱۱ در مورد هر جسم صلبی، اعم از متقارن یا نامتقارن، که حول محور ثابتی دوران می‌کند صادق است.

در مورد اجسام متقارن (مانند سیستم دوذره‌ای شکل ۷) می‌توان یاتاقان بالایی شکل ۶الف را حذف کرد، و محور دوران همچنان

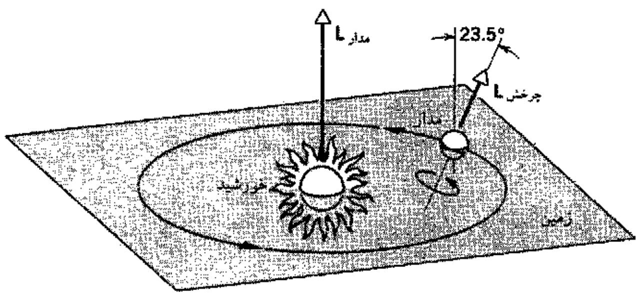
موازی محور z خواهد ماند. برای تحقیق این موضوع، توجه کنید که چرخاندن یک جسم متقارن مانند یک فرفرهٔ کوچک یا یک چرخ سنباده حول محوری که بین شست و انگشت نشان یک دست نگه داشته شده، چقدر آسان است. هر بی‌تقارنی کوچکی در جسم، وجود یاتاقان دوم را برای حفظ محور دوران در یک راستای ثابت الزامی می‌کند؛ چنان‌که در پایان این بخش خواهیم دید، این یاتاقان باید گشتاوری به محور، که همراه با دورانِ جسم می‌لنگد، وارد کند. این لنگ‌زدن برای اجسامی که با سرعتهای زیاد دوران می‌کنند (مانند چرخانهٔ بینِ توربینها) مسئله‌ای کاملاً جدی است. این چرخانه‌ها، با آنکه کاملاً متقارن طراحی می‌شوند، ممکن است به خاطر خطاهای کوچکی که، مثلاً، در نصب پره‌ها پیش می‌آید، اندکی نامتقارن از کار در بیاید. این چرخانه‌ها را می‌شود با افزودن یا حذف قطعات فلزی در مکانهای مناسب مجدداً متقارن کرد. برای این کار چرخ را در دستگاه مخصوصی می‌چرخانند؛ این دستگاه مقدار لنگی را اندازه می‌گیرد، تصحیح‌های لازم را محاسبه می‌کند و نتایج را نشان می‌دهد. در مورد چرخ اتومبیل هم با استفاده از همین نوع دستگاهها، وزنه‌های سربی در مکانهای مناسب روی لبهٔ رینگ لاستیک نصب می‌شود تا لنگی در سرعتهای زیاد را کاهش بدهد. در "بالانس کردن" چرخ اتومبیل، "مکانیک" در واقع سعی می‌کند بردارهای تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای چرخ را با هم موازی کند، تا از کرنش بلبرینگ‌های چرخ کاسته شود.

مثال ۲. کدام‌یک از کمیتهای زیر بزرگتر است: تکانهٔ زاویه‌ای زمین در اثر چرخش زمین حول محور خودش یا تکانهٔ زاویه‌ای زمین که از حرکت زمین به دور خورشید ناشی می‌شود؟

حل: برای مورد اول، زمین را به‌صورت کرهٔ یکنواختی در نظر می‌گیریم ($I = \frac{۲}{۵}MR_{\rm E}^۲$). سرعت زاویه‌ای این حرکت برابر است با $\omega = ۲\pi/T$، که T دورهٔ تناوب دوران است ($۲۴{\rm h} = ۸٫۶۴ \times ۱۰^۴{\rm s}$). به این‌ترتیب تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی برابر است با

$$\begin{aligned}L_{\text{چرخش}} &= I\omega = \frac{۲}{۵}MR_{\rm E}^۲\frac{۲\pi}{T}\\ &= \frac{۲}{۵}(۵٫۹۸\times ۱۰^{۲۴}{\rm kg})(۶٫۳۷\times ۱۰^۶{\rm m})^۲\frac{۲\pi}{۸٫۶۴\times ۱۰^۴{\rm s}}\\ &= ۷٫۰۵ \times ۱۰^{۳۳}{\rm kg\cdot m^۲/s}\end{aligned}$$

برای اینکه تکانهٔ زاویه‌ای مداری را محاسبه کنیم، لازم است لختی دورانی زمین را حول محوری که از خورشید می‌گذرد بدانیم. به این منظور می‌توانیم زمین را به‌صورت "ذره"‌ای با تکانهٔ زاویه‌ای $L = R_{\text{مدار}}p$ در نظر بگیریم، که $R_{\text{مدار}}$ شعاع مدار و p تکانهٔ خطی زمین است. اینجا هم سرعت زاویه‌ای از $\omega = ۲\pi/T$ به‌دست می‌آید، ولی در این مورد T دورهٔ تناوب مداری است ($۱{\rm y} = ۳٫۱۶ \times ۱۰^۷{\rm s}$) پس



شکل۸. مثال ۲. زمین روی مداری (که دایره فرض می‌شود) به دور خورشید، و همچنین حول محور خودش دوران می‌کند. دو بردار تکانهٔ زاویه‌ای با هم موازی نیستند، زیرا محور چرخش زمین یک زاویه‌ای، برابر با $۲۳٫۵^\circ$، با خط قائم بر صفحهٔ مدار زمین می‌سازد. طول بردارها در مقیاس مشترکی رسم نشده است؛ $L_{\text{مدار}}$ باید با ضریبی در حدود ۴×۱۰^۶ از $L_{\text{چرخش}}$ بزرگتر باشد.

تکانهٔ زاویه‌ای مداری برابر است با

$$\begin{aligned}L_{\text{مدار}} &= R_{\text{مدار}}p = R_{\text{مدار}}Mv = R_{\text{مدار}}M(\omega R_{\text{مدار}}) = MR_{\text{مدار}}^۲\frac{۲\pi}{T}\\ &= (۵٫۹۸\times ۱۰^{۲۴}{\rm kg})(۱٫۵۰\times ۱۰^{۱۱}{\rm m})^۲\frac{۲\pi}{۳٫۱۶\times ۱۰^۷{\rm s}}\\ &= ۲٫۶۷ \times ۱۰^{۴۰}{\rm kg\cdot m^۲/s}\end{aligned}$$

می‌بینیم که تکانهٔ زاویه‌ای مداری بسیار بیشتر از تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی است.

بردار تکانهٔ زاویه‌ای مداری عمود است بر صفحهٔ مدار زمین (شکل ۸)، در حالی‌که بردار تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی با خط قائم بر صفحهٔ مدار زاویهٔ $۲۳٫۵^\circ$ می‌سازد. اگر از حرکت تقدیمی خیلی کندی که محور زمین دارد چشم بپوشیم، در طی حرکت مداری زمین هر دو بردار هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت می‌مانند.

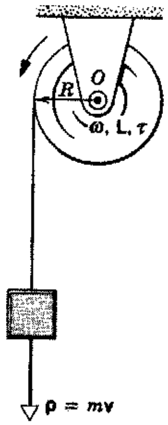
مثال ۳. با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ ۸ ($\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$) شتاب قالب در حال سقوط درمثال ۵ فصل ۱۲ را پیدا کنید.

حل: سیستم شکل ۹، متشکل از یک قرص به جرم M و یک قالب به جرم m، تحت تأثیر نیروی پایین‌سویِ گرانشی وارد بر جرمها و نیروی بالاسویی است که از یاتاقانهای محور قرص به سیستم وارد می‌شود. مرکز قرص را به‌عنوان مبدأ اختیار می‌کنیم. (کشش نخ یک نیروی داخلی است و از خارج روی سیستم قرص + قالب اثر نمی‌کند.) تنها نیروی mg از میان نیروهای خارجی گشتاوری حول مبدأ به سیستم وارد می‌کند، که مقدار آن برابر است با $(mg)R$.

تکانهٔ زاویه‌ای سیستم حول نقطهٔ O در هر لحظه برابر است با

$$L = I\omega + (mv)R$$

در این رابطه $I\omega$ تکانهٔ زاویه‌ای قرص (متقارن) است و $(mv)R$ تکانهٔ زاویه‌ای (یعنی تکانهٔ خطی × بازوی گشتاور) قالب افتان حول مبدأ.



شکل۹. مثال ۳. بردارهای سرعت زاویه‌ای، تکانهٔ زاویه‌ای و گشتاور برایند همگی به‌سوی خارجِ صفحهٔ شکل‌اند؛ این جهت با نشانه ⊙ در نقطهٔ O مشخص شده است.

این دو جزء $\mathbf{L}$ هر دو در یک جهت عمود بر صفحهٔ شکل ۹ و به طرف خارج واقع می‌شوند.

حالا رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ را (در شکل اسکالرش) به‌کار می‌گیریم

$$(mg)R = \frac{d}{dt}(I\omega + mvR)$$
$$= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$= I\alpha + mRa$$

و چون $a = \alpha R$ و $I = \frac{۱}{۲}MR^۲$ است، این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$mgR = \left(\frac{۱}{۲}MR^۲\right)(a/R) + mRa$$

یا

$$a = \frac{۲mg}{M + ۲m}$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵ فصل ۱۲ هم به‌دست آمد.

گشتاور وارد بر ذره‌ای که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند (اختیاری)

نتیجهٔ شاید غیرمنتظره‌ای که در مورد حرکت سادهٔ شکل ۶ به‌دست آمد، یعنی موازی نبودن $\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\omega}$ ممکن است قدری غریب بنماید، ولی این نتیجه با رابطهٔ کلی $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ برای گشتاور وارد بر یک تک‌ذره سازگار است. بردار $\mathbf{l}$ با گذشت زمان همراه با حرکت ذره تغییر می‌کند. این تغییر فقط در جهت است، نه در اندازه. وقتی ذره دوران می‌کند، هم مقدار $\mathbf{l}_z$ و هم جهت آن ثابت می‌ماند، ولی $\mathbf{l}_\perp$ تغییر جهت می‌دهد.

این تغییر در $\mathbf{l}_\perp$ باید از اعمال یک گشتاور حاصل شده باشد. منشأ این گشتاور کدام است؟

برای اینکه ذره‌ای در یک دایره حرکت کند، باید تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا باشد. مثلاً در شکل ۶ج، این نیرو توسط بازویی که ذره را به محور وصل می‌کند تأمین می‌شود. (در اینجا از سایر نیروهای خارجی، مانند گرانش، چشم پوشیده‌ایم.) تنها گشتاوری که حول O ایجاد می‌شود گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

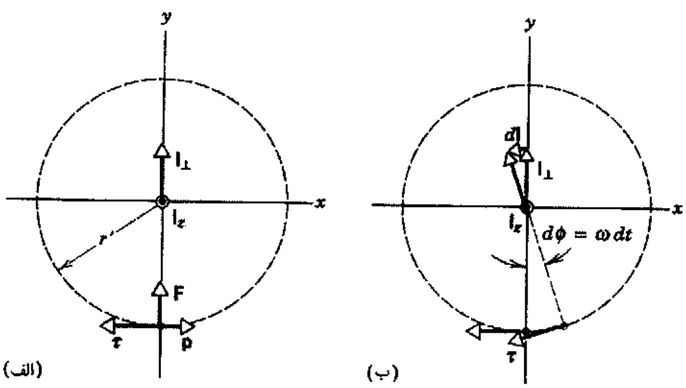
گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ مماس بر دایره (عمود بر صفحه‌ای که از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود) و در جهتی است که در شکل ۶ج مشخص شده است. صحت این مطلب را می‌توانید با استفاده از قاعده دست راست تحقیق کنید.

می‌خواهیم نشان بدهیم که این گشتاور در شکل دورانی قانون دوم نیوتون، $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، صدق می‌کند. شکل ۱۰الف نمایی دوبعدی از ذرهٔ دوران‌کننده را نشان می‌دهد؛ داریم از راستای محور z به طرف پایین به صفحهٔ xy نگاه می‌کنیم. وقتی ذره به‌اندازهٔ زاویهٔ کوچک $d\phi = \omega dt$ دوران می‌کند (شکل ۱۰ب)، بردار $\mathbf{l}_\perp$ به‌اندازهٔ بردار کوچک $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. از شکل ۱۰ب می‌توانیم ببینیم که $d\mathbf{l}$ همواره موازی با $\boldsymbol{\tau}$ است و بنابراین جهت بردارهای $d\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\tau}$ با رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ سازگار است. همچنین می‌توانیم نشان بدهیم که مقدار این بردارها هم در این رابطه صدق می‌کند. با مراجعه به شکل ۶ـج می‌بینیم که گشتاور نیرو حول O برابر است با

$$\tau = rF\,\sin\left(\frac{۱}{۲}\pi + \theta\right) = rF\,\cos\,\theta$$

در این مورد، $\mathbf{F}$ نیروی مرکزگرا و مقدار آن برابر $mv^۲/r' = m\omega^۲ r'$ است، که در آن r' شعاع مسیر دایره‌ای است $(r' = r\sin\,\theta)$. بنابراین

$$\tau = m\omega^۲ r^۲ \sin\,\theta \cos\,\theta \qquad (۱۲)$$



شکل۱۰. (الف) نمایی دوبعدی از صفحهٔ ذرهٔ در حال دوران شکل ۶. مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. (ب) به‌ازای دوران ذره به‌اندازهٔ زاویهٔ $d\phi$، مؤلفهٔ بردار $\mathbf{l}_\perp$ در صفحه به‌اندازهٔ $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. توجه کنید که $d\mathbf{l}$ موازی با $\boldsymbol{\tau}$ است.

از شکل ۱۰ب داریم $dl = l_{\perp} d\phi = l_{\perp}\omega dt$، که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp}$$

چون $l = mvr$ است، پس $l_{\perp} = mvr \ \cos\theta$ است. سرعت مماسی v عبارت است از $\omega r' = \omega r \ \sin\theta$، بنابراین داریم

$$l_{\perp} = m\omega r^{۲} \sin\ \theta \cos\ \theta$$

و

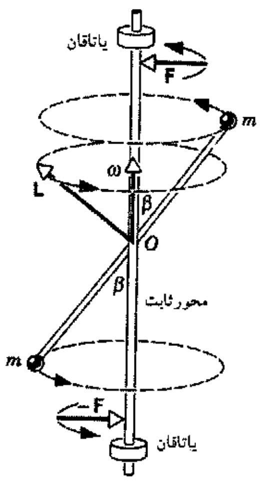
$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp} = m\omega^{۲} r^{۲} \sin\ \theta \cos\ \theta \qquad (۱۳)$$

از مقایسهٔ معادلات ۱۲ و ۱۳، همان‌طور که انتظار می‌رود، می‌بینیم که $\tau = dl/dt$ است.

اجسام متقارن در برابر اجسام نامتقارن

وضعیت دوران برای اجسام متقارن و نامتقارن چه فرقی می‌کند؟ فرض کنید میلهٔ اتصال دو ذرهٔ سیستم متقارن شکل ۷ به‌اندازهٔ دلبخواه β نسبت به محور مرکزی مایل شده باشد. شکل ۱۱ میلهٔ اتصال، محور میل‌گردان، و دو یاتاقان را (که بدون اصطکاک فرض شده‌اند) نشان می‌دهد؛ یاتاقانها میل‌گردان را در راستای محور z نگه می‌دارند. میل‌گردان با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد، بنابراین بردار $\boldsymbol{\omega}$ هم‌جهت با این محور است. تجربه نشان می‌دهد که این قبیل سیستمها "نامتوازن" یا "یکبری"‌اند و میلهٔ واسط دو ذره اگر در نقطهٔ O محکم به میل‌گردان متصل نشده باشد، تمایل دارد چنان حرکت کند که زاویهٔ β برابر ۹۰° شود، یعنی به وضعیتی برسد که در آن سیستم حول محور تقارن می‌شود.

در لحظه‌ای که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، ذرهٔ بالایی عمود بر صفحه به طرف داخل آن حرکت می‌کند و ذرهٔ پایینی عمود



شکل۱۱. یک سیستم دوذره‌ای چرخان، مشابه شکل ۷، با این تفاوت که در اینجا محور دوران با میلهٔ اتصال زاویهٔ β می‌سازد. بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ همراه با سیستم می‌چرخد، و همچنین نیروهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ــ که از یاتاقانها وارد می‌شوند نیز می‌چرخند.

بر صفحه از آن خارج می‌شود. بنابراین بردارهای تکانهٔ خطی دو ذره با هم برابر ولی در جهتهای مخالف‌اند و بردارهای مکان این ذرات نسبت به O نیز همین‌طور. بنابراین، با استفاده از قاعدهٔ دست راست در مورد $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$، درمی‌یابیم که $\mathbf{l}$ برای هر دو ذره یکسان است و مجموع $\mathbf{l}$ها، یعنی بردار تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم، $\mathbf{L}$، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عمود بر میلهٔ واصل دو ذره است و در صفحهٔ شکل قرار دارد. پس $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ در این لحظه موازی نیستند. وقتی سیستم دوران می‌کند، بردار تکانهٔ زاویه‌ای در حالی که مقدارش ثابت می‌ماند، حول محور ثابت دوران می‌چرخد.

چرخش $\mathbf{L}$ حول محور ثابت شکل ۱۱ کاملاً با رابطهٔ بنیادی $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ همخوانی دارد. گشتاور نیروی خارجی وارد بر کل سیستم ناشی از نیروهای جانبی موازنه نشده‌ای است که از یاتاقانها به میل‌گردان وارد و از آن به میلهٔ اتصال منتقل می‌شود. در لحظهٔ نشان داده شده در شکل، ذرهٔ بالا متمایل به حرکت به خارج یعنی به سمت راست است. میل‌گردان به سمت راست کشیده می‌شود و به یاتاقان بالایی فشرده می‌شود و در مقابل، یاتاقان بالایی هم نیروی $\mathbf{F}$ را به میل‌گردان وارد می‌کند. این نیرو به سمت چپ است. به همین نحو ذرهٔ پایینی متمایل به حرکت به سمت خارج، یعنی به طرف چپ است. میل‌گردان در محل یاتاقان پایینی به سمت چپ فشرده می‌شود، یاتاقان پایینی هم به میل‌گردان نیروی $-\mathbf{F}$ــ را که به سمت راست است وارد می‌کند. گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ حول نقطهٔ O که از این نیروها ناشی می‌شود عمود بر صفحهٔ شکل به طرف جلوی صفحه، یعنی در واقع عمود بر صفحهٔ متشکل از $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ است و در همان جهتی است که حرکت چرخشی $\mathbf{L}$ را توجیه می‌کند. (این قسمت را با شکل ۱۰ب، که در آن $\boldsymbol{\tau}$ موازی با $d\mathbf{l}$ ولی عمود بر $\mathbf{l}$ بود مقایسه کنید.) توجه داشته باشید که چون $\boldsymbol{\tau}$ بر $\boldsymbol{\omega}$ عمود است، کاری انجام نمی‌شود و بنابراین انرژی جنبشی سیستم چرخان تغییر نمی‌کند. اگر اصطکاک نباشد سیستم تا ابد می‌چرخد. اصطکاک در یاتاقانها سبب ایجاد گشتاوری می‌شود که در راستای میل‌گردان (موازی با $\boldsymbol{\omega}$) است؛ این گشتاور روی سیستم کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن‌را کم می‌کند.

نیروهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ــ در لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۱۱ در صفحهٔ شکل قرار دارند. وقتی که سیستم می‌چرخد، این نیروها و بنابراین گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ نیز همراه با آن‌طوری می‌چرخند که $\boldsymbol{\tau}$ همواره بر صفحهٔ متشکل از $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}$ عمود می‌ماند. نیروهای چرخندهٔ $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ــ موجب لنگی در یاتاقانهای بالایی و پایینی می‌شوند. یاتاقانها و تکیه‌گاههای آنها باید استحکام کافی داشته باشند تا بتوانند این نیروها را فراهم کنند. در اجسام چرخانِ متقارن هیچگونه لنگی یاتاقان وجود ندارد و میل‌گردان به‌طور یکنواخت و هموار می‌چرخد.

۱۳ـ۴ پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

در معادلهٔ ۸، دیدیم که آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول یک نقطهٔ ثابت در یک چارچوب مرجع لخت (یا حول مرکز جرم) برابر با گشتاور خارجی خالص وارد بر آن سیستم است،

یعنی داریم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۸)$$

اگر هیچ گشتاور خارجی بر سیستم اثر نکند، تکانهٔ زاویه‌ای سیستم نسبت به زمان تغییر نمی‌کند

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{L} = \text{const.} \qquad (۱۴)$$

معادلهٔ ۱۴ بیان ریاضی اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است.

> وقتی برایند گشتاور نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، بردار تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم ثابت می‌ماند.

این سومین قانون از قوانین مهم پایستگی است که تا به حال بررسی کرده‌ایم. پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای هم مانند پایستگی انرژی و پایستگی تکانهٔ خطی، نتیجه‌ای کلی است که برای طیف بسیار گسترده‌ای از سیستمها معتبر است. این قانون هم در حد نسبیتی صادق است و هم در حد کوانتومی، و تاکنون هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

مانند پایستگی تکانهٔ خطی در سیستمی که هیچ نیروی خارجی خالصی بر آن اثر نمی‌کند، پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای هم در مورد تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات اعمال می‌شود که بر آن هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نمی‌کند. ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای هر یک از ذرات سیستم تغییر کند (درست همان‌طور که در برخورد ممکن است تکانهٔ خطی هر یک از ذرات تغییر کند)، ولی تکانهٔ زاویه‌ای کل ثابت می‌ماند.

تکانهٔ زاویه‌ای (مانند تکانهٔ خطی) یک کمیت برداری است به‌طوری که معادلهٔ ۱۴ هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر (به‌ازای سه محور مختصات) است. بنابراین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای سه شرط بر حرکت سیستمی که در مورد آن به‌کار می‌رود، اعمال می‌کند. اگر مؤلفه‌ای از گشتاور صفر باشد مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای متناظر با آن ثابت خواهد بود؛ ممکن است مواردی پیش بیاید که در آنها فقط یکی از سه مؤلفهٔ گشتاور صفر باشد، در این‌صورت فقط یکی از مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای ثابت خواهد بود، و مؤلفه‌های دیگر به تبعیت از گشتاورهای متناظرشان تغییر می‌کنند.

برای سیستمی متشکل از یک جسم صلب که حول محوری (مثلاً، محور z) که در چارچوب مرجع لختی ثابت است دوران کند داریم

$$L_z = I\omega \qquad (۱۵)$$

که L_z مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور دوران و I لختی دورانی سیستم حول همین محور است. ممکن است لختی دورانی جسم چرخان با تغییر وضعیت اجزای آن (از I_i به I_f) تغییر کند. اگر هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نکند، L_z باید ثابت بماند؛ پس اگر I تغییر کند، برای جبران این تغییر باید سرعت زاویه‌ای (ω) جسم هم از ω_i به ω_f تغییر کند. در این‌صورت اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{const.} \qquad (۱۶)$$

معادلهٔ ۱۶ نه‌تنها در مورد دوران حول یک محور ثابت برقرار است بلکه برای دوران حول محوری که از مرکز جرم سیستم می‌گذرد نیز صدق می‌کند، به‌شرطی که سیستم طوری حرکت کند که محور همواره موازی با خودش باقی بماند (رجوع کنید به بحثی که در آغاز بخش ۱۲ـ۶ داشتیم).

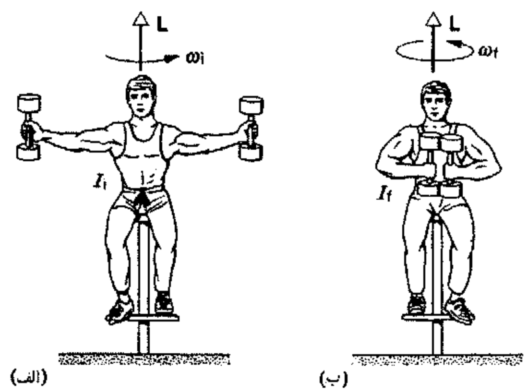
پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای اصلی است که در گسترهٔ وسیعی از فرایندهای فیزیکی، از جهان زیراتمی (بخش ۱۳ـ۶) گرفته تا حرکت اکروباتها و شیرجه‌زنها و بالرین‌ها، تا انقباض ستاره‌هایی که سوخت آنها تمام شده است، و تا چگالش کهکشانها عمل می‌کند. مثالهای زیر بعضی از این کاربردها را نشان می‌دهد.

اسکیت‌باز چرخنده

اسکیت‌باز چرخنده دستهایش را به بدنش نزدیک می‌کند تا تندتر بچرخد و آنها را باز و از بدنش دور می‌کند تا کندتر بچرخد؛ در واقع معادلهٔ ۱۶ را به‌کار می‌گیرد. کاربرد دیگری از این اصل در شکل ۱۲ نشان داده شده است. دانشجویی روی یک چارپایهٔ گردون که می‌تواند آزادانه حول یک محور قائم بچرخد نشسته است. فرض کنید دانشجو که وزنه‌هایی در دست دارد، دستهایش را به‌طرفین بازکرده است و ما او را با سرعت زاویه‌ای ω_i به چرخش درآورده‌ایم. بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ او در امتداد محور قائم در صفحهٔ شکل قرار می‌گیرد.

سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + وزنه‌ها یک سیستم منزوی است که هیچ گشتاور خارجی قائمی بر آن اثر نمی‌کند. بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای باید پایسته بماند.

وقتی دانشجو دستهایش (و وزنه‌ها) را به‌طرف داخل می‌کشد و به بدنش نزدیک می‌کند، لختی دورانی سیستم او از مقدار اولیهٔ I_i کمتر می‌شود و به مقدار کوچکتر I_f می‌رسد، چون در این وضعیت وزنه‌ها به محور دوران نزدیکترند. بنابر معادلهٔ ۱۶، سرعت زاویه‌ای دانشجو برابر با $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$ می‌شود که از سرعت زاویه‌ای اولیهٔ او بیشتر است (چون $I_f < I_i$)، یعنی او تندتر می‌چرخد، و اگر بخواهد سرعتش را کم کند کافی است که دستهایش را دوباره از بدنش دور کند.



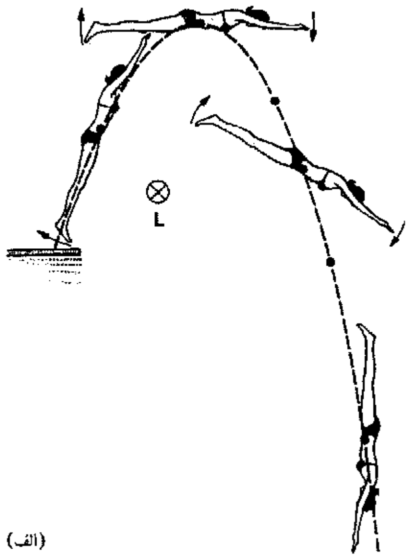
شکل۱۲. (الف) دراین وضعیت، لختی دورانی سیستم (دانشجو + وزنه‌ها) بیشتر و سرعت زاویه‌ای آن کمتر است. (ب) دانشجو وزنه‌ها را به طرف سینه می‌آورد و لختی دورانی را کمتر می‌کند و بنابراین سرعت زاویه‌ای‌اش بیشتر می‌شود. تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ برای هر دو وضعیت یکی است.

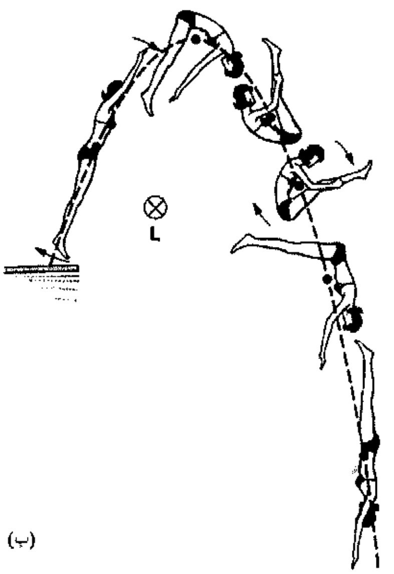
آیا انرژی جنبشی سیستم تغییر می‌کند؟ اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، کاری که انرژی جنبشی را تغییر می‌دهد از کجا تأمین می‌شود؟

شیرجه از روی تختهٔ فنری[1]

در شکل ۱۳ـالف شیرجه‌زنی را در حال شیرجه می‌بینیم. او موقع پریدن از تخته خودش را طوری به جلو هل می‌دهد که سرعت دورانی کمی کسب می‌کند. این سرعت درست به اندازه‌ای است که شیرجه‌زن در طی مسیر به‌اندازهٔ نیم‌دور بچرخد و با سر در آب فرود بیاید.

زمانی که "جسم" در هواست، هیچ گشتاور خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای را حول مرکز جرم تغییر بدهد. (تنها نیروی خارجی، گرانی، به مرکز جرم وارد می‌شود و بنابراین گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کند. از مقاومت هوا که ممکن است گشتاور مؤثری تولید کند و تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد چشم می‌پوشیم.) وقتی شیرجه‌زن خودش را جمع می‌کند و زانوهایش را در بغل می‌گیرد، لختی دورانی‌اش کم می‌شود و بنابر معادلهٔ ۱۶ سرعت زاویه‌ای‌اش باید زیاد شود. این سرعت زاویه‌ای افزایش یافته به شیرجه‌زن امکان می‌دهد که در مدتی که در هواست $1\frac{1}{2}$ دور بزند در صورتی که قبلاً فقط نیم‌دور می‌چرخید (شکل ۱۳ب). در پایان شیرجه پاها و دستها را به‌موقع به‌حالت کشیده درمی‌آورد تا سرعت زاویه‌ای‌اش کم شود و با سر به سطح آب برسد.





شکل۱۳. (الف) شیرجه‌زن طوری از تخته جدا می‌شود که تخته به او تکانهٔ زاویه‌ای L می‌دهد. او حول مرکز جرمش (که با نقطه‌ای مشخص شده است) به‌اندازهٔ نیم‌دور دوران می‌کند در حالی‌که مرکز جرمش مسیر سهمی را می‌پیماید. (ب) با بغل کردن پاهایش، لختی دورانی خود را کاهش می‌دهد و به همین علت سرعت زاویه‌ای‌اش افزایش پیدا می‌کند و به او این امکان را می‌دهد که (۱/۲)۱ دور بچرخد. نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر این شخص در (الف) و (ب) یکسان است.

چرخ چرخان دوچرخه

در شکل ۱۴الف دانشجویی را می‌بینید که روی چارپایه‌ای نشسته است، و چارپایه می‌تواند به‌راحتی حول محور قائمی دوران کند. این شخص چرخ چرخانی را در دست دارد، و وقتی چرخ را وارونه می‌کند، چارپایه به دوران در می‌آید (شکل ۱۴ب).

هیچ گشتاور قائم مؤثری به سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ وارد نمی‌شود و بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم باید ثابت بماند. درآغاز، چرخ با تکانهٔ زاویه‌ای L_i می‌چرخد، که به‌سوی بالاست و تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم است. وقتی دانشجو چرخ را وارونه می‌کند، مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای چرخ برابر $-L_i$ می‌شود، ولی مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای کل باید همان $+L_i$ باشد، یعنی ثابت بماند. در نتیجه دانشجو + چارپایه باید تکانهٔ زاویه‌ای $L' = +2L_i$ را کسب کند، تا تکانهٔ زاویه‌ای نهایی سیستم یعنی $+2L_i - L_i$ برابر تکانهٔ زاویه‌ای آغازی باشد. اگر لختی دورانی دانشجو + چارپایه برابر با I_s باشد، سرعت زاویه‌ای دانشجو + چارپایه برابر با $\omega_f = 2L_i/I_s$ است.

این مسئله را می‌توانیم به‌صورت دو سیستم مجزا هم بررسی کنیم؛ یک سیستم شامل چرخ و سیستم دیگر شامل دانشجو + چارپایه است. حالا دیگر هیچ‌یک از دو سیستم منزوی نیست: دستِ دانشجو دو سیستم را به هم مرتبط می‌کند. دانشجو وقتی می‌خواهد چرخ را وارونه کند باید گشتاوری اعمال کند تا تکانهٔ زاویه‌ای چرخ را تغییر بدهد. او برای تولید این گشتاور نیرویی به چرخ وارد می‌کند و بنابر قانون سوم نیوتون، همین نیرو را در جهت مخالف از چرخ دریافت می‌کند. این نیروی خارجی وارد بر سیستم دانشجو + چارپایه سبب می‌شود که

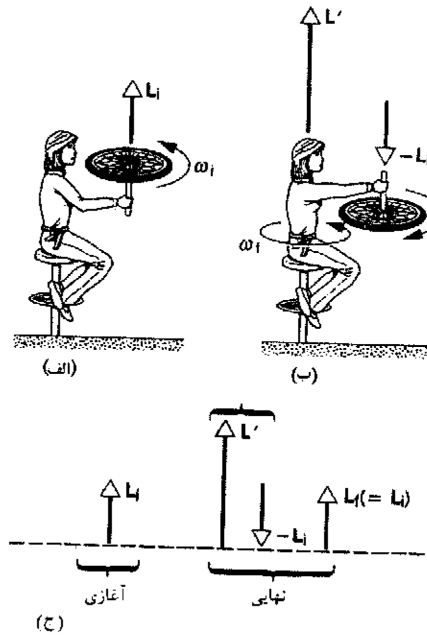
---

۱. نگاه کنید به

"The Mechanics of Swimming and Diving" R. L. Page, *The Physics Teacher*, February 1976, p. 72.

و نگاه کنید به

"The Physics of Somersaulting and Twisting," Cliff Frohlich, *Scientific American*, March 1980, p. 155.



شکل۱۴. (الف) دانشجویی چرخ چرخانی را در دست نگه داشته است. تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم برابر است با L_i. (ب) وقتی چرخ وارونه می‌شود دانشجو شروع به چرخیدن می‌کند. (ج) تکانهٔ زاویه‌ای کل باید در حالتهای آغازی و نهایی یکی باشد.

سیستم بچرخد. از این دیدگاه، دانشجو یک گشتاور خارجی به چرخ وارد می‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای آن‌را تغییر بدهد، در حالی که چرخ، یک گشتاور به دانشجو وارد می‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای او را تغییر بدهد. اگر، همان‌طور که در ابتدا گفتیم، سیستم کامل را متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ در نظر بگیریم، این گشتاور یک گشتاور داخلی است که در محاسبات ما وارد نمی‌شود. اینکه گشتاور نیرو را داخلی بگیریم یا خارجی بستگی دارد به اینکه سیستم مورد نظر را چگونه تعریف می‌کنیم.

پایداری اجسام چرخان

باز هم شکل ۳ب را در نظر بگیرید. جسمی که با تکانهٔ خطی $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ حرکت می‌کند یک پایداری سیستمی است؛ ضربهٔ منحرف‌کننده‌ای موجب تغییر تکانهٔ کوچکی به‌اندازهٔ $\Delta \mathbf{p}_\perp$ در راستای جانبی می‌شود و در نتیجه جهت حرکت به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp / p)$ تغییر می‌کند. هر چه تکانهٔ p بیشتر باشد، زاویهٔ θ کوچکتر است. بر اثر یک نیروی منحرف‌کنندهٔ معین، جسم هر چه تکانه‌اش بزرگتر باشد کمتر منحرف می‌شود.

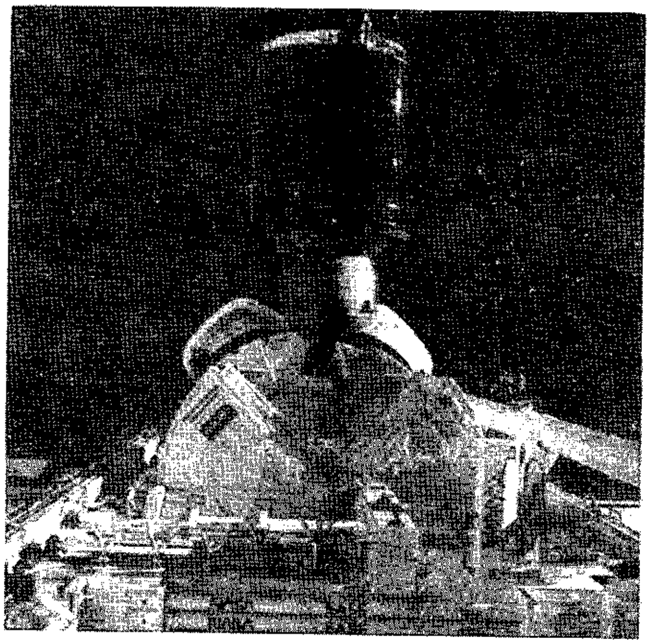
تکانهٔ زاویه‌ای هم به‌صورتی کم‌وبیش مشابه برای جسم یک پایداری سیستمی فراهم می‌آورد. هر جسم چرخان دارای تکانهٔ زاویه‌ای معین $\mathbf{L}$ است. هر گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ عمود بر $\mathbf{L}$، جهت بردار $\mathbf{L}$ را تغییر می‌دهد و سبب تغییر جهت محور دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp / L)$ می‌شود. در اینجا هم به‌ازای یک گشتاور معین، هر چه تکانهٔ زاویه‌ای L بزرگتر باشد، تغییر جهت محور دوران جسم چرخان کوچکتر خواهد بود.

وقتی به جسمی تکانهٔ زاویه‌ای معینی حول یک محور

می‌دهیم، در واقع سمتگیری آن‌را پایدار و تغییر سمتگیری را برای نیروهای خارجی دشوار می‌کنیم. در مورد این اثر مثالهای متعددی وجود دارد. اگر یک دوچرخهٔ بدون دوچرخه‌سوار راکمی هل بدهیم می‌تواند مسافتی خیلی بیشتر از آنچه انتظار داریم، سرپا، به حرکتش ادامه بدهد. در این مورد، این تکانهٔ زاویه‌ای چرخهای چرخان دوچرخه است که به آن پایداری می‌دهد. دست‌اندازها و خمهای کوچک جاده، که می‌توانند جسم غیرچرخانی را که روی مقطعی به باریکی لاستیک دوچرخه متوازن شده است به آسانی منحرف یا واژگون کنند، بر چرخ چرخان تأثیر کمتری دارند، زیرا تکانهٔ زاویه‌ای تمایل به حفظ سمتگیری‌اش دارد.[1]

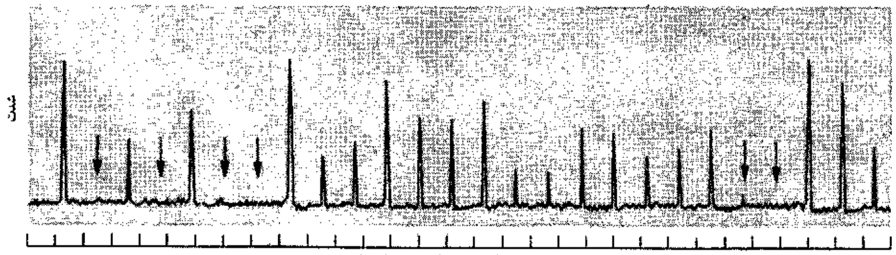
توپ راگبی (فوتبال امریکایی) با توپی به شکل بیضوی را در پاسهای بلند طوری پرتاب می‌کنند که حول محوری تقریباً موازی با سرعت انتقالی‌اش می‌چرخد. با این کار سمتگیری توپ پایدار می‌شود و توپ بی‌آنکه در هوا "معلق" بزند پیش می‌رود. به این‌ترتیب می‌شود توپ را دقیقتر پرتاب کرد و راحت‌تر هم گرفت. در این نوع پرتاب همچنین سطح مواجههٔ توپ در جهت پیشروی به حداقل می‌رسد؛ در نتیجه مقاومت هوا کم می‌شود و برد توپ افزایش پیدا می‌کند.

پایدار کردن سمتگیری ماهواره‌ها اهمیت دارد، به‌خصوص وقتی ماهواره برای رسیدن به موقعیت مداری مشخصی از پیشرانهایش استفاده می‌کند (شکل ۱۵). سمتگیری ممکن است، مثلاً، به‌علت



شکل۱۵. ماهوارهٔ مورلوس-دی، یک ماهوارهٔ مخابراتی برای مکزیک، که در ۱۷ نوامبر ۱۹۸۵ به‌مدار پرتاب شد. ماهواره برای پایداری سمتگیری در فضا حول محور مرکزی‌اش (محور قائم در عکس) به‌چرخش درآورده شد. این پایداری در طی سفر به مدار همزمان شده با زمین ضروری است.

۱. نگاه کنید به
"The Stability of the Bicycle," David E. H. Jones, *Physics Today*, April, 1970, p. 34.



شکل ۱۶. تپهای الکترومغناطیسی که در ایستگاه در زمین از یک ستارهٔ نوترونی چرخان سریع دریافت شده است. پیکانهای قائم نمایندهٔ تپهایی است که ضعیف‌تر از آن بوده‌اند که آشکارسازی شوند. فاصلهٔ تپها به‌طور شگفت‌انگیزی ثابت و برابر با ۱٫۱۸۷۹۱۱۱۶۴s است.

اصطکاک ناشی از وجود جو رقیق در ارتفاع مدار، بادهای خورشیدی (باریکه‌ای از ذرات باردار که از خورشید می‌آیند)، یا به علت برخورد با شهابسنگهای بسیار ریز، تغییر کند. به‌منظور کاهش آثار چنین برخوردهایی، ماهواره را حول محوری به چرخش در می‌آورند و به این‌ترتیب سمتگیری آن‌را پایدار می‌کنند.

ستاره‌های رمبنده

اغلب ستاره‌ها، مثل خورشید خودمان، می‌چرخند. خورشید تقریباً هر ماه یکبار به‌دور خودش می‌چرخد. (خورشید یک گوی گازی است و مانند جسم صلب دوران نمی‌کند؛ دورهٔ چرخش مناطق نزدیک به قطب آن حدوداً ۳۷ روز است، در حالی‌که استوایش هر ۲۶ روز یکبار می‌چرخد.) فشار تابشی از رمبش خورشید جلوگیری می‌کند، در واقع فشار تابشی حاصل برخوردهای ضربه‌ای تابش گسیلی با اتمهای خورشید است. وقتی که سوخت هسته‌ای خورشید تمام شود، فشار تابشی هم از بین می‌رود و خورشید شروع به رمبیدن می‌کند، و در نتیجهٔ رمبش چگالی آن افزایش می‌یابد. در یک مرحله چگالی خورشید خاموش آنقدر زیاد می‌شود که دیگر اتمها نمی‌توانند بیش از آن به هم نزدیک شوند و در نتیجه رمبش متوقف می‌شود.

ولی، در ستاره‌هایی که جرم آنها در حدود ۱٫۴ برابر جرم خورشید است، نیروی گرانشی آنقدر قوی است که اتمها نمی‌توانند از ادامهٔ رمبش جلوگیری کنند. اتمها عملاً در اثر گرانش در هم کوبیده می‌شوند، و رمبش آنقدر ادامه می‌یابد که هسته‌ها در تماس با یکدیگر قرار بگیرند. در واقع ستاره به‌صورت هستهٔ اتمی غول‌پیکری در می‌آید که به آن ستارهٔ نوترونی می‌گویند. شعاع یک ستارهٔ نوترونی به جرم ۱٫۵ برابر جرم خورشید، برابر با ۱۱ کیلومتر است.

فرض کنید ستاره‌ای که مانند خورشید هر ماه یکبار می‌چرخد رمبش خود را آغاز کند. نیروهای دخیل در رمبش نیروهای داخلی‌اند و نمی‌توانند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییربدهند. بنابراین سرعت زاویه‌ای نهایی طبق معادلهٔ ۱۶ به‌سرعت زاویه‌ای اولیه مربوط می‌شود؛ $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. اگر شعاع اولیه در حدود شعاع خورشید باشد (در حدود $7 \times 10^5 \mathrm{km}$)، خواهیم داشت

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5 \mathrm{km})^2/(11 \mathrm{km})^2 = 4 \times 10^9$$

یعنی، سرعت دورانی ستاره از یک دور در ماه به 4×10^9 دور در ماه، یا به بیش از ۱۰۰۰ دور در ثانیه می‌رسد!

ستاره‌های نوترونی از زمین قابل مشاهده‌اند، چون آنها هم (مانند خورشید) میدانهای مغناطیسی‌ای دارند که الکترونها را به‌دام می‌اندازند و الکترونها با دوران ستاره تا سرعتهای مماسی خیلی زیاد شتاب می‌گیرند. چنین الکترونهای شتاب‌یافته‌ای تابش گسیل می‌کنند، که از زمین مانند چراغ چشمک‌زن مشاهده می‌شود. به‌خاطر این تپهای تابشی تیز است که ستاره‌های نوترونی چرخان را "تپ‌اختر" می‌نامند. نمونه‌ای از نمودارهای تابش مشاهده‌شده از یک تپ‌اختر را در شکل ۱۶ آورده‌ایم.

پایستگی تکانهٔ زاویه در مورد پدیده‌های اختر فیزیکی بسیار گوناگونی به‌کار می‌رود. مثلاً دوران کهکشان ما نتیجه دوران بسیارکندترِ تودهٔ گازی است که کهکشان از آن چگالیده شده است؛ چرخش خورشید و مدار سیاره‌ها را دوران اولیهٔ ماده‌ای که منظومهٔ شمسی از آن پدید آمده، تعیین کرده است.

مثال ۴. یک فضانورد ۱۲۰ کیلوگرمی، که مشغول "راه‌پیمایی فضایی" است توسط بندی به طول ۱۸۰m که کاملاً باز شده است به فضاپیما متصل است. عملیات ناخواسته‌ای در قسمت پیشبرنده سبب می‌شود که فضانورد سرعت مماسی کوچکی برابر با ۲٫۵m/s کسب کند. برای بازگشت به فضاپیما، فضانورد با آهنگ ثابتی بند اتصال را آرام به‌طرف خودش می‌کشد. این فضانورد در فواصل زیر با چه نیرویی باید بند اتصال را بکشد؟ (الف) ۵۰ متر و (ب) ۵ متر از فضاپیما. سرعت مماسی فضانورد در این نقاط چقدر است؟

حل: هیچ گشتاور خارجی بر فضانورد وارد نمی‌شود، بنابراین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای برقرار است. یعنی، تکانهٔ زاویه‌ای اولیهٔ فضانورد نسبت به فضاپیما به عنوان مبدأ (Mv_ir_i) در لحظه‌ای که شروع به کشیدن بند اتصال می‌کند، باید با تکانهٔ زاویه‌ای او در هر زمان دیگری از حرکت (Mvr) برابر باشد. به این‌ترتیب

$$Mvr = Mv_ir_i$$

یا

$$v = \frac{v_ir_i}{r}$$

در این مرحله نیروی مرکزگرا از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2r_i^2}{r^3}$$

نیروی مرکزگرای اولیه مورد نیاز برابر است با

$$F = \frac{(۱۲۰\,\mathrm{kg})(۲٫۵\,\mathrm{m/s})^۲}{۱۸۰\,\mathrm{m}} = ۴٫۲\,\mathrm{N} \quad (\text{در حدود } ۱\mathrm{lb})$$

(الف) وقتی‌که فضانورد در فاصلهٔ ۵۰ متری از فضاپیما قرار دارد، سرعت مماسی او برابر است با

$$v = \frac{(۲٫۵\,\mathrm{m/s})(۱۸۰\,\mathrm{m})}{۵۰\,\mathrm{m}} = ۹٫۰\,\mathrm{m/s}$$

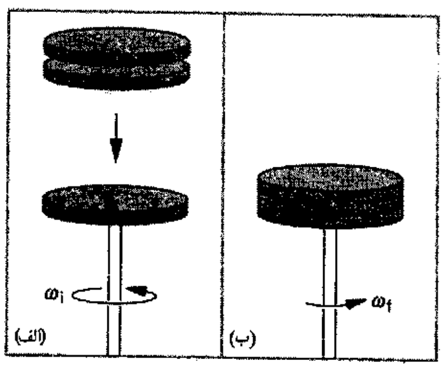
و در این فاصله نیروی مرکزگرا برابر است با

$$F = \frac{(۱۲۰\,\mathrm{kg})(۲٫۵\,\mathrm{m/s})^۲(۱۸۰\,\mathrm{m})^۲}{(۵۰\,\mathrm{m})^۳} = ۱۹۴\,\mathrm{N}$$

(در حدود ۴۴lb)

(ب) در فاصلهٔ ۵ متری از سفینه، سرعت فضانورد با ضریب ۱۰ افزایش پیدا می‌کند و به $۹۰\,\mathrm{m/s}$ می‌رسد، در صورتی‌که نیرو با ضریب $۱۰^۳$ افزایش پیدا می‌کند و به $۱٫۹۴ \times ۱۰^۵\,\mathrm{N}$ می‌رسد! واضح است که فضانورد نمی‌تواند نیرویی به این بزرگی را برای بازگشت به فضاپیما اعمال کند. حتی اگر به‌وسیلهٔ یک سیستم نقاله از داخل سفینه کشیده شود هم بند اتصال نمی‌تواند چنین کششی را تحمل کند؛ این بند در جایی پاره خواهد شد و فضانورد با سرعتی برابر سرعت مماسی‌اش در هنگام پاره شدن بند اتصال، به فضا پرتاب خواهد شد. نتیجهٔ اخلاقی این داستان این است که فضانوردان راه‌پیما باید از کسب سرعت مماسی به‌شدت خودداری کنند! حالا فکر کنید فضانورد برای بازگشتِ بی‌دردسر به سفینه چه می‌تواند بکند؟

مثال ۵. صفحهٔ گرامافونی به جرم ۱۲۵g و به شعاع ۷٫۲cm با سرعت زاویه‌ای ۰٫۸۴rev/s حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۷الف). صفحهٔ دقیقاً مشابه و غیرچرخانی ناگهان روی آن انداخته می‌شود. اصطکاک بین صفحه‌ها سبب می‌شود که سرانجام دو صفحه با سرعت یکسانی بچرخند. در مرحلهٔ بعدی یک صفحهٔ مشابه دیگر روی دو صفحهٔ قبلی می‌اندازیم، و سرانجام سه صفحه با هم می‌چرخند (شکل ۱۷ب). (الف) سرعت زاویه‌ای کل مجموعه چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی دورانی به‌علت اصطکاک از دست می‌رود؟ (ج) موتوری که اولین صفحه را می‌چرخاند باید در طی یک دور چرخش، سرعت زاویه‌ای کل مجموعه را به‌سرعت اولیهٔ صفحه اول برساند. موتور باید چه گشتاور ثابتی اعمال کند؟



شکل۱۷. مثال ۵. (الف) صفحهٔ گرامافونی با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_i می‌چرخد. (ب) دو صفحهٔ کاملاً مشابه با صفحهٔ اول را، که هیچکدام چرخ اولیه ندارند، روی صفحهٔ اول می‌اندازیم. نهایتاً کل سیستم با سرعت زاویه‌ای ω_f می‌چرخد.

حل: (الف) این مسئله مشابه دورانی برخورد کاملاً ناکشسان است. هیچ گشتاور خارجی قائمی در کار نیست، بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای ثابت است. نیروی اصطکاک بین صفحه‌ها نیروی داخلی است، که نمی‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد. پس می‌توانیم از معادلهٔ ۱۶ استفاده کنیم و بنویسیم

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$
$$\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$$

بی‌آنکه نیاز به محاسبهٔ جزئیات داشته باشیم، می‌دانیم که لختی دورانی سه‌صفحهٔ گرامافون یکسان حول محور مشترکشان سه برابر لختی دورانی یکی از آنهاست. پس $I_i/I_f = ۱/۳$ است و

$$\omega_f = (۰٫۸۴\,\mathrm{rev/s})(۱/۳) = ۰٫۲۸\,\mathrm{rev/s}$$

(ب) لختی دورانی صفحهٔ گرامافون حول محورش برابر است با $\frac{۱}{۲}MR^۲$، بنابراین برای هر یک از صفحه‌ها داریم

$$I = \frac{۱}{۲}(۰٫۱۲۵\,\mathrm{kg})(۰٫۰۷۲\,\mathrm{m})^۲ = ۳٫۲۴ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$$

انرژی جنبشی دورانی اولیه برابر است با

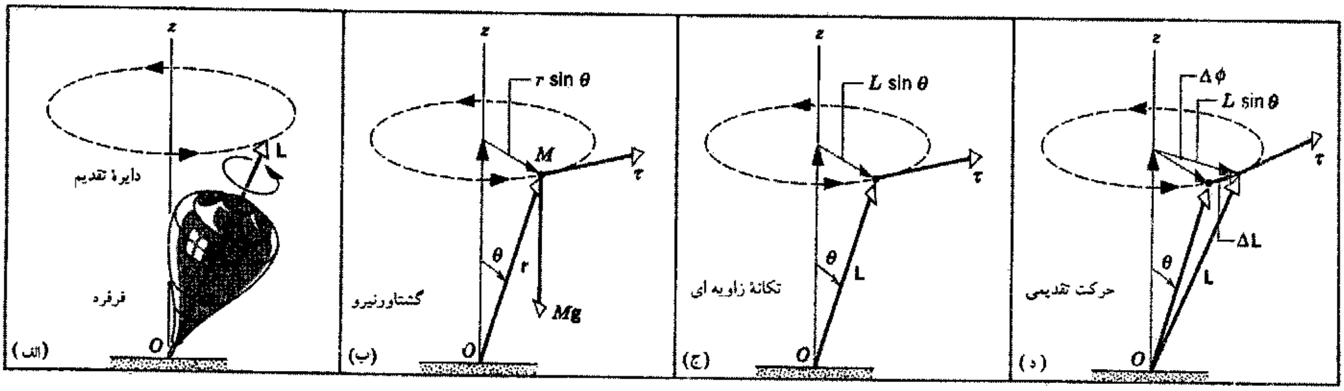
$$\begin{aligned} K_i &= \frac{۱}{۲}I\omega_i^۲ \\ &= \frac{۱}{۲}(۳٫۲۴\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg\cdot m^۲})(۲\pi\,\mathrm{rad/rev}\times۰٫۸۴\,\mathrm{rev/s})^۲ \\ &= ۴٫۵۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

برای محاسبهٔ انرژی جنبشی نهایی می‌توانیم از یک‌راه میان‌بر استفاده کنیم: می‌دانیم که بین حالتهای اولیه و نهایی، لختی دورانی با ضریب ۳ افزایش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای با ضریب ۱/۳ کاهش می‌یابد، و چون انرژی جنبشی به مربع سرعت زاویه‌ای بستگی دارد نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} K_f &= K_i \times ۳ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}(۴٫۵۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}) \\ &= ۱٫۵۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

تغییر در انرژی جنبشی برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K = K_f - K_i &= (۱٫۵۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}) - (۴٫۵۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}) \\ &= -۳٫۰۱\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$



شکل ۱۸. (الف) فرفرهٔ چرخانی حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. (ب) وزن فرفره گشتاوری حول نقطهٔ تماس فرفره با زمین تولید می‌کند. (ج) این گشتاور بر بردار تکانهٔ زاویه‌ای عمود است. (د) گشتاور نیرو جهت بردار تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و موجب حرکت تقدیمی می‌شود.

علامت منفی حاکی از اتلاف انرژی جنبشی است.

(ج) برای ثابت نگه‌داشتن سرعت زاویه‌ای اولیه، موتور باید سرعت ω را از ۲٫۸۰rev/s به ۸٫۴۲rev/s برساند، یعنی آن‌را با ضریب ۳ افزایش بدهد. این افزایش سرعت به این معنی است که انرژی جنبشی باید با ضریب ۹ $= ۳^۲$ افزایش پیدا کند، یعنی باید از $1.50 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$ به $13.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$ برسد. تغییر انرژی جنبشی، که همان کار انجام شده توسط موتور است، برابر است با

$$\Delta K = 13.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} - 1.50 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$
$$= 12.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

در حرکت دورانی، کار از رابطهٔ $W = \tau\phi$ به‌دست می‌آید، که در آن ϕ (در این مورد 2π رادیان) جابه‌جایی زاویه‌ای جسم چرخنده است که در طی آن گشتاور باید اثر کند. به‌این ترتیب

$$\tau = \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}}{2\pi \mathrm{rad}}$$
$$= 1.91 \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m}$$

۵ـ۱۳ فرفرهٔ چرخان[1]

فرفره، شاید آشناترین نمونه از پدیدهٔ نشان داده شده در شکل ۴ب باشد، که درآن گشتاور جانبی، جهت تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی اندازهٔ آن‌را تغییر نمی‌دهد. شکل ۱۸الف فرفره‌ای را نشان می‌دهد که حول محورش می‌چرخد. فرض می‌کنیم که نوک فرفره در نقطهٔ O، مبدأ چارچوب مختصات لخت، ثابت باشد. از تجربه می‌دانیم که محور این فرفرهٔ چرخان به‌آرامی حول محور قائم دوران می‌کند. این حرکت، که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود، ناشی از همان ساختاری است که در شکل ۴ب نشان داده شده است، در این مورد، نیروی گرانی است که گشتاور خارجی را فراهم می‌کند.

شکل ۱۸ب نمودار ساده‌شده‌ای است که درآن به‌جای فرفره ذره‌ای به جرم M گذاشته‌ایم. این ذره در مکان مرکز جرم فرفره واقع شده است. نیروی گرانشی Mg گشتاوری به مقدار

$$\tau = Mgr\,\sin\theta \qquad (۱۷)$$

حول نقطهٔ O اعمال می‌کند. این گشتاور، که عمود بر محور فرفره و در نتیجه عمود بر $\mathbf{L}$ است (شکل ۱۸ج)، می‌تواند جهت $\mathbf{L}$ را تغییر بدهد ولی نمی‌تواند مقدار آن‌را تغییر بدهد. تغییر تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در مدت زمان Δt از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\Delta t \qquad (۱۸)$$

و در همان جهت $\boldsymbol{\tau}$، یعنی عمود بر $\mathbf{L}$ است. بنابراین اثر $\boldsymbol{\tau}$ این است که $\mathbf{L}$ را به $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$، که برداری است با همان طول $\mathbf{L}$ ولی در جهتی متفاوت، تغییر می‌دهد. (فرض می‌کنیم فرفره چنان تند می‌چرخد که $\mathbf{L}$ بزرگ و بنابراین $\Delta\mathbf{L} \ll \mathbf{L}$ است.)

اگر فرفره تقارن محوری داشته باشد، تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور دوران فرفره خواهد بود. همراه با تغییر جهت $\mathbf{L}$ محور دوران هم تغییر جهت می‌دهد. نوک بردار $\mathbf{L}$ و محور فرفره بر دایره‌ای حول محور z حرکت می‌کنند (شکل ۱۸الف). این حرکت همان حرکت تقدیمی فرفره است.[1]

در یک بازهٔ زمانی Δt، محور به‌اندازهٔ زاویه $\Delta\phi$ می‌چرخد (شکل ۱۸د)، و بنابراین سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، ω_P، برابر است با

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad (۱۹)$$

از شکل ۱۸د، می‌بینیم که

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{\tau\Delta t}{L\sin\theta} \qquad (۲۰)$$

---

۱. نگاه کنید به
"The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1981, p. 185.

بنابراین

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L\sin\theta} = \frac{Mgr\,\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{Mgr}{L} \qquad (۲۱)$$

سرعت حرکت تقدیمی با تکانهٔ زاویه‌ای نسبت عکس دارد، هر قدر فرفره تندتر بچرخد، حرکت تقدیمی کندتر است.

حرکت تقدیمی حول محور z انجام می‌شود و بنابراین بردار ω_P باید در راستای محور z باشد. می‌توانیم نشان بدهیم که معادلهٔ برداری زیر رابطهٔ میان مقادیر و جهتهای متغیرهای دینامیکی دخیل در این محاسبات را به‌درستی به‌دست می‌دهد

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} \qquad (۲۲)$$

آیا می‌توانید معادلهٔ برداری مشابهی برای مورد متناظر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا با اندازهٔ سرعت ثابت روی یک دایره حرکت می‌کند بنویسید؟

۱۳ـ۶ کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای (اختیاری)

در بخش ۸ـ۸ دربارهٔ کوانتیدگی انرژی صحبت کردیم. کوانتیدگی انرژی، گسیل و جذب انرژی را به بسته‌های گسسته یا کوانتومها محدود می‌کند. در دنیای میکروسکوپیک به سیستمهای اتمی و زیراتمی، نمی‌توانیم انرژی را به هر مقدار دلبخواهی تغییر بدهیم، فقط می‌توانیم آن‌را به اندازهٔ مقادیر مشخص و از پیش تعیین‌شده‌ای تغییر بدهیم.

تکانهٔ زاویه‌ای هم، مثل انرژی، کوانتیده است. این مفهوم را به‌طور مشروح‌تر در فصل ۵۱ نسخهٔ مبسوط این کتاب که به ساختار اتم اختصاص دارد، همراه با ذکر شواهد تجربی و نظری بررسی خواهیم کرد. در اینجا فقط بعضی نظرهای کلی را مطرح می‌کنیم و ارتباط آنها را با خواص وابسته به تکانهٔ زاویه‌ای که در این فصل مطالعه شد، نشان می‌دهیم.

تغییرات کوانتیده در حرکت دورانی یک سیستم به‌صورت مضربهای صحیحی از یک ثابت عمومی صورت می‌گیرند

$$\Delta L = n(h/2\pi) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (۲۳)$$

در اینجا h ثابت پلانک است که مقدار آن برابر است با $6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$. این یکای پایه معرف مقدار بسیار کوچکی تکانهٔ زاویه‌ای است. تکانهٔ زاویه‌ای صفحهٔ گرامافون، که نسبتاً کند می‌چرخد، از مرتبهٔ 10^{32} برابر یکای $h/2\pi$ است. وقتی دکمهٔ تنظیم دقیق سرعت چرخش گرامافون را دستکاری می‌کنیم، مسلماً نمی‌توانیم مواظب این جهشهای گسسته در مقیاس یک قسمت در 10^{32} باشیم!

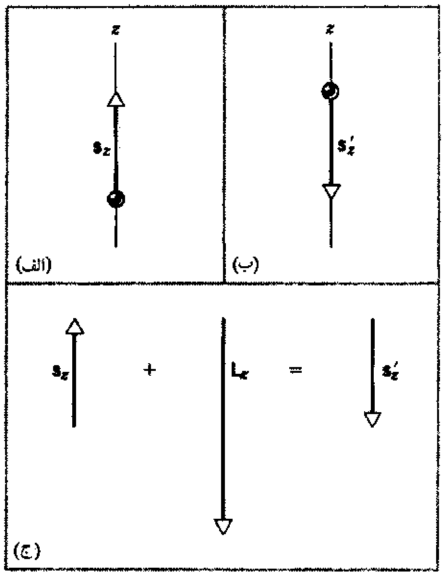
معادلهٔ ۲۳ برای کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای، در مورد حرکت الکترونهای اتم در مدارهایشان به‌دور هسته به‌کار می‌رود. این سیستم دارای تکانهٔ زاویه‌ای مداری است، که باید در حین گردش ثابت بماند، زیرا نیروی بین الکترون و هسته نیروی داخلی سیستم است و بنابراین نمی‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد. نیروهای خارجی، مانند نیروهای ناشی از میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی، می‌توانند سبب جهش الکترون به مدار دیگری بشوند، که در آنها ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای‌شان مقدار دیگری داشته باشد، ولی تغییر در L، همان‌طور که معادلهٔ ۲۳ ایجاب می‌کند، در هر حال باید مضرب صحیحی از $h/2\pi$ باشد. به‌این ترتیب تکانهٔ زاویه‌ای مداری می‌تواند "برچسب" مناسب و مفیدی برای مدارهای الکترونی در اتمها باشد.

آزمایشهای انجام شده در دههٔ ۱۹۲۰ حاکی از آن بودند که الکترونها نوع دیگری از تکانهٔ زاویه‌ای هم دارند که نمی‌توان آن‌را به حرکت مداری نسبت داد. این نوع تکانهٔ زاویه‌ای، که تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی نامیده می‌شود، یک خاصیت مشخصهٔ خود جسم است و ربطی به حالت حرکتی خاصی ندارد. یک راه مفید (ولی مطلقاً نادرست) برای تجسم تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی آن است که فرض کنیم جسم حول محورش می‌چرخد؛ به همین دلیل است که اغلب تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی را "اسپین" [چرخش] می‌نامند و آن‌را با نماد $\mathbf{s}$ نشان می‌دهند.

تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی الکترون $\frac{1}{2}(h/2\pi)$ است. این عبارت به این معنی است که، نسبت به هر محور zای که اختیار کنیم، مؤلفه z تکانهٔ زاویه‌ای باید $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$ یا $s_z = -\frac{1}{2}(h/2\pi)$ باشد. توجه کنید که اختلاف بین این دو حالت، که می‌توان آن‌را در حکم تغییر در جهت تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی الکترون دانست، برابر با $h/2\pi$ است که با معادلهٔ ۲۳ هم سازگار است.

معمولاً تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی را با عدد کوانتومی اسپین بیان می‌کنند، که عبارت است از تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی برحسب یکای $h/2\pi$؛ به‌این ترتیب عدد کوانتومی اسپین الکترون برابر با ۱/۲ است. عدد کوانتومی اسپین پروتون و نوترون هم ۱/۲ است. عدد کوانتومی اسپین فوتون (بستهٔ کوانتیدهٔ تابش الکترومغناطیسی) برابر با ۱ است. عدد کوانتومی اسپین جزو ویژگیهای تمام ذرات بنیادی است، و آن هم مثل جرم و بار الکتریکی، از خواص بنیادی ذره محسوب می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای کوانتیده، در انرژی به نام تشدید مغناطیسی هسته‌ای مشاهده می‌شود. پروتون (هستهٔ اتم هیدروژن) را که اسپین آن ۱/۲ است در نظر بگیرید. در شکل ۱۹الف تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی پروتون در سمتگیری مشخصی نشان داده شده است. مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای برابر است با $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. اگر پروتون را در معرض تابشی با انرژی مناسب قرار بدهیم، جذب یک فوتون الکترومغناطیسی (با اسپین ۱ و تکانهٔ زاویه‌ای $h/2\pi$) می‌تواند مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای پروتون را به‌اندازهٔ ۱ واحد تغییر بدهد و از $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ به $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$ برساند. این وضعیت در شکل ۱۹ب نشان داده شده است. در شکل ۱۹ج نشان داده‌ایم که چگونه اسپین اولیه s_z پروتون و تکانهٔزاویه‌ای L_z فوتون (مؤلفه‌های z بردارهای $\mathbf{s}$ و $\mathbf{L}$) با هم جمع می‌شوند و اسپین نهایی s'_z پروتون (وارونه) را به‌دست می‌دهند. شکل ۱۹ج همچنین مثال دیگری از اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است، یعنی نشان می‌دهد که تکانهٔ زاویه‌ای اولیه $(\mathbf{s} + \mathbf{L})$،



شکل۱۹. (الف) پروتونی با تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی (اسپین) $\mathbf{s}$ که دارای مؤلفهٔ s_z در امتداد محور z است. (ب) پس از جذب یک فوتون، مؤلفهٔ z اسپین وارونه می‌شود. (ج) مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای اولیه که برابر با ۱/۲+ واحد است، با مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای فوتون، که برابر با ۱− واحد است جمع می‌شود و برایندی برابر با ۱/۲− واحد به‌دست می‌دهد.

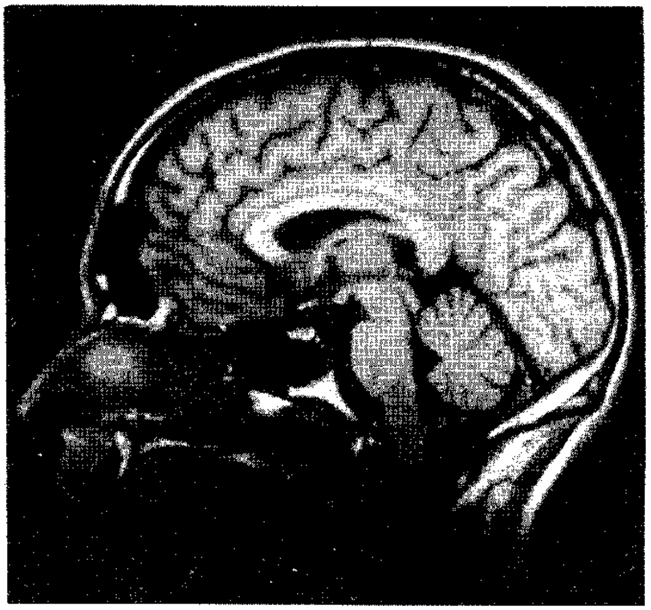
در نبود گشتاور نیروی خارجی، با تکانهٔ زاویه‌ای نهایی ($\mathbf{s}'$) برابر است.

در تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR)، یک میدان مغناطیسی ایستا که در جهت محور z اعمال می‌شود، اسپین پروتونها را (مانند شکل ۱۹الف) با این محور هم‌جهت می‌کند. یک میدان الکترومغناطیسی متغیر در بسامدهای رادیویی هم فوتونهای با انرژی دقیقاً مناسب را فراهم می‌آورد تا جذب پروتونها شوند و اسپین آنها را وارونه کنند.

از آنجا که بخش اعظم بدن انسان از آب تشکیل شده و آب هم شامل هیدروژن است، جذب این تابش الکترومغناطیسی روشی برای تصویرگیری از اعضای داخلی بدن فراهم می‌آورد (شکل ۲۰). تصور می‌شود که تابشهای الکترومغناطیسی به‌صورت امواج رادیویی آسیب چندانی به بدن نمی‌رساند؛ پرتوهای x، که از آنها هم برای تصویربرداری استفاده می‌شود، بالقوه بسیار مضرترند. این‌گونه تصویربرداری تشدید مغناطیسی ممکن است، به عنوان یک روش تشخیص، به‌طور وسیعی جانشین عکسهای پرتو xای شود.

۱۳ـ۷ مروری بر دینامیک دورانی

در فصلهای ۱۱ تا ۱۳، مروری بر مباحث کلی دینامیک و سینماتیک دورانی داشتیم. مطالعهٔ کامل این مباحث در مجال این کتاب نمی‌گنجد، ولی همین نتایج کلی را می‌شود برای تحلیل بسیاری از وضعیتهای فیزیکی به‌کار برد. توجه به این نکته که بعضی از نتایج به‌دست آمده را فقط در موارد خاص و معینی می‌توان به‌کارگرفت بسیار اهمیت دارد. برای کمک به شما در این زمینه، تعدادی از معادلات بنیادی دینامیک دورانی را در جدول ۱ گرد آورده‌ایم.



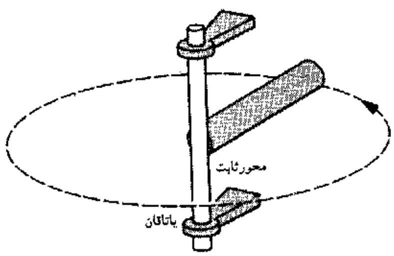
شکل ۲۰. تصویری از جمجمه، با روش تصویرگیری تشدید مغناطیسی (MRI).

پرسشها

۱. تاکنون با کمیتهای برداری متعددی از جمله مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه و تکانهٔ زاویه‌ای آشنا شده‌ایم. کدام‌یک از این کمیتها مستقل از مبدأ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند؟

۲. فیزیکدان مشهوری (آر. دبلیو. وود) که به شوخیهای عملی بسیار علاقه‌مند بود، یکبار چرخ‌لنگری را که خیلی تند می‌چرخید در یک چمدان کار گذاشت، و از باربری خواست که آن‌را به دنبال او حمل کند. وقتی باربر، به دنبال صاحب چمدان، سریعاً به یک کوچه می‌پیچد چه اتفاقی می‌افتد؟ این رفتار را برحسب $\tau = d\mathbf{L}/dt$ توضیح بدهید.

۳. استوانه‌ای حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (شکل ۲۱). برای نشان دادن بردارهای $\mathbf{L}$ و ω مبدأ مناسبی اختیار کنید. آیا این بردارها موازی‌اند؟ آیا ملاحظات مربوط به تقارن در اینجا دخیل‌اند؟



شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. فرض کنید میلهٔ یکنواختی به‌طور قائم روی سطحی با اصطکاک ناچیز قرار گرفته است. به انتهای پایینی میله یک ضربهٔ افقی وارد می‌آید. حرکت مرکز جرم و نقطهٔ بالای میله را توصیف کنید.

جدول ۱. خلاصهٔ معادلات مربوط به دینامیک دورانی.

معادلات	ملاحظات
	۱. روابط تعریف کننده
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	گشتاور ناشی از نیروی $\mathbf{F}$، وارد بر یک ذره حول نقطهٔ O.
$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$	برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستمی از ذرات که تحت تأثیر چندین گشتاور منفرد $\boldsymbol{\tau}_n$ حول نقطهٔ O قرار گرفته است.
$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	تکانهٔ زاویه‌ای یک ذره حول نقطهٔ O.
$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n$	تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول نقطهٔ O.
	۲. روابط کلی
$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{l}}{dt}$	معادلهٔ حرکت تک‌ذره‌ای که تحت تأثیر گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ قرار گرفته است. هم $\boldsymbol{\tau}$ و هم $\mathbf{l}$ نسبت به یک نقطهٔ واحد O از یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری می‌شوند. این عبارت مشابه دورانی عبارت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ در حرکت انتقالی است.
$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$	قانون حرکت برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر یک گشتاور خارجی خالص است. این معادله در صورتی صادق است که $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ و $\mathbf{L}$ هر دو (۱) نسبت به یک نقطهٔ ثابت O در یک چارچوب مرجع لخت، یا (۲) نسبت به مرکز جرم سیستم، اندازه‌گیری شوند. این عبارت مشابه دورانی معادلهٔ $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$.
	۳. موارد خاص
	نکات زیر در مورد دوران جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت صادق است.
$\tau = I\alpha$	α باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و τ مؤلفهٔ اسکالر $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ در امتداد همان محور است. این رابطه مشابه دورانی رابطهٔ $F = Ma$ است.
$L = I\omega$	ω باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و L باید مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای کل حول همین محور باشد. این رابطه مشابه دورانی رابطهٔ $P = Mv$ است.

۵. اگر وسیلهٔ نشان داده شده در شکل ۵ روی عرشهٔ یک سفینهٔ فضایی بزرگ که در ناحیه‌ای تهی از گرانش در فضا حرکت می‌کند قرار داده شود، آیا اصولاً تغییری در اجرای آزمایش حاصل می‌شود؟ اگر می‌شود، چه تغییری؟

۶. وقتی اتومبیلی که چرخهای عقب آن محرک‌اند، سریعاً از حالت سکون شتاب می‌گیرد، راننده مشاهده می‌کند که جلوی اتومبیل کمی بالا می‌آید. چرا چنین می‌شود؟ آیا اتومبیلی که چرخهای جلویش محرک باشند طور دیگری رفتار می‌کند؟

۷. یک پیکان در طی پرواز چنان جهت‌گیری می‌کند که همواره مماس بر مسیرش باقی بماند. ولی توپ راگبی (که با چرخش قابل‌توجهی حول محور بزرگترش پرتاب می‌شود) چنین نمی‌کند. چرا این دو جسم رفتار متفاوتی دارند؟

۸. یک بازیکن توپ (بیضوی شکل) راگبی را طوری پرتاب می‌کند که توپ ضمن حرکت حول محور مایلی (نامتقارن) می‌چرخد. آیا تکانهٔ زاویه‌ای این توپ ثابت است، یا تقریباً چنین است؟ بین حالتی که توپ حرکت لنگری دارد و حالتی که حرکت آن هموار است چه وجه تمایزی هست؟

۹. آیا می‌توانید نظریهٔ ساده‌ای برای توضیح پایداری دوچرخهٔ متحرک ارائه کنید؟ باید توضیح بدهید که چرا متعادل کردن دوچرخهٔ ساکن بسیار دشوارتر از متعادل کردن دوچرخهٔ متحرک است.

۱۰. چرا یک چوب بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند؟

۱۱. وقتی روی یک مسیر باریک راه می‌روید، اگر یک‌دفعه احساس کنید که دارید تعادل خودتان را از دست می‌دهید و مثلاً به‌طرف راست می‌افتید، برای بازگشت به تعادل، بدنتان را به کدام طرف می‌چرخانید؟ توضیح بدهید که چرا.

۱۲. پیچهایی که موتور هواپیماهای جت را به بدنه متصل می‌کنند چنان طراحی شده‌اند که اگر به دلایل پیش‌بینی نشده‌ای موتور (که سریعاً می‌چرخد) ناگهان از کار بیفتد، می‌برند. فایدهٔ این "فیوز" چیست؟

۱۳. یک بازیکن دلخور چوب هاکی‌اش را روی یخ پرتاب می‌کند. چوب ضمن لغزیدن روی یخ حول مرکز جرمش می‌چرخد و سرانجام تحت تأثیر اصطکاک از حرکت می‌ایستد. حرکت دورانی چوب دقیقاً در همان لحظه‌ای به آخر می‌رسد که مرکز جرم آن به حال سکون درآمده است. توضیح بدهید که چرا.

۱۴. وقتی سرعت زاویه‌ای یک جسم زیاد می‌شود، تکانهٔ زاویه‌ای آن ممکن است افزایش پیدا کند یا نکند. برای هریک از این موارد مثالی بزنید.

۱۵. دانشجویی که روی صفحهٔ چرخانی ایستاده است دو دمبل یکسان در دو دست گرفته و بازوهایش را به طرفین باز کرده است. حالا بی‌آنکه هیچ جزئی از سیستم جابه‌جا شود، دمبلها را رها می‌کند. آیا سرعت زاویه‌ای دانشجو تغییر می‌کند؟ آیا تکانهٔ زاویه‌ای پایسته است؟ در هر دو مورد توضیح بدهید.

۱۶. چرا بدنهٔ هلیکوپتری که در پرواز است در جهت مخالف چرخش پره‌های پیشبرنده‌اش به‌چرخش در نمی‌آید؟

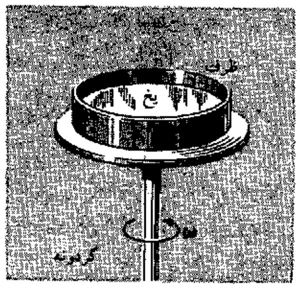
۱۷. برای اینکه هواپیمای تک‌موتوره بتواند تراز پرواز کند باید باله‌های کنترل یک سمت را بالا ببرد و باله‌های سمت دیگر را پایین بیاورد. چرا چنین کاری ضروری است؟ آیا در شرایط عادی این کار در مورد هواپیماهای دوموتوره هم لازم است؟

۱۸. اگر از عقب به ملخ یک هواپیما نگاه کنیم، می‌بینیم که ساعتگرد می‌چرخد. وقتی خلبان می‌خواهد پس از یک شیرجهٔ تند اوج بگیرد، در می‌یابد که برای ثابت نگه‌داشتن صفحهٔ پیشروی باید در قسمت انتهایی شیرجه از سکان چپ استفاده کند. در این باره توضیح بدهید.

۱۹. تعداد زیادی از رودهای بزرگ به‌سوی استوا جریان دارند. رسوبهایی که این رودها با خودشان به دریا می‌برند چه تأثیری بر چرخش زمین دارد؟

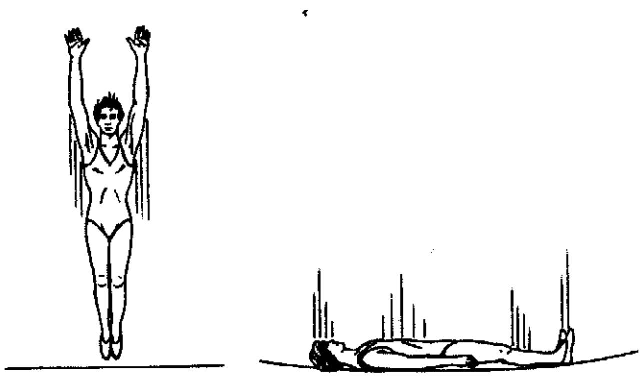
۲۰. اگر تمام جمعیت جهان به قطب جنوب مهاجرت کنند، آیا این اقدام تأثیری در طول مدت روز می‌گذارد؟ اگر چنین است، به چه صورت تأثیر می‌گذارد؟

۲۱. یک گردونهٔ دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم می‌چرخد. نه اصطکاک و نه گشتاور محرک در کار نیستند. یک ظرف گرد روی این گردونه قرار گرفته است و با آن می‌چرخد (شکل ۲۲). در ته ظرف یک لایه یخ با ضخامت یکنواخت قرار دارد، که البته آن هم با ظرف می‌چرخد. یخ ذوب می‌شود ولی هیچ آبی از ظرف خارج نمی‌شود. آیا حالا سرعت زاویه‌ای مجموعه بیشتر از، برابر با، یا کمتر از مقدار اولیه است؟ برای پاسخ خودتان دلیل ارائه بدهید.



شکل ۲۲. پرسش ۲۱

۲۲. در شکل ۲۳الف آکروبات‌بازی را می‌بینید که توسط یک ترامپولین با تکانهٔ زاویه‌ای صفر به طرف بالا به‌حرکت درآمده است. آیا این شخص می‌تواند با حرکت دادن اندام خود، ترتیبی بدهد که به پشت روی ترامپولین فرود بیاید (شکل ۲۳ب)؟ جالب توجه اینکه ۳۸٪ مربیان شیرجه و ۳۴٪ فیزیک‌پیشگانی که این سؤال از آنها پرسیده شد، به آن پاسخ نادرست دادند. نظر شما در این باره‌چیست؟[۱]



(الف) (ب)

شکل ۲۳. پرسش ۲۲

۲۳. با استفاده از مفاهیم تکانهٔ زاویه‌ای و لختی دورانی، توضیح بدهید که در تاب‌بازی چگونه می‌توان در موقعیت نشسته ارتفاع تاب‌خوردن را افزایش داد.[۲]

۲۴. آیا می‌شود یک تاب را آنقدر بالا برد که یک دایرهٔ کامل را طی کند و به‌طور کامل دور تکیه‌گاهش بچرخد؟ می‌توانید (چنانچه مایل باشید) فرض کنید که سکوی تاب، به‌جای طناب یا زنجیر، با میلهٔ صلب به محور متصل شده است.

۲۵. یک گردونهٔ دایره‌ای کوچک حول یک محور قائم به‌طور آزاد در حال چرخش است. در محور اصطکاک وجود ندارد. (الف) ککی که در ابتدا در مرکز گردونه قرار دارد به طرف لبه حرکت می‌کند و روی لبه می‌ایستد. تکانهٔ زاویه‌ای سیستم (گردونه به‌اضافهٔ کک) چگونه تغییر می‌کند؟ سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟ (ب) اگر کک از لبهٔ گردونه (بدون پرش) سقوط کند سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟

۲۶. از یک چرخ سنگین می‌توان برای پایدارکردن حرکت کشتی استفاده کرد. اگر این چرخ چنان نصب شود که محور دورانش عمود بر عرشهٔ کشتی باشد، وقتی که کشتی می‌خواهد از پهلو به پهلو بغلتد، اثر این چرخ چگونه ظاهر می‌شود؟

۲۷. اگر فرفرهٔ شکل ۱۸ در حال چرخش نباشد، می‌افتد. اگر تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی آن در مقایسه با تکانهٔ زاویه‌ای ناشی از گشتاور اعمال شده زیاد باشد، فرفره حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در حالت میانی، یعنی وقتی فرفره به‌کندی در حال چرخش باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۸. فرفرهٔ "واغلتان" تشکیل شده است از یک قسمت تقریباً کروی با شعاع زیاد در یک طرف و یک قسمت میله‌ای برای چرخاندن آن در طرف دیگر. اگر این فرفره نچرخد روی سطح کروی قرار می‌گیرد و اگر چرخانده شود طوری وامی‌غلتد که روی میله قرار بگیرد. در این باره توضیح بدهید.[۳] اگر نتوانستید فرفرهٔ واغلتان پیدا کنید، از یک تخم‌مرغ

---

۱. نگاه کنید به

"Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?" Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, July 1979, p. 583.

۲. نگاه کنید به

"How To Get the Playground Swing Going: A First Lesson in the Mechanics of Rotation", Jearl Walker, *Scientific American*, March 1989, p. 106.

۳. نگاه کنید به

"The Tippy-Top," George D. Freier, *The Physics Teacher*, January 1967, p. 36.

آب‌پز سفت شده استفاده کنید؛ رفتار "ایستادن روی پا"ی تخم‌مرغ چرخان را می‌توانید با گذاشتن یک علامت جوهری روی سر "تیز" تخم‌مرغ بررسی کنید.

مسئله‌ها

بخش ۱۳ـ۱ تکانهٔ زاویه‌ای ذره

۱. اگر r، p، و θ معلوم باشند، می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۲ تکانهٔ زاویه‌ای ذره را محاسبه کنیم. ولی، گاهی اوقات مؤلفه‌های (x, y, z) بردار $\mathbf{r}$ و (v_x, v_y, v_z) سرعت $\mathbf{v}$ را می‌دانیم. (الف) نشان بدهید که مؤلفه‌های بردار $\mathbf{l}$ در امتداد محورهای x، y، و z عبارت‌اند از

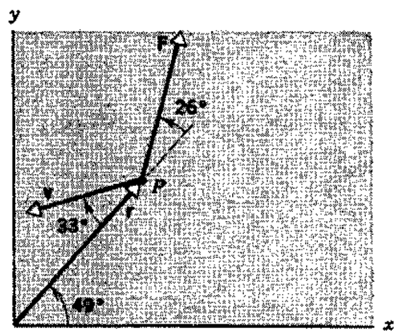
$$l_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$l_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$l_z = m(xv_y - yv_x)$$

(ب) نشان بدهید که اگر ذره در صفحهٔ xy حرکت کند، بردار تکانهٔ زاویه‌ای برایند تنهادارای مؤلفهٔ z است. (راهنمایی: نگاه کنید به معادلهٔ ۱۷ در فصل ۳).

۲. ذرهٔ P به جرم ۲٫۱۳kg که بردار مکان آن $\mathbf{r}$ و سرعت آن $\mathbf{v}$ است تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار می‌گیرد (شکل ۲۴). این سه بردار در یک صفحه قرار دارند. فرض کنید که $r =$ ۲٫۹۱m، $v =$ ۴٫۱۸m/s و $F =$ ۱٫۸۸N باشد. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) تکانهٔ زاویه‌ای ذره و (ب) گشتاور وارد بر ذره حول مبدأ. جهت این دو بردار را مشخص کنید.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۲

۳. نشان بدهید تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای که با سرعت ثابت در حرکت است، حول هر نقطهٔ دلبخواه در طی حرکت ثابت می‌ماند.

۴. (الف) با استفاده از داده‌های ارائه شده در پیوستها، تکانهٔ زاویه‌ای کل ناشی از دوران همهٔ سیاره‌ها به‌دور خورشید را محاسبه کنید. (ب) چه کسری از این تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به سیارهٔ مشتری است؟

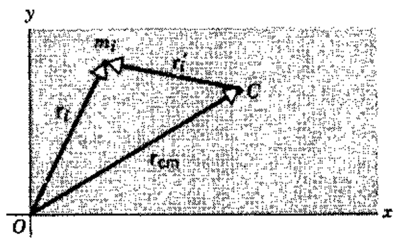
۵. دو ذره، هرکدام با جرم m و سرعت v، در امتداد دو خط موازی که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند در جهتهای مخالف در حرکت‌اند. عبارتی برای تکانهٔ زاویه‌ای کل این سیستم حول هر مبدأ دلبخواه به‌دست بیاورید.

۶. تکانهٔ زاویه‌ای شخصی به جرم ۸۴٫۳kg واقع بر استوای زمین را حول مرکز زمین محاسبه کنید.

بخش ۱۳ـ۲ سیستمهای ذرات

۷. تکانهٔ زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات، نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت از عبارت $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ حاصل می‌شود که در آن $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{p}_i$ نسبت به مبدأ O اندازه‌گیری شده‌اند. (الف) از رابطه‌های $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\rm cm} + \mathbf{r}'_i$ و $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{p}'_i$ استفاده کنید و $\mathbf{L}$ را برحسب مکانهای $\mathbf{r}'_i$ و تکانه‌های $\mathbf{p}'_i$ نسبت به مرکز جرم C بیان کنید (نگاه کنید به شکل ۲۵). (ب) از تعریف مرکز جرم و تعریف تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}'$ نسبت به مرکز جرم استفاده کنید و عبارت $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{\rm cm} \times M\mathbf{v}_{\rm cm}$ را به‌دست بیاورید. (ج) نشان بدهید که این عبارت را می‌توان چنین تعبیر کرد که تکانهٔ زاویه‌ای کل برابر است با تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی (تکانهٔ زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم) به‌اضافهٔ تکانهٔ زاویه‌ای مداری (تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به حرکت مرکز جرم C نسبت به مبدأ O وقتی که تمام جرم جسم در نقطهٔ C متمرکز شده باشد).

۸. فرض کنید $\mathbf{r}_{\rm cm}$ بردار مکان مرکز جرم C سیستمی از ذرات نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت باشد، و فرض کنید که $\mathbf{r}'_i$ بردار مکان ذرهٔ iام با جرم m_i، نسبت به مرکز جرم C باشد. بنابراین $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\rm cm} + \mathbf{r}'_i$ است (شکل ۲۵). حالا تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم ذرات را نسبت به مرکز جرم C به‌صورت $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$، که در آن $\mathbf{p}_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$ است، تعریف کنید. (الف) نشان بدهید که $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{\rm cm}/dt = \mathbf{p}_i - m_i\mathbf{v}_{\rm cm}$ (ب) حالا نشان بدهید $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را با هم ترکیب کنید و با استفاده از تعریف مرکز جرم و قانون سوم نیوتون نشان بدهید که $\boldsymbol{\tau}'_{\rm ext} = d\mathbf{L}'/dt$ است. در این رابطهٔ آخر $\boldsymbol{\tau}'_{\rm ext}$ عبارت از جمع کل گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم حول مرکز جرم است.



شکل ۲۵. مسئله‌های ۷ و ۸

بخش ۱۳ـ۳ تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

۹. انتگرال زمانی گشتاور نیرو را ضربهٔ زاویه‌ای می‌گوییم. (الف) با شروع از معادلهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ نشان بدهید که ضربهٔ زاویه‌ای کل برابر

با تغییر تکانهٔ زاویه‌ای است. این رابطه مشابه زاویه‌ای رابطهٔ ضربه‌ـتکانه در حرکت خطی است. (ب) برای دوران حول یک محور ثابت، نشان بدهید که

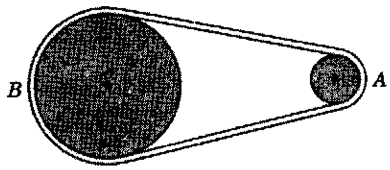
$$\int \tau\, dt = \overline{F} r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i)$$

که در آن r بازوی گشتاور است، $\overline{F}$ میانگین نیرو در مدتی است که بر جسم اثر می‌کند و ω_i و ω_f به‌ترتیب عبارت‌اند از سرعت زاویه‌ای جسم درست قبل و بعد از اعمال نیرو.

۱۰. قرصی با لختی دورانی $۱٫۲۲ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg \cdot m^2}$ روی یک متهٔ برقی نصب می‌شود. موتور این مته گشتاور $۱۵٫۸\mathrm{N \cdot m}$ را بر جسم وارد می‌کند. $۳۳٫۰\mathrm{ms}$ پس از روشن شدن موتور، (الف) تکانهٔ زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای قرص چقدر است؟

۱۱. چرخی با شعاع $۲۴٫۷\mathrm{cm}$، که در ابتدا با سرعت $۴۳٫۳\mathrm{m/s}$ در حرکت است، $۲۲۵\mathrm{m}$ می‌غلتد تا متوقف شود. کمیتهای زیر را محاسبه کنید. (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ. (ج) اگر لختی دورانی چرخ برابر با $۰٫۱۵۵\mathrm{kg \cdot m^2}$ باشد، گشتاور وارد بر چرخ در اثر اصطکاک غلتشی را محاسبه کنید.

۱۲. چرخهای A و B توسط تسمه‌ای مطابق شکل ۲۶ به‌هم متصل شده‌اند. شعاع چرخ B سه برابر شعاع چرخ A است. در دو حالت زیر نسبت لختیهای دورانی I_A/I_B چقدر است؟ (الف) هر دو چرخ تکانهٔ زاویه‌ای یکسانی دارند و (ب) هر دو چرخ انرژی جنبشی دورانی یکسانی دارند. فرض می‌کنیم که تسمه روی چرخها نمی‌لغزد.



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۲

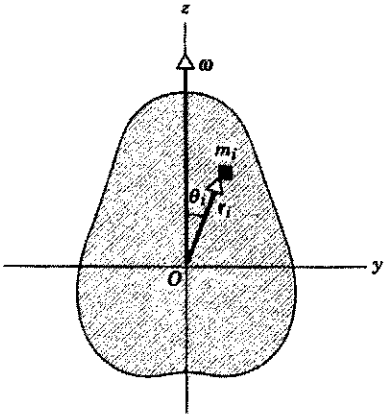
۱۳. نشان بدهید که برای سیستم دوذره‌ای شکل ۷، $\mathbf{L} = I\omega$ است.

۱۴. با استفاده از داده‌های مندرج در پیوستها، تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی زمین را حول محور دورانش تعیین کنید. فرض کنید زمین کره‌ای یکنواخت است.

۱۵. تکانهٔ زاویه‌ای چرخ‌لنگری با لختی دورانی $۰٫۱۴۲\mathrm{kg \cdot m^2}$ در مدت $۱٫۵۳\mathrm{s}$ از $۳٫۰۷$ به $۰٫۷۸۸\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ کاهش پیدا می‌کند. (الف) گشتاور متوسط وارد بر چرخ‌لنگر را در این مدت تعیین کنید. (ب) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، چرخ‌لنگر در این مدت چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟ (ج) روی این چرخ لنگر چقدر کار انجام شده است؟ (د) این چرخ‌لنگر چه توان متوسطی فراهم می‌کند؟

۱۶. در شکل ۲۷ جسم صلب متقارنی را می‌بینیم که حول محور ثابتی دوران می‌کند. به‌منظور ساده کردن محاسبات، مبدأ مختصات را در مرکز جرم قرار می‌دهیم. با جمع تکانه‌های زاویه‌ای مربوط به همهٔ جرمهای m_i که جسم به آنها تقسیم شده است، ثابت کنید $\mathbf{L} = I\omega$

که در آن $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای کل است.



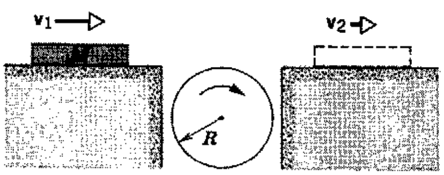
شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. طول چوبدستی به جرم $۴٫۴۲\mathrm{kg}$ برابر با $۱٫۲۳\mathrm{m}$ است. این چوبدست روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار گرفته است. یک نیروی ضربه‌ای افقی عمود بر چوبدست در فاصلهٔ $۴۶٫۴\mathrm{cm}$ از مرکز جرم به آن وارد می‌شود و ضربه‌ای برابر با $۱۲٫۸\mathrm{N \cdot s}$ تولید می‌کند. حرکت بعدی چوبدست چگونه است؟

۱۸. استوانه‌ای روی سطح شیبداری با زاویه θ به پایین می‌غلتد. با کاربرد مستقیم معادلهٔ ۸ $(\sum \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} = d\mathbf{L}/dt)$ نشان بدهید که شتاب مرکز جرم آن برابر $\frac{۲}{۳} g \sin\theta$ است. این روش را با روش مثال ۸ فصل ۱۲ مقایسه کنید.

۱۹. برای اینکه توپ بیلیارد از حالت سکون، بدون لغزش به غلتش دربیاید، چوب بیلیارد نباید در راستای مرکز (یعنی در ارتفاعی به‌اندازهٔ شعاع توپ بالاتر از سطح میز) به‌آن برخورد کند بلکه باید در ارتفاع $۲R/۵$ بالاتر از مرکز به توپ برخورد کند. این را اثبات کنید.[۱]

۲۰. محور استوانهٔ شکل ۲۸ ثابت است. استوانه در آغاز در حالت سکون است. جسمی به جرم M که بدون اصطکاک با سرعت v_1 به‌سمت راست در حرکت است از روی استوانه می‌گذرد و به موقعیت خط‌چین می‌رسد. وقتی این جسم با استوانه تماس پیدا می‌کند، ابتدا روی آن می‌لغزد، ولی اصطکاک آنقدر هست که قبل از آنکه تماس



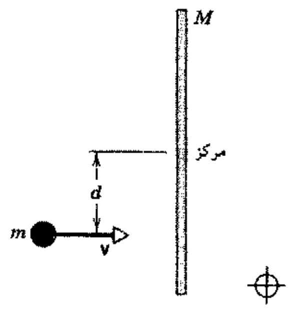
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۰

۱. نگاه کنید به

Arnold Sommerfeld, Mechanics, *Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press Orlando (1964 paperback edition), pp. 158-161, for a supplement on the mechanics of billiards.

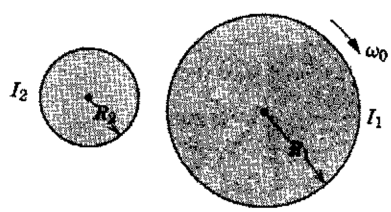
جسم با استوانه قطع شود لغزش تمام می‌شود. شعاع استوانه R و لختی دورانی آن I است. سرعت نهایی v_2 را برحسب v_1، M، I و R بیان کنید. ساده‌ترین راه برای رسیدن به این نتیجه آن است که از رابطهٔ میان ضربه و تغییر تکانه استفاده کنید.

۲۱. چوبدستی به طول L و با جرم M روی سطح یک میز افقی بدون اصطکاک قرارگرفته است. این چوبدست را می‌توانیم آزادانه به هر سو که مایل باشیم به چرخش وابداریم. جسمی به جرم m که با سرعت v، مطابق شکل ۲۹، در حرکت است با چوبدست برخورد کشسان انجام می‌دهد. (الف) در این برخورد چه چیزی پایسته است؟ (ب) برای اینکه جسم بلافاصله پس از برخورد به حالت سکون در بیاید جرم آن، m، باید چقدر باشد؟



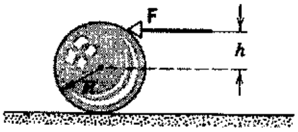
شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۱

۲۲. دو استوانه به شعاعهای R_1 و R_2 به‌ترتیب دارای لختی دورانی I_1 و I_2 هستند. این استوانه‌ها توسط محورهایی که برصفحهٔ شکل ۳۰ عمودند نگهداری می‌شوند. استوانهٔ بزرگتر در آغاز با سرعت زاویه‌ای ω_0 در حرکت است. استوانهٔ کوچکتر به‌سمت راست حرکت داده می‌شود تا با استوانهٔ بزرگتر تماس پیدا کند و به واسطهٔ اصطکاک با استوانه دیگر به دوران در بیاید. سرانجام لغزش به‌پایان می‌رسد و دو استوانه با آهنگهای ثابتی در جهتهای مخالف دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای نهایی، ω_2، استوانهٔ کوچکتر را برحسب I_1، I_2، R_1، R_2، و ω_0 پیدا کنید. (راهنمایی: تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی هیچ‌کدام پایسته نیستند. معادلهٔ ضربهٔ زاویه‌ای را در مورد هر یک از استوانه‌ها به‌کار بگیرید. نگاه کنید به مسئلهٔ ۹).



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۲

۲۳. به توپ بیلیاردی که در ابتدا ساکن است با چوب بیلیارد ضربه سریعی وارد می‌کنیم. چوب بیلیارد را، قبل از ضربه، به‌طور افقی در ارتفاع h بالای خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، مانند شکل ۳۱ نگه داشته‌ایم. توپ با سرعت v_0 از چوب جدا می‌شود و به خاطر "حرکت اسپینی به طرف جلو"، سرعت آن سرانجام به $9v_0/7$ می‌رسد. نشان بدهید که $h = 4R/5$ است (R شعاع توپ بیلیارد است).



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در مسئلهٔ ۲۳، فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$ به‌نقطه‌ای پایین‌تر از خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که با این "حرکت اسپینی به‌سوی عقب" غیرممکن است بتوان سرعت پیشروی را، بدون ایجاد غلتش به‌صفر کاهش داد، مگر اینکه $h = R$ باشد. (ب) نشان بدهید که ایجاد یک حرکت به‌سوی عقب درتوپ غیرممکن است مگر اینکه $\mathbf{F}$ یک مؤلفهٔ قائم به‌طرف پایین داشته باشد.

۲۵. یک بازیکن بولینگ توپ بولینگی به شعاع $R = 11.0\,\text{cm}$ را با سرعت اولیهٔ $v_0 = 8.50\,\text{m/s}$ در امتداد دالان پرتاب می‌کند. این توپ قبل از اینکه شروع به غلتیدن کند مسافت معینی را می‌لغزد. قبل از برخورد توپ با کف دالان، حرکت آن انتقالی محض است و هیچ چرخشی ندارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و کف دالان ۰٫۲۱۰ است. (الف) این توپ چه مدتی روی کف دالان می‌لغزد؟ (راهنمایی: در حین لغزش، سرعت v توپ کاهش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن افزایش می‌یابد؛ لغزش وقتی تمام می‌شود که $v = R\omega$ شود). (ب) چه مسافتی را با لغزش طی می‌کند؟ (ج) قبل از آغاز غلتش چند دور می‌زند؟ (د) وقتی شروع به غلتیدن می‌کند سرعت آن چقدر است؟

بخش ۱۳ـ۴ پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

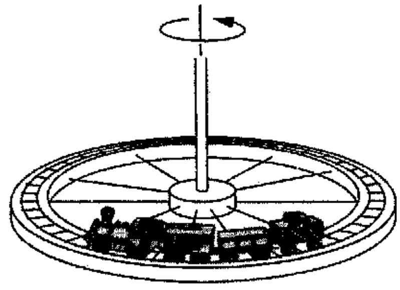
۲۶. مشاهدات اخترشناختی نشان می‌دهد که از سال ۱۸۷۰ تا سال ۱۹۰۰، طول مدت شبانه‌روز به مقدار تقریبی $6.0 \times 10^{-3}\,\text{s}$ افزایش پیدا کرده است. (الف) تغییر نسبی متناظر در سرعت زاویه‌ای زمین چقدر بوده است؟ (ب) فرض کنید این تغییر ناشی از تغییر ناشی از جابه‌جایی مواد گداخته در هستهٔ زمین بوده باشد. چه تغییر نسبی‌ای در لختی دورانی زمین می‌تواند پاسخ قسمت (الف) را توجیه کند؟

۲۷. فرض کنید خورشید با تمام شدن سوخت هسته‌ای‌اش ناگهان می‌رمبد و به‌یک کوتولهٔ سفید تبدیل می‌شود، و در این فرایند قطر آن برابر با قطر زمین می‌شود. اگر هیچ اتلاف جرمی در کار نباشد، دورهٔ تناوب چرخش خورشید که اکنون در حدود ۲۵ روز است چقدرخواهد شد؟ فرض کنید خورشید و کوتولهٔ سفید کره‌های یکنواختی باشند.

۲۸. شخصی روی سکوی بدون اصطکاکی که با سرعت $1.22\,\text{rev/s}$ دوران می‌کند ایستاده است؛ دستهایش رابه طرفین بازکرده و با هر کدام وزنه‌ای را نگه داشته است. وقتی دستهای او در چنین وضعیتی قرار دارند لختی دورانی کل شخص، وزنه‌ها، و سکو برابر

با ۱۳٫۶ $\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. اگر این شخص با جابه‌جا کردن دستهایش لختی دورانی را به ۱٫۹۷ $\mathrm{kg\cdot m^2}$ کاهش بدهد (الف) سرعت زاویه‌ای سکو چقدر خواهد شد و (ب) نسبت انرژی جنبشی فعلی به انرژی جنبشی اولیه چقدر است؟

۲۹. در یک نمایش کلاسی، ریلهای یک قطار اسباب‌بازی روی یک چرخ بزرگ نصب می‌شود. این چرخ می‌تواند (با اصطکاکی ناچیز) حول یک محور قائم به‌دوران بیاید (شکل ۳۲). قطار اسباب‌بازی به جرم m را روی ریلها قرار می‌دهیم. مجموعه در آغاز در حال سکون است. قطار را روشن می‌کنیم. سرعت قطار پس از مدتی به مقدار پایای v نسبت به مسیر می‌رسد. اگر جرم چرخ M و شعاع آن R باشد، سرعت زاویه‌ای‌اش، ω، چقدر است؟ (جرم پره‌های چرخ ناچیز است.)



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۹

۳۰. لختی دورانی چرخانهٔ یک موتور الکتریکی حول محور مرکزی‌اش برابر است با $I_m = 2.47 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. این موتور موازی با محور یک کاوهٔ فضایی نصب شده است. لختی دورانی کاوهٔ فضایی حول محورش برابر با $I_p = 12.6\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. تعداد دورهایی که باید موتور بچرخد تا کاوه را به‌اندازه ۲۵٫۰° حول محورش بچرخاند چقدر است؟

۳۱. چرخی که لختی دورانی آن ۱٫۲۷ $\mathrm{kg\cdot m^2}$ است با سرعت زاویه‌ای ۸۲۴ $\mathrm{rev/min}$ روی محوری با لختی دورانی ناچیز می‌چرخد. چرخ دیگری با لختی دورانی ۴٫۸۵ $\mathrm{kg\cdot m^2}$ که در ابتدا ساکن است، به‌طور ناگهانی به‌همان محور جفت می‌شود. (الف) سرعت زاویه‌ای نهایی مجموعهٔ محور و دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه به علت این جفت‌شدگی تلف می‌شود؟

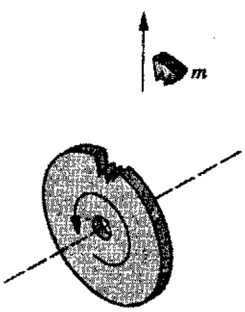
۳۲. شعاع چرخ دوچرخه‌ای با طوق نازک برابر با ۳۶٫۳ cm است. جرم توپی و پره‌های این چرخ قابل اغماض و جرم طوق آن ۳٫۶۶ kg است؛ این چرخ را می‌توان با اصطکاکی ناچیز حول محورش به‌چرخش درآورد. شخصی چرخ را طوری بالای سرش نگه داشته است که محور چرخ قائم است. این شخص روی یک گردونه ایستاده است که می‌تواند (بدون اصطکاک) دوران کند. اگر از بالا نگاه کنیم چرخ ساعتگرد می‌چرخد. گردونه در ابتدا ساکن است. سرعت زاویه‌ای اولیهٔ چرخ ۵۷٫۷ $\mathrm{rad/s}$ است. لختی دورانی چرخ + شخص + گردونه حول محور مشترکشان برابر با ۲٫۸۸ $\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. دست این شخص ناگهان چرخ را از چرخش (نسبت به گردونه) بازمی‌دارد. سرعت زاویه

و مقدار) سیستم را پیدا کنید. (ب) آزمایش را تکرار کنید، ولی این‌بار فرض می‌کنیم که اصطکاک محور چرخ قابل ملاحظه می‌باشد. چرخ با همان سرعت زاویه‌ای اولیه (۵۷٫۷ $\mathrm{rad/s}$) حرکت را آغاز می‌کند و به‌تدریج (نسبت به گردونه) متوقف می‌شود. این بار هم شخص چرخ را به همان صورت که در بالا توصیف شده نگه داشته است. (باز هم گردونه می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد.) چگونگی حرکت این سیستم را متناسب با اطلاعات داده شده به‌طور کمی توصیف کنید.

۳۳. جوانی به جرم ۵۰٫۶ kg روی لبهٔ یک چرخ‌وفلک افقی بدون اصطکاک به‌جرم ۸۲۷ kg و به‌شعاع ۳٫۷۲ m ایستاده است. چرخ‌وفلک حرکتی ندارد، این شخص سنگی به جرم ۱٫۱۳ kg را در امتداد افق و مماس با لبهٔ بیرونی چرخ‌وفلک پرتاب می‌کند. سرعت سنگ نسبت به‌زمین برابر با ۷٫۸۲ $\mathrm{m/s}$ است. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ‌وفلک و (ب) سرعت خطی شخص پس از پرتاب سنگ چقدر است؟ چرخ‌وفلک را به‌صورت یک قرص یکنواخت در نظر بگیرید.

۳۴. در مکان بازی بچه‌ها چرخ‌وفلک کوچکی به شعاع ۱٫۲۲ m و جرم ۱۷۶ kg نصب شده است. شعاع چرخش (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱۱ در فصل ۱۲) این چرخ‌وفلک ۹۱٫۶ cm است. نوجوانی به جرم ۴۴٫۳ kg با سرعت ۲٫۹۲ $\mathrm{m/s}$ مماس بر لبهٔ چرخ‌وفلک ساکن می‌دود و روی آن می‌پرد. فرض کنید اصطکاک بین یاتاقانها و محور چرخ‌وفلک ناچیز است. سرعت زاویه‌ای مجموعهٔ چرخ‌وفلک و نوجوان را تعیین کنید.

۳۵. یک قرص تخت یکنواخت به جرم M و شعاع R حول محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ تکانهٔ زاویه‌ای آن چقدر است؟ (ب) یک تکه به جرم m از لبهٔ قرص می‌شکند و در لحظه‌ای که از آن جدا می‌شود در راستای قائم به‌سمت بالا صعود می‌کند (شکل ۳۳). این تکه تا چه ارتفاعی از محل جداشدن بالاتر می‌رود؟ (ج) سرعت زاویه‌ای نهایی قرص شکسته شده چقدر است؟

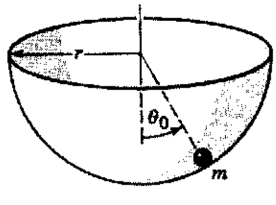


شکل ۳۳. مسئلهٔ ۳۵

۳۶. سوسکی به جرم m روی لبهٔ صفحهٔ گردندهٔ دایره‌ای شکلی به شعاع R و لختی دورانی I که می‌تواند بدون اصطکاک حول محور قائم بچرخد، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند. سرعت سوسک (نسبت به‌زمین) v است، در حالی که صفحه با سرعت زاویه‌ای ω در جهت ساعتگرد می‌چرخد. سوسک روی لبهٔ صفحه به ریزه‌نانی می‌رسد، و ... (الف) سرعت زاویه‌ای صفحه پس از توقف سوسک

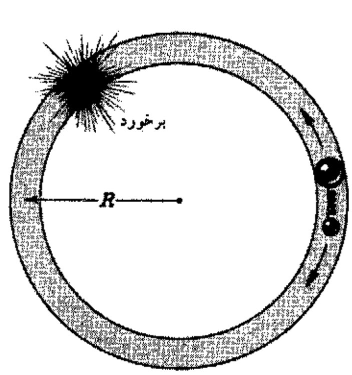
چقدر است؟ (ب) در این فرایند چقدر انرژی جنبشی تلف می‌شود.

۳۷. ذره‌ای به‌طور افقی روی سطح داخل یک جام نیمکره به شعاع r پرتاب می‌شود. جام را بی‌حرکت نگه داشته‌ایم (شکل ۳۴). می‌خواهیم سرعت اولیهٔ v_0 را چنان تعیین کنیم که ذره درست تا لبهٔ جام بالا برود. v_0 را به‌صورت تابعی از θ_0، مکان زاویه‌ای اولیهٔ ذره، تعیین کنید. (راهنمایی: از اصول پایستگی استفاده کنید.)



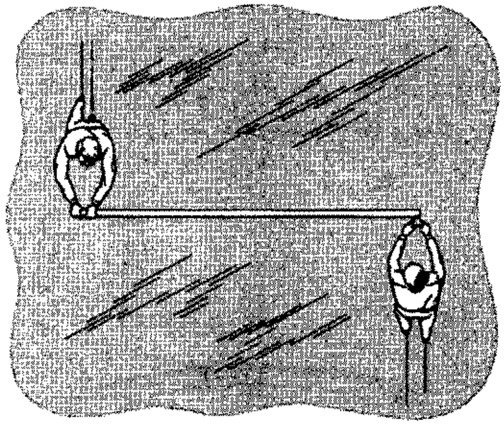
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. روی یک مسیر دایره‌ای افقی بدون اصطکاک به شعاع R، دو گوی کوچک به جرمهای m و M قرار گرفته‌اند که می‌توانند آزادانه روی مسیر بلغزند. بین دو گوی فنری فشرده شده است، ولی این فنر به گویها متصل نیست. دو گوی توسط ریسمانی به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر ریسمان پاره شود، فنر فشرده (که بدون جرم فرض می‌شود) دو گوی را در دو جهت مخالف شلیک می‌کند؛ و خودش همانجا باقی می‌ماند. گویها وقتی بار دیگر روی مسیر به هم می‌رسند برخورد می‌کنند (شکل ۳۵). این برخورد در کجا صورت می‌گیرد؟ جواب را به‌صورت زاویه‌ای که گوی M طی می‌کند، برحسب رادیان، بیان کنید. (ب) انرژی پتانسیلی که در آغاز در فنر ذخیره می‌شود U_0 است. زمان لازم برای وقوع برخورد پس از پاره شدن ریسمان چقدر است؟ (ج) فرض کنید برخورد کاملاً کشسان و رودررو است. گویها پس از اولین برخورد، مجدداً در کجا با هم برخورد می‌کنند؟



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۳۸

۳۹. دو اسکیت‌باز، که جرم هرکدام از آنها ۵۱٫۲kg است، در امتداد دو مسیر موازی به‌سوی یکدیگر در حرکت‌اند. فاصلهٔ بین دو مسیر ۲٫۹۲m است. سرعت این دو اسکیت‌باز مساوی و در جهتهای مخالف، و مقدار آن ۱٫۳۸m/s است. اسکیت‌باز اولی چوب پرچم بلند و سبکی به‌طول ۲٫۹۲m در دست دارد؛ دومی وقتی از کنار او می‌گذرد انتهای دیگر چوب را به‌دست می‌گیرد (شکل ۳۶). فرض کنید اصطکاک وجود ندارد. (الف) حرکت اسکیت‌بازها را پس از آنکه توسط چوب پرچم به هم مرتبط شدند به‌طورکمی توصیف‌کنید. (ب) دو اسکیت‌باز در امتداد چوب پرچم به‌هم نزدیک می‌شوند و فاصله‌شان را به ۰٫۹۴m کاهش می‌دهند. در این حالت سرعت زاویه‌ای آنها را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی سیستم را در قسمتهای (الف) و (ب) محاسبه کنید. اختلاف انرژی از کجا پدید می‌آید؟


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۳۹

۴۰. اگر یخهای قطبهای زمین آب می‌شد و به اقیانوسها می‌ریخت، عمق اقیانوسها حدوداً ۳۰ متر بیشتر می‌شد. این حادثه چه تأثیری در چرخش زمین می‌داشت؟ در صورت وقوع چنین حادثه‌ای طول شبانه‌روز، به تخمین، چقدر می‌شد؟ (در واقع نگرانیهایی ابراز شده است که گرم‌شدن جو زمین به‌علت آلودگیهای صنعتی ممکن است نهایتاً موجب ذوب‌شدن یخهای قطبی شود.)

۴۱. زمین در حدود ۴٫۵ میلیارد سال پیش، احتمالاً به‌صورت کره‌ای با چگالی کم‌وبیش یکنواخت به‌وجود آمده است. کمی بعد، گرمای ناشی از واپاشی عناصر پرتوزا سبب شده است که بخش اعظم زمین ذوب شود. به‌این ترتیب مواد سنگینتر به‌سمت مرکز زمین رفته و هستهٔ زمین را تشکیل داده‌اند. امروزه می‌توانیم زمین را چنین ترسیم کنیم که تشکیل شده است از یک هستهٔ مرکزی به شعاع ۳۵۷۰km و چگالی ۱۰٫۳g/cm³ که توسط "گوشته"ای با چگالی ۴٫۵۰g/cm³ که تا سطح زمین (تا شعاع ۶۳۷۰km) ادامه دارد احاطه شده است. از پوستهٔ زمین چشمپوشی می‌کنیم. تغییر نسبی در مدت شبانه‌روز، ناشی از شکل‌گیری هسته، چقدر بوده است؟

بخش ۱۳ـ۵ فرفرهٔ چرخان

۴۲. فرفره‌ای با سرعت زاویه‌ای ۲۸٫۶rev/s حول محوری که با امتداد قائم محل زاویهٔ ۳۴٫۰° می‌سازد، می‌چرخد. جرم این فرفره ۴۹۲g و لختی دورانی آن $5.12 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ است. مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۳٫۸۸cm از تکیه‌گاه قرار دارد. اگر از بالا به فرفره نگاه کنیم چرخش آن ساعتگرد است. مقدار (برحسب rev/s) و جهت سرعت

زاویه‌ای حرکت تقدیمی را تعیین کنید.

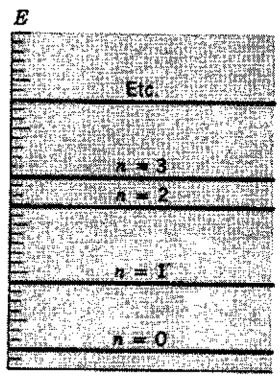
۴۳. ژیروسکوپی شامل یک قرص چرخان با شعاع ۴۸٫۷cm است که به‌دقت در وسط یک محور به طول ۱۲٫۲cm سوار شده است. این ژیروسکوپ می‌تواند آزادانه بچرخد و حرکت تقدیمی داشته باشد. سرعت چرخش آن ۹۷۵rev/min است. جرم قرص ۱٫۱۴kg و جرم محور ۱۳۰g است. اگر محور افقی و یک انتهای آن روی تکیه‌گاه باشد، زمان لازم برای انجام یک‌دور حرکت تقدیمی چقدر است؟

بخش ۱۳ـ۶ کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای

۴۴. در سال ۱۹۱۳ نیلس بور فرض کرد که تکانهٔ زاویه‌ای هر سیستم چرخندهٔ مکانیکی با لختی دورانی I، کوانتیده است. یعنی،

$$L = I\omega = n(h/2\pi)$$

که در آن L تکانهٔ زاویه‌ای و n هر عدد درست مثبت یا صفر است. (الف) نشان بدهید که این فرض ایجاب می‌کند که انرژی جنبشی هر سیستم چرخنده‌ای منحصر به مجموعه‌ای از اعداد گسسته باشد، یعنی انرژی کوانتیده است؛ عبارتی برای کوانتش انرژی به‌دست بیاورید. (ب) یک چرخندهٔ صلب، شامل ذره‌ای به جرم m را که مقید به دوران روی دایره‌ای به‌شعاع R است، در نظر بگیرید. اگر این فرض درست باشد، ذره چه سرعت زاویه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ انرژی جنبشی ذره چقدر است؟ (ج) یک نمودار تراز انرژی، مانند شکل ۳۷، رسم کنید و روی این نمودار نشان بدهید که فاصلهٔ بین ترازهای انرژی با افزایش n چگونه تغییر می‌کند. رفتار بعضی از مولکولهای دواتمی کم‌انرژی مانند یک چرخندهٔ صلب است.



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. (الف) فرض کنید در اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به‌دور پروتون می‌چرخد. نیروی مرکزگرای وارد بر الکترون را نیروی الکتریکی $e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ تأمین می‌کند، که در آن e مقدار بار یک الکترون یا یک پروتون است، r شعاع مدار است و ε_0 مقدار ثابتی است. نشان بدهید که شعاع مدار از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}$$

که در آن m جرم الکترون و v سرعت آن است. (ب) حالا فرض کنید که تکانهٔ زاویه‌ای الکترون حول پروتون فقط می‌تواند مضارب صحیح (n) $h/2\pi$ را اختیار کند، که درآن h ثابت پلانک است. نشان بدهید که در این‌صورت تنها مدارهای ممکن برای الکترون عبارت‌اند از مدارهایی با شعاع

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}$$

(ج) بین جوابهای قسمت (الف) و (ب) v را حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم شعاعهای تنها مدارهایی که با هر دو شرط سازگارند برابرند با

$$r = \frac{n^2 \varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

به‌این ترتیب شعاعهای مجاز با مربع اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، و الی‌آخر متناسب‌اند. به‌ازای $n = 1$ باشد، r کمترین مقدار را دارد که برابر است با $0.529 \times 10^{-10}\,\text{m}$.

پروژهٔ کامپیوتری

۴۶. فرض کنید دو چرخ‌لنگر که روی محور مشترکی سوار شده‌اند می‌توانند مستقل از یکدیگر بچرخند. لختی دورانی چرخ ۱، که در آغاز با سرعت زاویه‌ای ۱۰۰rad/s می‌چرخد برابر با $2.5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$، و لختی دورانی چرخ ۲، که در آغاز ساکن است برابر با $1.5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. با لغزاندن یک چرخ روی محور، چرخها در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، به هم گشتاور وارد می‌کنند و سرانجام به‌سرعت زاویه‌ای یکسانی می‌رسند. (الف) فرض کنید جز گشتاورهایی که چرخها به‌هم اعمال می‌کنند هیچ گشتاور دیگری وجود ندارد و با استفاده از اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای نهایی چرخها را معین کنید.

اگر بتوانیم گشتاور یک چرخ‌لنگر را روی چرخ دیگر حساب کنیم، می‌توانیم برای پیگیری حرکت چرخها که به یک سرعت مشترک می‌رسند از کامپیوتر استفاده کنیم. فرض کنید گشتاوری که چرخ ۲ به چرخ ۱ اعمال می‌کند با رابطهٔ $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$ بیان می‌شود، که در آن ω_1 سرعت زاویه‌ای چرخ ۱ و ω_2 سرعت زاویه‌ای چرخ ۲ است. τ_1 برحسب $\text{N}\cdot\text{m}$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب rad/s بیان شده‌اند. گشتاور چرخ ۱ روی چرخ ۲ برابر است با $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. گشتاورها تا وقتی‌که سرعتهای زاویه‌ای چرخها یکسان شوند بر آنها وارد می‌شوند. در ضمن برهم‌کنش چرخها، چرخ ۱ از $\tau_1 = I_1\alpha_1$ و چرخ ۲ از $\tau_2 = I_2\alpha_2$ پیروی می‌کند. این معادلات از نظر ریاضی مشابه معادلات مربوط به‌قانون دوم نیوتون هستند و می‌توان به روش عددی به‌ترتیبی که در بخش ۶ـ۶ و پروژه‌های کامپیوتری در پایان بخش ۶ توصیف شد انتگرال گرفت. بازه‌های زمانی به‌مدت Δt را در نظر بگیرید و فرض کنید که چرخ ۱، در آغاز یک بازهٔ زمانی، زاویه‌ای θ_{1b} و سرعت زاویه‌ای آن ω_{1b} باشد. در این‌صورت مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای این چرخ در پایان بازهٔ زمانی، با تقریب، به‌صورت $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b}\Delta t$ و

روابط $\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b}\Delta t = \omega_{1b} + (\tau_1 b/I_1)\Delta t$ نوشت، که در این τ_{1b} گشتاور وارد بر چرخ ۱ در آغاز این بازهٔ زمانی است. روابط مشابهی هم برای چرخ ۲ برقرار است. هر چه بازهٔ Δt کوچکتر باشد، تقریب انجام شده تقریب بهتری است.

(ب) سرعت زاویه‌ای چرخها را در پایان هر ثانیه در مدت زمان $t = ۰$ تا $t = ۲۵\text{s}$ با نوشتن یک برنامهٔ کامپیوتری یا با استفاده از یک فهرست برای این منظور، محاسبه کنید. بازهٔ انتگرال‌گیری را $۰٫۰۰۱\text{s}$ بگیرید. سرعتهای زاویه‌ای را به‌صورت تابعهایی از زمان روی یک نمودار رسم کنید، سپس با استفاده از نمودار یا فهرست، مقادیر سرعتهای زاویه‌ای نهایی را تعیین کنید و جوابهای حاصل را با مقادیر به‌دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

(ج) برای اینکه تأثیر یک گشتاور خارجی را ببینید، فرض کنید گشتاور وارد بر چرخ ۱ به‌صورت $\tau_1 = -۴٫۰ - ۰٫۲۰(\omega_1 - \omega_2)$ و گشتاور وارد بر چرخ ۲ به‌صورت $\tau_2 = +۰٫۲۰(\omega_1 - \omega_2)$ است، که در آن گشتاورها برحسب $\text{N}\cdot\text{m}$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب rad/s اند. این روابط حاکی از یک گشتاور خارجی برابر با $-۴٫۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ است. با بهره‌گیری از برنامهٔ کامپیوتری‌تان، سرعتهای زاویه‌ای چرخها و تکانهٔ زاویه‌ای کل را در پایان بازه‌های زمانی ۱ ثانیه‌ای از $t = ۰$ تا $t = ۲۵\text{s}$ تعیین کنید. اینجا هم بازه‌های انتگرال‌گیری را $۰٫۰۰۱\text{s}$ اختیار کنید. سرعتهای زاویه‌ای را به‌صورت توابع زمانی رسم کنید. چون $\tau_{\text{ext}} = dL_{\text{total}}/dt$ است، گشتاور خارجی باید در مدت ۲۵ ثانیه اول سبب ایجاد تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل به‌اندازهٔ $\Delta L = \tau_{\text{ext}}\Delta t = -۴٫۰ \times ۲۵ = -۱۰۰\text{kg}\cdot\text{m/s}$ شود. آیا جواب شما با این مقدار همخوانی دارد؟ کدام چرخ متحمل این تغییر تکانه می‌شود (این مورد را با وقتی که گشتاور نیروی خارجی در کار نیست مقایسه کنید)؟ یا شاید هر دو چرخ در آن سهیم‌اند؟

(د) سرعت زاویه‌ای نهایی به چگونگی اعمال گشتاور از یک چرخ به چرخ دیگر بستگی ندارد. چه کمیتی به گشتاور نیروها بستگی دارد؟

۱۴

شرایط تعادل

برجهای نگهدارندهٔ یک پل معلق باید به‌قدر کافی مستحکم باشند تا زیر سنگینی پل و بار رفت‌وآمد روی آن فرو نریزند؛ سیستم فرود هواپیمایی که کمی ناجور به زمین می‌نشیند نباید به‌راحتی صدمهٔ شدید ببیند؛ صندلی نباید با نشستن کسی بشکند یا واژگون شود. طراحان همهٔ این چیزها سعی‌شان بر این است که این ساختارهای صلب، زیر بار نیروها و گشتاورهایی که به آنها واردمی‌شوند هم واقعاً صلب بمانند.

در چنین مسائلی دو سؤال مطرح است که باید به آنها جواب داد: ۱. چه نیروها و گشتاورهایی به جسم صلب اثر می‌کنند؟ ۲. با در نظر گرفتن طرح و مواد ساختمانی، آیا این اجسام، زیربار این نیروها و گشتاورها، همچنان صلب خواهند ماند؟ در این فصل به‌طور مشروح به سؤال اول خواهیم پرداخت. پاسخ به سؤال دوم مستلزم آشنایی کافی با خواص مواد است، و بررسی کامل آن در حیطهٔ مباحث این کتاب نیست؛ در این باره به بحث کوتاهی در بخش آخر همین فصل اکتفا کرده‌ایم.

۱۴ـ۱ شرایط تعادل

یک جسم صلب، مانند یک صندلی، یک پل، یا یک ساختمان، در صورتی در تعادل مکانیکی است که، اگر آن را از یک چارچوب مرجع لخت مشاهده کنیم، هم تکانهٔ خطی $\mathbf{P}$ و هم تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$اش ثابت باشند. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که هم شتاب خطی مرکز جرم $\mathbf{a}_{\text{cm}}$ و هم شتاب زاویه‌ای α حول هرمحور ثابتی در چارچوب مرجع صفر است.

این تعریف از تعادل مکانیکی ایجاب نمی‌کند که جسم حتماً در حال سکون باشد؛ یعنی، بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{L}$ الزاماً صفر نیستند. اگر این بردارها صفر باشند (به‌عبارت دیگر اگر سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای ω حول هرمحور واقع در چارچوب مرجع صفر باشند)، جسم در تعادل استاتیکی است.

در این فصل محدودیتهایی را جستجو می‌کنیم که باید بر نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم اعمال کرد تا شرط تعادل برقرار شود. بیشتر به تعادل استاتیکی خواهیم پرداخت، ولی خواهیم دید اعم از اینکه تعادل استاتیکی باشد یا نه، همین محدودیتها برقرارند.

حرکت انتقالی مرکز جرم یک جسم صلب از معادلهٔ ۲۷ فصل ۹، یعنی از

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ برایند تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم است. اگر $\mathbf{P}$ هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، باشد در آن‌صورت داریم $d\mathbf{P}/dt = ۰$. به‌این ترتیب اولین شرط تعادل این است: جمع برداری تمام نیروهای وارد بر جسم باید برابر صفر باشد، یا

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = ۰ \qquad (۱)$$

این معادلهٔ برداری هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر است:

$$\sum F_x = ۰, \quad \sum F_y = ۰, \quad \sum F_z = ۰ \qquad (۲)$$

که در این روابط برای سهولت شاخص " ext " را از F_{ext} حذف کرده‌ایم. معادلات ۱ و ۲ حاکی از آن‌اند که برایند مؤلفه‌های نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به‌دو متعامدی، برابر صفر است.

حرکت دورانی یک جسم صلب از معادلهٔ ۸ فصل ۱۳، یعنی از

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ برایند تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم است. اگر $\mathbf{L}$ هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، را اختیارکند، در آن‌صورت داریم $d\mathbf{L}/dt = ۰$. به‌این ترتیب دومین شرط تعادل چنین است: جمع برداری تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم باید برابر صفر شود، یا

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = ۰ \qquad (۳)$$

این معادلهٔ برداری را می‌توانیم به‌صورت سه معادلهٔ اسکالر بنویسیم (باز هم شاخص " ext " را حذف می‌کنیم)

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0 \qquad (۴)$$

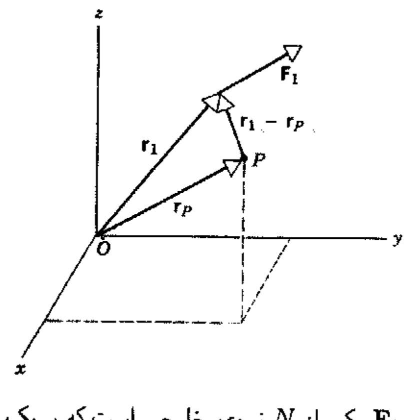
روابط فوق حاکی از آنند که، در حالت تعادل، برایند مؤلفه‌های گشتاور نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به‌دو متعامدی، برابر صفر است.

شرط دوم تعادل به انتخاب مبدأ و محورهای مختصاتی که برای محاسبهٔ مؤلفه‌های گشتاورها به‌کار می‌روند بستگی ندارد. اگر گشتاور کل برابر با صفر باشد، مؤلفه‌های آن برای هر مجموعه‌ای از محورهای x، y، و z صفر است. بعلاوه، برای یک جسم در حال تعادل، انتخاب مبدأ مختصات برای محاسبهٔ گشتاورها اهمیتی ندارد و برحسب مورد می‌توان هر نقطهٔ راحت یا مناسبی را انتخاب کرد؛ اگر حول یک مبدأ مشخص O داشته باشیم $\tau = 0$، در آن صورت گشتاور وارد بر جسم در حال تعادل حول هر نقطهٔ دیگری از چارچوب مرجع هم صفر است.

حالا این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید N نیروی خارجی به‌جسمی وارد شود. نسبت به مبدأ مختصات O، نیروی $\mathbf{F}_1$ به نقطه‌ای در مکان $\mathbf{r}_1$ وارد می‌شود، $\mathbf{F}_2$ به $\mathbf{r}_2$ و الی‌آخر. بنابراین گشتاور خالص حول نقطهٔ O برابر است با

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N \qquad (۵)\end{aligned}$$

نقطه‌ای مانند P را در نظر بگیرید که نسبت به O در مکان $\mathbf{r}_P$ قرار گرفته است (شکل ۱). نقطهٔ اثر نیروی $\mathbf{F}_1$، نسبت به نقطهٔ P، عبارت از $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P)$ است. گشتاور کل حول نقطهٔ P برابر است با



شکل۱. نیروی $\mathbf{F}_1$ یکی از N نیروی خارجی است که بر یک جسم صلب (که در شکل نشان داده نشده است) اثر می‌کند. بردار $\mathbf{r}_1$ مکان نقطهٔ اثر نیروی $\mathbf{F}_1$ را نسبت به O مشخص می‌کند. از این بردار برای محاسبهٔ گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ حول O استفاده می‌کنیم. از بردار $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P$ برای محاسبهٔ گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ حول P استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\tau_P =& (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 \\ &+ \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_N \\ =& [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N] \\ &- [\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_N]\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشهٔ اول، بنابر معادلهٔ ۵، τ_0 را به‌دست می‌دهد. عبارت داخل کروشهٔ دوم را می‌توانیم با فاکتورگیری از عامل ثابت $\mathbf{r}_P$ بازنویسی کنیم و در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_0 - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N)] \\ &= \tau_0 - \left[\mathbf{r}_P \times \left(\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}\right)\right] \\ &= \tau_0\end{aligned}$$

تساوی آخر را به این دلیل نوشتیم که برای هر جسمی که در تعادل انتقالی باشد $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است. به‌این ترتیب برای هر جسم در حال تعادل انتقالی گشتاور نیرو حول هر دو نقطه‌ای که اختیار کنیم مقدار یکسانی دارد.

اغلب با مسائلی سروکار داریم که در آنها همهٔ نیروها در یک صفحه واقع می‌شوند. در چنین مواردی شش شرط مربوط به‌معادله‌های ۲ و ۴ به سه شرط کاهش می‌یابد. اینجا نیروها را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \qquad (۶)$$

و اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که آن هم در صفحهٔ xy باشد محاسبه کنیم، همهٔ گشتاورها در راستای عمود بر صفحهٔ xy قرار می‌گیرند. در این مورد داریم

$$\sum \tau_z = 0 \qquad (۷)$$

بررسی را به مسائل مربوط به نیروهای واقع در یک صفحه محدود می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر باشد؛ این شرط هیچ‌گونه محدودیت بنیادی درکاربرد اصول کلی تعادل ایجاب نمی‌کند.

۱۴ـ۲ گرانیگاه

یکی از نیروهایی که در دینامیک جسم صلب با آن مواجه می‌شویم نیروی گرانشی است، که وزن جسم را تعیین می‌کند. قبلاً برای جسمی به جرم M این نیرو را (بدون هیچ توجیهی) به‌صورت تک‌بردار $M\mathbf{g}$ که در مرکز جرم وارد می‌شود، نمایش داده‌ایم. در اینجا این اقدام را توجیه می‌کنیم و شرایطی راکه در آن چنین کاری مجاز است توضیح می‌دهیم.

وزن یک جسم گسترده در واقع برایند تعداد بسیار زیادی نیروست، که از گرانش به هر یک از ذرات آن وارد می‌شود. یعنی، می‌توانیم به‌جای جمع برداری تمام نیروهای گرانشی وارد برتمام ذرات یک جسم،

وزن آن جسم را قرار بدهیم. به‌علاوه، به‌جای برایند خالص گشتاورهای گرانشی وارد بر همهٔ ذرات می‌توانیم گشتاور ناشی از این تک‌نیرو (وزن) را بگذاریم، مشروط بر اینکه فرض کنیم این نیرو به نقطه‌ای از جسم به‌نام گرانیگاه وارد می‌شود.

اگر شتاب گرانشی $\mathbf{g}$ در تمام نقاط جسم مقدار ثابتی داشته باشد، که در تمام مواردی که عملاً با آنها سروکار داریم واقعیت دارد، می‌توانیم این ساده‌سازیها را اعمال کنیم: (۱) وزن جسم برابر با $M\mathbf{g}$ است و گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند. حالا می‌خواهیم نتایج بالا را اثبات کنیم.

فرض کنید جسمی با جرم M را به‌تعداد بسیار زیادی ذره تقسیم کرده‌ایم. نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به ذرهٔ iام، با جرم m_i، برابر است با $m_i\mathbf{g}$. این نیرو به‌سوی پایین و به سمت مرکز زمین است. نیروی خالص ناشی از گرانی وارد بر کل جسم برابر است با مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک ذرات، با

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{g} \qquad (۸)$$

چون فرض کرده‌ایم که $\mathbf{g}$ برای تمام ذرات جسم مقدار واحدی دارد، می‌توانیم از $\mathbf{g}$ در علامت مجموع در معادلهٔ ۸ به‌عنوان عامل مشترک فاکتور بگیریم، و در این‌صورت داریم

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{g} \sum m_i = M\mathbf{g} \qquad (۹)$$

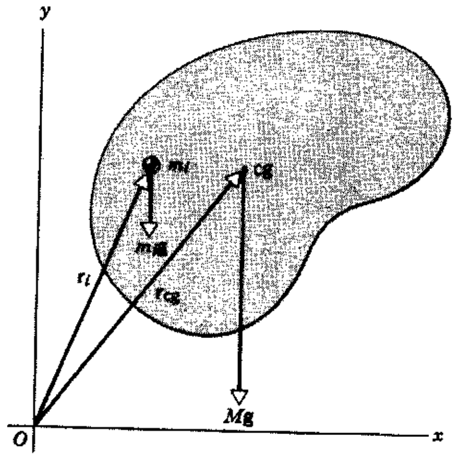
این نتیجه اثبات اولین عبارتی است که در بالا اظهار شد، یعنی به‌جای برایند نیروهای گرانشی وارد بر کل جسم می‌توان تک‌نیروی $M\mathbf{g}$ را گذاشت.

حالا می‌خواهیم شرط گشتاور نیرو، یعنی معادلهٔ ۳، را به‌کار ببریم و گشتاورها را حول نقطهٔ دلبخواه O، آن‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، تعیین کنیم. بردار $\mathbf{r}_i$ موقعیت ذره‌ای به جرم m_i را نسبت به این مبدأ مشخص می‌کند. گشتاور برایند ناشی از نیروی گرانش وارد بر تمام ذرات حول این نقطه برابر است با

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \sum(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}) = \sum(m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{g}) \qquad (۱۰)$$

که تساوی آخر را با جابه‌جا کردن کمیت اسکالر m_i در داخل مجموع به‌دست آوردیم. اینجا هم از ثابت بودن $\mathbf{g}$ استفاده می‌کنیم و آن‌را از زیر علامت جمع درمی‌آوریم، و توجه می‌کنیم که ترتیب بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{g}$ عوض نشود، یعنی علامت حاصل‌ضرب خارجی تغییر نکند. بنابر معادلهٔ ۱۲ از فصل ۹، باقی‌ماندهٔ مجموع، یعنی $\sum m_i\mathbf{r}_i$، درست همان $M\mathbf{r}_{cm}$ است. بردار $\mathbf{r}_{cm}$ برداری است که مکان مرکز جرم جسم را نسبت به مبدأ O مشخص می‌کند. با انجام این عملیات معادلهٔ ۱۰ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g} \qquad (۱۱)$$

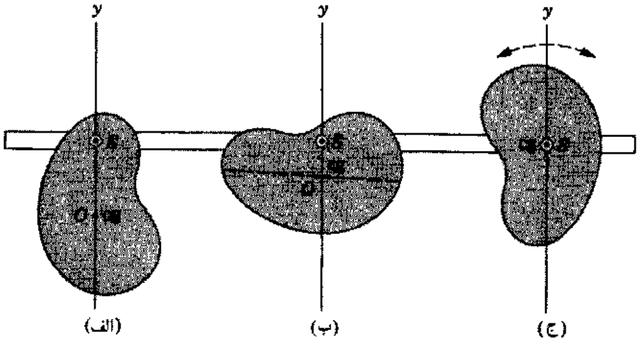


شکل۲. هر ذره‌ای از جسم، مانند m_i، تحت تأثیر یک نیروی گرانشی مانند $m_i\mathbf{g}$ قرار می‌گیرد. با آنکه وزن کل جسم در سرتاسر حجم آن به‌صورت مجموع نیروهای گرانشی وارد بر تمام چنین ذراتی توزیع شده است، می‌توان به‌جای آن یک تک‌نیرو به‌مقدار $M\mathbf{g}$ که در گرانیگاه وارد می‌شود در نظر گرفت. اگر میدان گرانشی یکنواخت باشد (یعنی، برای همهٔ ذرات جسم یکسان باشد) گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق می‌شوند، و بنابراین $\mathbf{r}_{cm}$ و $\mathbf{r}_{cg}$ یکی هستند.

به‌این ترتیب برایند گشتاورهای وارد بر جسم برابر است با گشتاوری که از تک‌نیروی $M\mathbf{g}$ وارد بر مرکز جرم جسم ایجاد می‌شود. به این‌ترتیب گرانیگاه و مرکز جرم جسم بر هم منطبق می‌شوند و بنابراین دومین عبارتی که در بالا اظهار کردیم اثبات می‌شود. یک نتیجهٔ مفید معادلهٔ ۱۱ آن است که گشتاور ناشی از گرانی حول مرکز جرم جسم صفر است.

در چه شرایطی یک جسم در میدان گرانشی زمین در حال تعادل است؟ معادلات ۹ و ۱۱ نشان می‌دهند که، اگر یک نیروی $\mathbf{F}'$ به‌مقدار $M\mathbf{g}$ در جهت بالا به مرکز جرم وارد شود، هم نیروی خالص و هم گشتاور خالص وارد بر جسم صفر خواهد شد و به‌این ترتیب شرایط تعادل برقرار است. در واقع نیروی $\mathbf{F}'$ در هر نقطه‌ای از خط قائم گذرنده از مرکز جرم هم به جسم وارد شود، باز جسم در حال تعادل خواهد بود. در این مورد گشتاور خالص برابر با صفر است، زیرا $M\mathbf{g}$ و $\mathbf{F}'(= -M\mathbf{g})$ خط اثرشان یکی است. بنابراین می‌توانیم هر جسم را با اعمال یک نیروی قائم F' نه فقط به مرکز جرم، بلکه به هر نقطه‌ای مستقیماً در پایین یا در بالای مرکز جرم، به تعادل دربیاوریم.

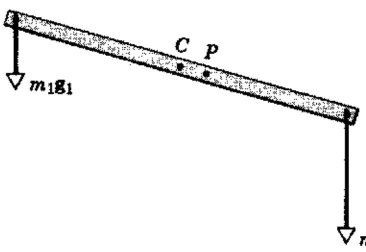
از این خاصیت می‌توانیم برای تعیین مرکز جرم اجسام گسترده استفاده کنیم. جسمی به شکل دلبخواه را در نظر بگیرید که از نقطهٔ S آویخته شده است (شکل ۳) نقطهٔ آویز، که در آن نیروی $\mathbf{F}' = -M\mathbf{g}$ به‌طرف بالا به جسم اعمال می‌شود، باید روی خط قائمی باشد که از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر خط قائمی را که از S می‌گذرد رسم کنیم، می‌دانیم که مرکز جرم باید جایی روی این خط باشد. این کار را می‌توانیم با انتخاب یک نقطهٔ آویز دیگر تکرار کنیم (شکل ۳ب) و به‌این ترتیب خط دیگری به‌دست می‌آوریم که آن هم شامل مرکز جرم است روشن است که مرکز جرم جسم باید در محل تلاقی این دو خط باشد



شکل۳. جسمی از نقطهٔ دلبخواه S آویخته شده است، اگر مانند قسمتهای (الف) و (ب) گرانیگاه (cg) جسم مستقیماً در زیر نقطهٔ آویز S قرار داشته باشد، در آن‌صورت جسم در حال تعادل پایدار است. خط‌چین در شکل (ب) همان خط قائم شکل (الف) است و نشان می‌دهد که گرانیگاه جسم را می‌توان با آویختن آن از دو نقطهٔ متفاوت مشخص کرد. (ج) اگر جسم از گرانیگاه آویخته شود، همواره در تعادل است و فرقی هم نمی‌کند که به کدام سمت قرار گرفته باشد.

اگر جسم را، مانند شکل ۳ج، از مرکز جرمش بیاویزیم، به هرسمتی هم که قرارش بدهیم، همواره در حال تعادل است. یعنی آن‌را هر طوری هم که بچرخانیم، باز در حال تعادل می‌ماند. این مشاهده گویای همان نتیجه‌ای است که از معادلهٔ ۱۱ حاصل می‌شود: گشتاور نیروی گرانی حول مرکز جرم صفر است.

در این بخش "مرکز جرم" و "گرانیگاه" را به‌جای یکدیگر هم به‌کار بردیم. مرکز جرم برای همهٔ اجسام تعریف می‌شود و می‌توان، با روشهای توصیف شده در فصل ۹، آن‌را از روی ابعاد و شکل جسم محاسبه کرد. اما گرانیگاه فقط برای اجسامی که در میدان گرانشی قرار دارند تعریف می‌شود. برای محاسبهٔ گرانیگاه نه تنها باید شکل هندسی جسم را با تمام جزئیات بشناسیم، بلکه باید چگونگی تغییرات $\mathbf{g}$ را هم در سراسر جسم بدانیم. اگر $\mathbf{g}$ در تمام جسم ثابت نباشد، مرکز جرم و گرانیگاه بر هم منطبق نیستند و نمی‌توان $\mathbf{g}$ را از زیر علامت مجموع در معادلات ۸ و ۱۰ بیرون آورد. میلهٔ یکنواخت شکل ۴ را در نظر بگیرید که محورش با افق زاویهٔ غیرصفر می‌سازد. مرکز جرم C میله در مرکز هندسی آن قرار دارد. اگر میله افقی قرار می‌گرفت، گرانیگاه P آن بر مرکز جرمش منطبق می‌بود؛ یعنی تک‌نیروی $\mathbf{F}'$ (به‌بزرگی Mg) که



شکل۴. میلهٔ یکنواخت در میدان گرانشی غیریکنواخت. گرانیگاه در نقطهٔ P است، که بر مرکز جرم (C) منطبق نیست.

در نقطهٔ C به‌طرف بالا به جسم اعمال می‌شود می‌توانست جسم را در تعادل نگه دارد. اگر میله افقی قرار نگیرد دیگر با تک‌نیروی اعمال شده در C نمی‌توان آن‌را متعادل کرد. از آنجا که g با دور شدن از زمین اندکی کاهش پیدا می‌کند، به ذره‌ای که در انتهای پایینی میله قرار دارد جاذبهٔ گرانشی بیشتری وارد می‌شود تا به ذرهٔ کاملاً مشابهی که در انتهای بالایی واقع است برای جبران این تمایل به چرخش ساعتگرد حول C، گرانیگاه P (محل اعمال نیروی رو به بالای متعادل‌کننده) باید اندکی پایین‌تر از C قرار بگیرد. اگر زاویهٔ میل تغییر کند، محل P هم تغییر می‌کند. اگر میله را به‌جایی ببریم که مقدار g دیگری داشته باشد، رابطهٔ بین P و C برای یک زاویه میل معین تغییر خواهد کرد. به‌این ترتیب گرانیگاه نه تنها به‌سمتگیری جسم بستگی دارد بلکه به میدان گرانشی در محل نیز وابسته است. برای میله‌ای که در نزدیکی سطح زمین باشد و با افق زاویهٔ $45°$ بسازد، فاصلهٔ بین مرکز جرم و گرانیگاه در حدود 18nm است، که این مقدار بسیار کوچکتر از دقتی است که ما در مسائل مربوط به تعادل با آن سروکار داریم و بنابراین کاملاً قابل اغماض است. در مسائل مربوط به تعادل، بی‌هیچ دغدغهٔ خاطری می‌توانیم فرض کنیم که گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند.

۱۴ـ۳ مثالهایی از تعادل

در استفاده از شرایط تعادل (برایند نیروها صفر و برایند گشتاورها حول هر نقطه‌ای صفر) می‌توانیم مراحل کار را به‌صورت زیر روشن و ساده کنیم.

اول، یک مرز فرضی در اطراف سیستم مورد نظر رسم می‌کنیم. این‌کار به ما کمک می‌کند که بدانیم قوانین تعادل را در مورد کدام جسم یا سیستمی از اجسام اعمال می‌کنیم. به این فرایند منزوی کردن سیستم می‌گوییم.

دوم، بردارهایی را که نشاندهندهٔ مقدار، جهت، و نقطه اثر تمام نیروهای خارجی هستند رسم می‌کنیم. نیروی خارجی نیرویی است که از خارج مرزی که قبلاً مشخص کرده‌ایم اثر می‌کند. نیروهای خارجی‌ای که معمولاً با آنها مواجه می‌شویم عبارت‌اند از نیروهای گرانشی و نیروهایی که توسط ریسمانها، سیمها، یا میله‌هایی که مرز را قطع می‌کنند اعمال می‌شوند. توجه داشته باشید که فقط باید به نیروهای خارجی وارد بر سیستم توجه کنیم؛ تمام نیروهای داخلی دو به دو همدیگر را خنثی می‌کنند.

مواردی پیش می‌آید که در آنها جهت یک نیرو ممکن است خوب مشخص نباشد. برای اینکه جهت نیرویی را تعیین کنیم، ارتباط عامل اعمال نیرو را در نقطه‌ای که از مرز سیستم می‌گذرد به‌طور فرضی قطع می‌کنیم. اگر دو سر این برش از هم دور شوند، در آن‌صورت نیرو به‌طرف بیرون است. اگر در این مورد شک دارید، یک جهت دلبخواه اختیار کنید. به‌دست آوردن جواب منفی برای یک نیرو به‌این معنی است که آن نیرو در خلاف جهت مفروض است.

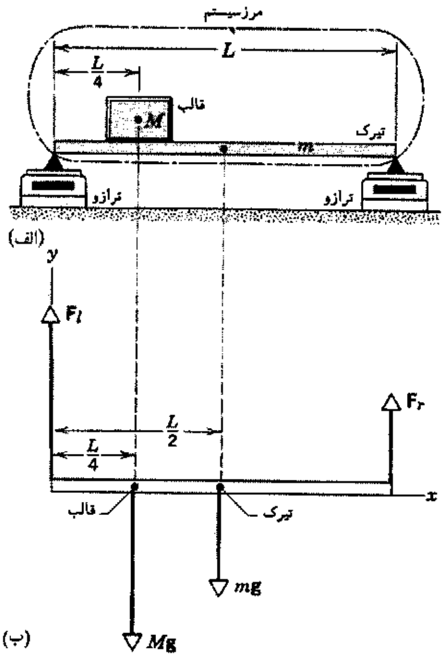
سوم، قبل از اینکه شرط اول تعادل (معادلات ۱ و ۲) را به‌کار ببریم

یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می‌کنیم و نیروهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. هدف این است که محاسبات را ساده کنیم. بهتر است چنان دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم که در آن تعداد نیروهایی که باید به مؤلفه‌ها تجزیه شوند به حداقل برسد.

چهارم، قبل از اینکه شرط دوم تعادل (معادلات ۳ و ۴) را به‌کار ببریم یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می‌کنیم و گشتاورهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. باز هم هدف ساده‌کردن محاسبات است و در اعمال کردن دو شرط تعادل استاتیکی، در صورتی که ببینیم کارساده‌تر می‌شود، می‌توانیم از دو دستگاه مختصات متفاوت استفاده کنیم. مثلاً اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که از آن چند نیرو می‌گذرد در نظر بگیریم، تمام آن نیروها از معادلهٔ گشتاور حذف می‌شوند.

در وضعیت تعادل، گشتاورهای حاصل از تمام نیروهای خارجی باید حول هر محوری صفر باشد. گشتاورهای داخلی دو به‌دو همدیگر را خنثی می‌کنند و نیازی به در نظر گرفتن آنها نداریم. در اینجا هم از همان قرارداد فصلهای قبل در مورد علامت جبری گشتاور حول هر محور مشخص پیروی می‌کنیم: گشتاور را وقتی سبب ایجاد چرخش پادساعتگرد حول محور شود مثبت می‌گیریم.

مثال ۱. تیرک یکنواختی به‌طول L و جرم $m = ۱٫۸\mathrm{kg}$ در اختیار داریم. دو سر آن‌را روی دو ترازوی رقمی قرار می‌دهیم (شکل ۵الف). قالبی به جرم $M = ۲٫۷\mathrm{kg}$ را روی این تیرک گذاشته‌ایم، به‌طوری که مرکز قالب در فاصلهٔ یک‌چهارم طول تیرک از انتهای چپ تیرک واقع شده است. ترازوها چه ارقامی را نشان می‌دهند؟



شکل۵. مثال ۱. (الف) قالبی به جرم M روی تیرکی به جرم m قرار گرفته است. ترازوهای رقمی نیروهای قائمی را که به دو سر تیرک وارد می‌شود نشان می‌دهند. (ب) نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر سیستم متشکل از تیرک و قالب.

حل: سیستم را متشکل از تیرک و قالب در نظر می‌گیریم. شکل ۵ب نمودار جسم آزاد این سیستم است که تمام نیروهای خارجی وارد بر آن‌را نشان می‌دهد. وزن تیرک، $m\mathbf{g}$، به طرف پایین در مرکز جرم اثر می‌کند. چون تیرک یکنواخت است مرکز جرم آن در مرکز هندسی‌اش واقع می‌شود. وزن قالب، $M\mathbf{g}$، هم به طرف پایین است و به مرکز جرم‌قالب وارد می‌شود. ترازوها دو سر تیرک را با نیروهای $\mathbf{F}_l$ و $\mathbf{F}_r$ به‌طرف بالا می‌فشارند. مقادیر این دو نیرو همان ارقامی است که ترازوها نشان می‌دهند و ما باید پیدایشان کنیم.

این سیستم در تعادل استاتیکی است و بنابراین می‌توانیم معادلهٔ موازنهٔ نیروها (معادلهٔ ۶) و معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها (معادلهٔ ۷) را به‌کار بگیریم. این مسئله را از دو راه هم‌ارز حل می‌کنیم.

۱. راه‌حل اول. هیچ یک از نیروها مؤلفهٔ x ندارند و بنابراین شرط $\sum F_x = ۰$ هیچ اطلاعاتی به‌دست نمی‌دهد. برای مؤلفه‌های y، داریم

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = ۰ \qquad (۱۲)$$

در اینجا دو نیروی مجهول داریم که نمی‌توانیم هر دو را از همین یک معادله تعیین کنیم. خوشبختانه یک معادلهٔ دیگر، یعنی معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها (معادلهٔ ۷) را هم در اختیار داریم.

می‌توانیم معادلهٔ ۷ را در مورد هر محوری که بر صفحهٔ شکل ۵ عمود باشد به‌کار بگیریم. اگر محوری را که از انتهای چپ تیرک می‌گذرد اختیار کنیم، نیروی مجهول F_l از معادلهٔ گشتاورها حذف می‌شود. در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_l)(۰) + (F_r)(L) - (mg)(L/۲) - (Mg)(L/۴) = ۰ \qquad (۱۳)$$

یا

$$F_r = (g/۴)(M + ۲m)$$
$$= \left(\frac{۱}{۴}\right)(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})[۲٫۷\mathrm{kg} + ۲(۱٫۸\mathrm{kg})] = ۱۵\mathrm{N}$$

توجه کنید که چگونه با این محوری که انتخاب کردیم نیروی F_l از معادلهٔ گشتاور حذف شد و این امکان فراهم آمد که معادله را مستقیماً برای نیروی دیگر حل کنیم. اگر گشتاورها را حول هر نقطهٔ دلبخواهی محاسبه می‌کردیم معادله‌ای به‌دست می‌آمد که شامل F_l و F_r بود و می‌شد آن‌را همزمان با معادلهٔ ۱۲ حل کرد. انتخاب محور مناسب کمک می‌کند که جبر مسئله را تا حدودی ساده کنیم، ولی به هیچ‌وجه جواب نهایی را تغییر نمی‌دهد.

اگر مقدار F_r را در معادلهٔ ۱۲ بگذاریم و آن‌را برای F_l حل کنیم، خواهیم داشت

$$F_l = (M+m)g - F_r$$
$$= (\text{۲٫۷kg} + \text{۱٫۸kg})(\text{۹٫۸m/s}^{\text{۲}}) - \text{۱۵N} = \text{۲۹N}$$

توجه کنید که ارتفاع مرکز جرم قالب در محاسبات این مسئله دخالتی ندارد. آیا این از نظر فیزیکی منطقی است؟

۲. راه‌حل دوم. حالا مسئله را از راه دیگری حل می‌کنیم تا صحت جوابها را امتحان کرده باشیم. در این روش از معادلهٔ موازنه گشتاورها حول دو محور متفاوت استفاده می‌کنیم. با انتخاب محوری که از انتهای چپ تیرک می‌گذرد، همان‌طور که در بالا دیدیم، نتیجه می‌شود $F_r = \text{۱۵N}$.

محور دوم را چنان اختیار می‌کنیم که از انتهای راست تیرک بگذرد، در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_r)(\text{۰}) - (F_l)(L) + (mg)(L/\text{۲}) + (Mg)(\text{۳}L/\text{۴}) = \text{۰} \qquad (\text{۱۴})$$

از حل این معادله برای F_l نتیجه می‌گیریم

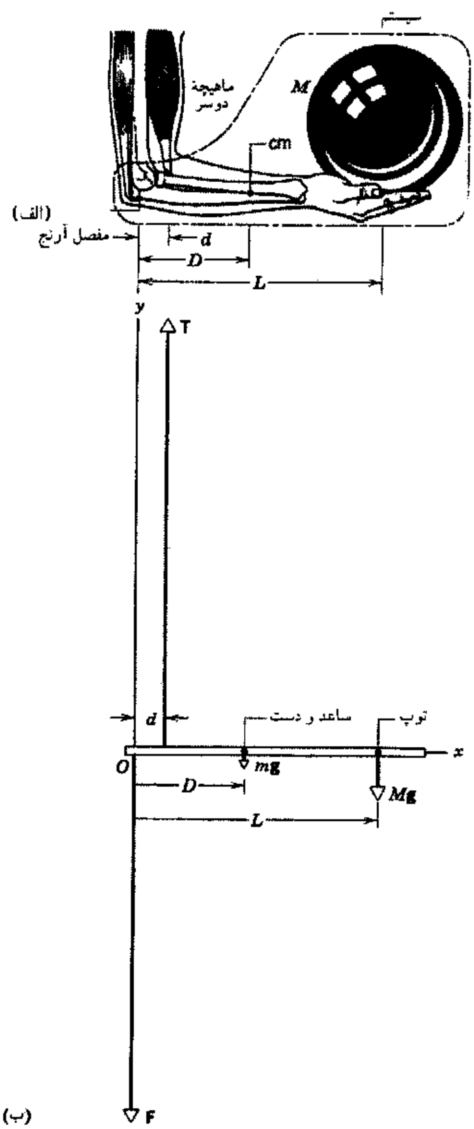
$$F_l = (g/\text{۴})(\text{۳}M + \text{۲}m)$$
$$= \left(\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)(\text{۹٫۸m/s}^{\text{۲}})[\text{۳}(\text{۲٫۷kg}) + \text{۲}(\text{۱٫۸kg})] = \text{۲۹N}$$

می‌بینیم که جوابها همان جوابهای قبلی‌اند. توجه کنید که طول تیرک در این‌گونه مسائل صریحاً در محاسبات وارد نمی‌شود.

برای تعیین دو مجهول این مسئله (F_r و F_l) نیاز به دو معادلهٔ مستقل داریم. در روش دوم، دو معادله (معادلات ۱۳ و ۱۴) معادلات مربوط به گشتاورها هستند؛ معادلهٔ نیرو (معادلهٔ ۱۲) هیچ اطلاعات مستقل دیگری به‌دست نمی‌دهد. در واقع، می‌توانیم نشان بدهیم که از تفریق دو معادلهٔ گشتاور، معادلهٔ نیرو حاصل می‌شود.

مثال ۲. شخصی توپ بولینگی به جرم $M = \text{۷٫۲kg}$ را درکف دست نگه داشته است. همان‌طور که در شکل ۶الف می‌بینیم، بازوی بازیکن قائم و ساعد او افقی است. ماهیچه دو سر و ساختار استخوانی بازو چه نیروهایی به ساعد وارد می‌کنند؟ جرم ساعد و کف دست روی‌هم $m = \text{۱٫۸kg}$ است و فواصل مورد نیاز عبارت‌اند از $d = \text{۴٫۰cm}$، $D = \text{۱۵cm}$، و $L = \text{۳۳cm}$.

حل: سیستم مورد نظر ما تشکیل شده است از ساعد و توپ بولینگ. شکل ۶ب نمودار جسم آزاد این سیستم را نشان می‌دهد. نیروهای مجهول عبارت‌اند از $\mathbf{T}$، نیرویی که ماهیچه به ساعد اعمال می‌کند، و $\mathbf{F}$، نیرویی که بازو به ساعد اعمال می‌کند. اینجا هم مانند مثال ۱ همهٔ نیروها در راستای قائم‌اند.



شکل۶. مثال ۲. (الف) دستی که یک توپ بولینگ را نگه داشته است. مرز سیستم را با خط‌چین مشخص کرده‌ایم. (ب) نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر را نشان می‌دهد. بردارها عمداً به مقیاس رسم شده‌اند تا نشان بدهند که چه نیروهای بزرگی توسط ماهیچه دو سر و بازو در مفصل آرنج (نقطهٔ O) اعمال می‌شوند.

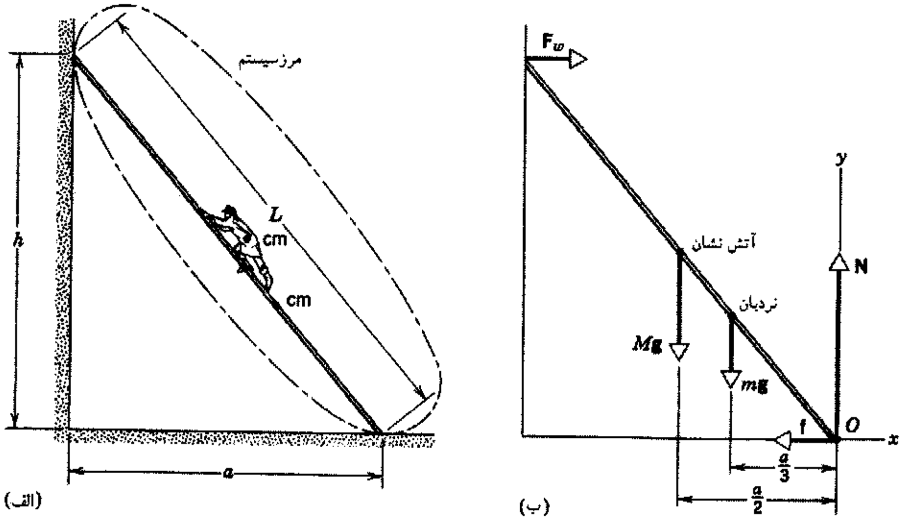
از $\sum F_y = \text{۰}$ (معادلهٔ ۶) نتیجه می‌گیریم

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = \text{۰} \qquad (\text{۱۵})$$

ازکاربرد معادلهٔ ۷ حول محوری که از O می‌گذرد و با استفاده از این قرارداد که چرخشهای پادساعتگرد را مثبت می‌گیریم، داریم

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(\text{۰}) - (mg)(D) - (Mg)(L) = \text{۰} \qquad (\text{۱۶})$$

با انتخاب محوری که از نقطهٔ O می‌گذرد، نیروی مجهول F را از این معادله حذف کرده‌ایم. معادلهٔ ۱۶ را حل می‌کنیم و از آن T را به‌دست



شکل۷. مثالهای ۳ و ۴. (الف) مأمور آتش‌نشانی تا نیمهٔ طول نردبانی که به‌دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد بالا می‌رود. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر سیستم را (در مقیاس متناسب) نشان می‌دهد.

می‌آوریم

$$\begin{aligned} T &= g\frac{mD+ML}{d} \\ &= (۹٫۸\text{m/s}^۲)\frac{(۱٫۸\text{kg})(۱۵\text{cm})+(۷٫۲\text{kg})(۳۳\text{cm})}{۴٫۰\text{cm}} \\ &= ۶۴۸\text{N} = ۱۴۶\text{lb} \end{aligned}$$

به‌این ترتیب ماهیچه دو سر ساعد را با نیرویی که تقریباً نه برابر وزن توپ بولینگ است به‌بالا می‌کشد.

اگر معادلهٔ ۱۵ را برای مجهول F حل کنیم و مقدار محاسبه‌شده برای T را در آن قرار بدهیم، داریم

$$\begin{aligned} F &= T - g(M+m) \\ &= ۶۴۸\text{N} - (۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷٫۲\text{kg} + ۱٫۸\text{kg}) \\ &= ۵۶۰\text{N} = ۱۲۶\ \text{lb} \end{aligned}$$

نیروی F هم بسیار بزرگ و تقریباً هشت برابر وزن توپ بولینگ است.

مثال ۳. نردبانی به‌طول $L = ۱۲\text{m}$ و جرم $m = ۴۵\text{kg}$ به دیواری تکیه داده شده است. سر بالای این نردبان در ارتفاع $h = ۹٫۳\text{m}$ از سطح زمین قرار دارد (شکل ۷الف). مرکز جرم نردبان در فاصلهٔ یک‌سوم طول آن از سر متکی به زمین واقع است. آتش‌نشانی به جرم $M = ۷۲\text{kg}$ تا نیمهٔ این نردبان بالا رفته است. فرض کنید دیوار بدون اصطکاک است، ولی زمین با نردبان اصطکاک دارد. از طرف دیوار و زمین چه نیروهایی به نردبان وارد می‌شود؟

حل: شکل ۷ب نمودار جسم آزاد نردبان را نشان می‌دهد. دیوار نیروی افقی، $\mathbf{F}_w$، به نردبان وارد می‌کند؛ چون فرض کرده‌ایم تماس بین دیوار-نردبان بدون اصطکاک است، دیوار نمی‌تواند هیچ نیروی قائمی به‌نردبان وارد کند. زمین نیرویی به نردبان وارد می‌کند که مؤلفهٔ افقی آن، f، ناشی از اصطکاک است و مؤلفهٔ قائم آن، N، نیروی عمود بر سطح تماس است. محورهای مختصات را به‌صورتی که در شکل می‌بینید اختیار می‌کنیم و مبدأ O را محل تلاقی نردبان با زمین می‌گیریم. فاصلهٔ پای نردبان از دیوار، a، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$a = \sqrt{L^۲ - h^۲} = \sqrt{(۱۲\text{m})^۲ - (۹٫۳\text{m})^۲} = ۷٫۶\text{m}$$

از معادلهٔ ۶، معادلهٔ موازنهٔ نیروها، داریم

$$\sum F_x = F_w - f = ۰ \qquad (۱۷)$$

و

$$\sum F_y = N - Mg - mg = ۰ \qquad (۱۸)$$

از معادلهٔ ۱۸ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} N &= g(M+m) \\ &= (۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷۲\text{kg} + ۴۵\text{kg}) = ۱۱۵۰\text{N} \end{aligned}$$

از معادلهٔ ۷، معادلهٔ موازنهٔ گشتاور نیروها، با انتخاب محوری که از نقطهٔ O (نقطهٔ تماس نردبان با زمین) می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/۲) + (mg)(a/۳) = ۰ \qquad (۱۹)$$

با این انتخاب مناسب، دو متغیر f و N از معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها حذف می‌شود. از حل معادلهٔ ۱۹ برای F_w داریم

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/۲ + m/۳)}{h} \\ &= \frac{(۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷٫۶\text{m})[(۷۲\text{kg})/۲ + (۴۵\text{kg})/۳]}{۹٫۳\text{m}} \\ &= ۴۱۰\text{N} \end{aligned}$$

و از معادلهٔ ۱۷ فوراً نتیجه می‌گیریم که

$$f = F_w = ۴۱۰\text{N}$$

مثال ۴. در مثال ۳، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و نردبان μ_s است. آتش‌نشان تا چه طولی از نردبان می‌تواند بالا برود بی‌آنکه نردبان شروع به لغزش کند؟

حل: در مثال ۳، دیدیم که وقتی آتش‌نشان تا نیمهٔ نردبان بالا رفته باشد، نیروی عمود بر سطح N برابر با ۱۱۵۰N است. بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با $f_{\max} = \mu_s N = (۰٫۵۴)(۱۱۵۰\text{N}) = ۶۲۰\text{N}$. نیروی اصطکاکی که در آن مثال تعیین کردیم $f = ۴۱۰\text{N}$ بود که کمتر از $f_{\max}$ است. وقتی آتش‌نشان به صعود خود روی نردبان ادامه می‌دهد، f افزایش پیدا می‌کند تا آنکه وقتی به فاصلهٔ d از پای نردبان رسید $f = f_{\max}$ می‌شود و آن‌وقت لغزش آغاز می‌شود. می‌خواهیم فاصلهٔ d را تعیین کنیم.

نیروهای مؤثر همان نیروهای شکل ۷ هستند. با استفاده از معادلهٔ ۷ حول محوری که از نقطهٔ تماس نردبان با زمین می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/۳) + (Mg)(da/L) = ۰$$

که در آن da/L فاصلهٔ افقی بین نقطهٔ O و امتداد وزن Mg آتش‌نشان است. از حل این معادله برای F_w نتیجه می‌شود

$$F_w = \frac{ga}{h}\left(M\frac{d}{L} + \frac{m}{۳}\right) \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ ۲۰ نشان می‌دهد که وقتی آتش‌نشان از نردبان بالا می‌رود (یعنی، وقتی d زیاد می‌شود)، نیروی F_w هم برای حفظ تعادل باید زیاد شود. برای اینکه d متناظر با شروع لغزش را تعیین کنیم، ابتدا باید F_w را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ ۶، معادلهٔ مربوط به موازنهٔ نیروها در امتداد x، نتیجه می‌دهد

$$\sum F_x = F_w - f = ۰$$

در لحظهٔ آغاز لغزش داریم

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N \qquad (۲۱)$$

از معادلهٔ ۶ برای موازنهٔ نیروها در امتداد محور y، داریم

$$\sum F_y = N - Mg - mg = ۰$$

یا

$$N = g(M+m) \qquad (۲۲)$$

از ترکیب معادلات ۲۱ و ۲۲ نتیجه می‌گیریم

$$F_w = \mu_s g(M+m) \qquad (۲۳)$$

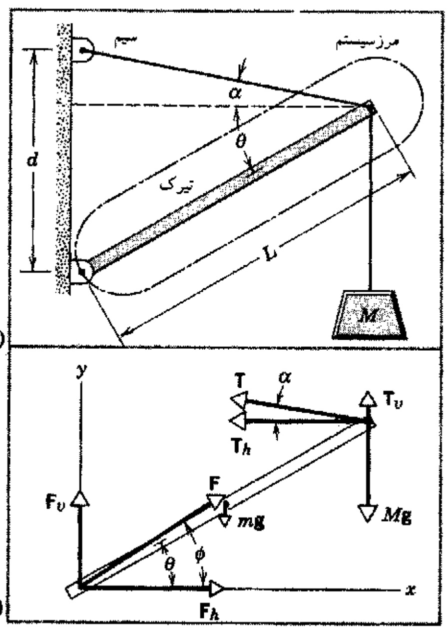
سرانجام d را از ترکیب معادلات ۲۰ و ۲۳ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d &= L\left[\frac{\mu_s h}{a}\,\frac{(M+m)}{M} - \frac{m}{۳M}\right] \\ &= (۱۲\text{m})\left[\frac{(۰٫۵۴)(۹٫۳\text{m})}{۷٫۶\text{m}}\,\frac{(۷۲\text{kg}+۴۵\text{kg})}{۷۲\text{kg}} - \frac{۴۵\text{kg}}{(۳)(۷۲\text{kg})}\right] \\ &= ۱۰٫۴\text{m} \end{aligned}$$

به‌این ترتیب آتش‌نشان می‌تواند تا ۸۷٪ طول نردبان را قبل از آغاز لغزش بپیماید.

حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا آتش‌نشان بتواند تمام طول نردبان را بالا برود $(d = L)$؟ حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا وقتی آتش‌نشان پا روی نردبان گذاشت، نردبان نلغزد؟

مثال ۵. تیرک یکنواختی به طول $L = ۳٫۳\text{m}$ و جرم $m = ۸٫۵\text{kg}$ به‌دیواری لولا شده است (شکل ۸الف). سیمی که در فاصلهٔ $d = ۲٫۱\text{m}$ بالاتر از لولا به دیوار متصل است به سر دیگر تیرک وصل است، و طول سیم چنان است که تیرک با افق زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$



شکل۸. مثال ۵. (الف) تیرکی از سر پایین توسط لولا و از سر بالایی توسط یک رشته سیم به دیوار متصل کرده‌ایم. جسمی به جرم M را به سر بالایی این تیرک آویخته‌ایم. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر تیرک را نشان می‌دهد. نیروی F توسط لولا اعمال می‌شود و نیروی T کشش سیم

می‌سازد. جسمی به جرم $M = ۵۶\text{kg}$ را به انتهای بالایی تیرک آویخته‌ایم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را تعیین کنید.

حل: در شکل ۸ب نیروهای خارجی وارد بر تیرک را نشان داده‌ایم. تیرک را به عنوان سیستم در نظر گرفته‌ایم. چون دو نیرو از نیروهای وارد بر سیستم قائم و به‌طرف پایین هستند، محورهای مختصات را افقی و قائم اختیار می‌کنیم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را با مؤلفه‌های افقی و قائم آنها نمایش داده‌ایم.

از معادلهٔ ۶، معادلهٔ تعادل انتقالی، داریم

$$\sum F_x = F_h - T_h = ۰ \qquad (۲۴)$$

و

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = ۰ \qquad (۲۵)$$

برای اعمال شرط تعادل دورانی، محوری را انتخاب می‌کنیم که از انتهای بالایی تیرک می‌گذرد. (چرا؟) در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\sum \tau_z = -F_v(L\cos\theta) + F_h(L\sin\theta) + mg\left(\frac{L}{۲}\cos\theta\right) = ۰$$

یا

$$F_v = F_h \tan\theta + \frac{mg}{۲} \qquad (۲۶)$$

با قراردادن مقادیر عددی، معادلات ۲۴ تا ۲۶ به‌صورت زیر در می‌آیند

$$F_h = T_h$$

$$F_v + T_v = ۶۳۲\text{N}$$

و

$$F_v = (۰{,}۵۷۷)F_h + ۴۱{,}۷\text{N}$$

بررسی مسئله نشان می‌دهد که در این مورد چهار مجهول، یعنی F_v، F_h، T_v و T_h داریم، ولی فقط توانسته‌ایم سه رابطه برای آنها بنویسیم. اگر قرار باشد این مسئله را حل کنیم، به رابطهٔ دیگری بین این کمیتها نیاز داریم. این رابطهٔ آخری از این واقعیت نتیجه می‌شود که از جمع T_v و T_h باید بردار $\mathbf{T}$ حاصل شود که در راستای سیم است. سیم (انعطاف‌پذیر) نمی‌تواند نیرویی را که عمود بر طولش باشد تحمل کند. [توجه کنید که این گفته در مورد تیرک (صلب) صدق نمی‌کند.] بنابراین چهارمین معادلهٔ ما چنین است

$$T_v = T_h \tan\alpha \qquad (۲۷)$$

که در آن داریم $\tan\alpha = (d - L\sin\theta)/(L\cos\theta) = ۰{,}۱۵۷$، که متناظر با $\alpha = ۸{,}۹°$ است. بنابراین معادلهٔ چهارم ما به‌صورت زیر درمی‌آید

$$T_v = ۰{,}۱۵۷\, T_h$$

از ترکیب چهار معادلهٔ بالا و پس از انجام عملیات جبری لازم، به‌دست می‌آوریم

$$F_v = ۵۰۶\text{N},\ F_h = ۸۰۴\text{N},\ T_v = ۱۲۶\text{N},\ T_h = ۸۰۴\text{N}$$

و به این ترتیب کشش سیم برابر است با

$$T = \sqrt{T_h^۲ + T_v^۲} = ۸۱۴\ \text{N}$$

و نیرویی که از طرف لولا به تیرک وارد می‌شود عبارت است از

$$F = \sqrt{F_h^۲ + F_v^۲} = ۹۵۰\text{N}$$

توجه کنید که نیروهای T و F هر دو به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بیشتر از مجموع وزن تیرک و جسم آویخته به آن (۶۳۲N) است.

بردار $\mathbf{F}$ با افق زاویه‌ای می‌سازد که از رابطهٔ زیر معین می‌شود

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{F_v}{F_h} = ۳۲{,}۲°$$

بنابراین بردار نیروی برایندی که از لولا به تیرک وارد می‌شود، کاملاً در راستای خودِ تیرک قرار نمی‌گیرد.

در مثالهای قبلی مواظب بوده‌ایم که تعداد نیروهای مجهول را برابر با تعداد معادلات مستقلی اختیار کنیم که این نیروها را به‌هم مربوط می‌کنند. اگر همهٔ نیروها در صفحه باشند، تنها می‌توانیم سه معادلهٔ مستقل برای تعادل داشته باشیم، یک معادله برای تعادل دورانی حول هر محور عمود بر صفحه و دو معادلهٔ دیگر برای تعادل انتقالی در صفحهٔ نیروها. ولی، اغلب با بیش از سه نیروی مجهول مواجه هستیم. مثلاً، اگر در مثالهای ۳ و ۴ فرض بدون اصطکاک بودن دیوار را حذف کنیم، در آن صورت چهار کمیت اسکالر مجهول داریم که عبارت‌اند از مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از دیوار به نردبان و مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از زمین به نردبان. چون فقط سه معادلهٔ اسکالر داریم، این نیروها را نمی‌توانیم پیدا کنیم. اگر به یکی از نیروهای مجهول مقداری نسبت بدهیم، سایر نیروها را می‌توانیم معین کنیم. ولی اگر هیچ معیاری برای نسبت دادن یک مقدار به یک نیروی مجهول نداشته باشیم، از نظر ریاضی بینهایت جواب امکانپذیر خواهد بود. بنابراین اگر بخواهیم جواب منحصر به‌فردی به‌دست بیاوریم باید بتوانیم یک رابطهٔ مستقل دیگر بین نیروهای مجهول پیدا کنیم. (در مثال ۵، چنین رابطه‌ای را از خواص فیزیکی یکی از اجزای سیستم نتیجه گرفتیم.) محاسبهٔ گشتاور حول یک محور دیگر، معادلهٔ مستقل دیگری به‌دست نمی‌دهد؛ می‌توانیم نشان بدهیم که چنین معادله‌ای ترکیبی خطی از معادلهٔ مربوط به گشتاور و دو معادلهٔ مربوط به نیروست و بنابراین حاوی اطلاعات جدیدی نیست.

مثال سادهٔ دیگری از یک ساختار نامعین، وقتی پیش می‌آید که بخواهیم نیروهای وارد از زمین به چهار چرخ اتومبیلی را که روی سطح

افقی قرار گرفته است مشخص کنیم. اگر فرض کنیم که این نیروها جملگی بر سطح زمین عمودند، در آن‌صورت با چهار کمیت اسکالر مجهول مواجه‌ایم. تمام نیروهای دیگر از جمله وزن اتومبیل و سرنشینان آن عمود بر سطح زمین وارد می‌شوند. بنابراین، تنها سه معادلهٔ مستقل داریم که شرایط تعادل را مشخص می‌کنند، یکی از این معادلات مربوط به تعادل انتقالی در تنها راستای مشترک همهٔ نیروهاست و دو معادلهٔ دیگر از تعادل دورانی حول دو محور عمود بر هم در صفحهٔ افق نتیجه می‌شود. پس جواب این مسئله هم از نظر ریاضی نامعین است. میز چهارپایه‌ای که همهٔ پایه‌هایش روی زمین قرار داشته باشند هم نمونهٔ دیگری از این نوع مسائل است.

البته، چون برای این مسئلهٔ فیزیکی در واقع جواب یگانه‌ای وجود دارد، باید برمبنایی فیزیکی، رابطهٔ مستقل دیگری بین نیروها پیدا کنیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. برای رفع این مشکل باید توجه کنیم که هیچ ساختاری هرگز چنان صلب نیست که ما تلویحاً در این مسائل فرض کرده‌ایم. همهٔ ساختارها تا حدودی تغییر شکل می‌دهند. مثلاً، نردبان و دیوار تغییر شکل می‌دهند؛ لاستیکهای اتومبیل و زمین هم تغییر شکل می‌دهند. ماهیت این تغییر شکل را قوانین کشسانی و خواص کشسانی هر ساختار تعیین می‌کنند و رابطهٔ مورد نیاز دیگر بین نیروها از همین‌جا فراهم می‌شود. بنابراین برای تحلیل کامل مسئله نه تنها به قوانین مکانیک جسم صلب، بلکه به قوانین کشسانی هم نیاز داریم. این مطالب را به‌طور خلاصه در بخش ۱۴ـ۵ مطالعه خواهیم کرد.

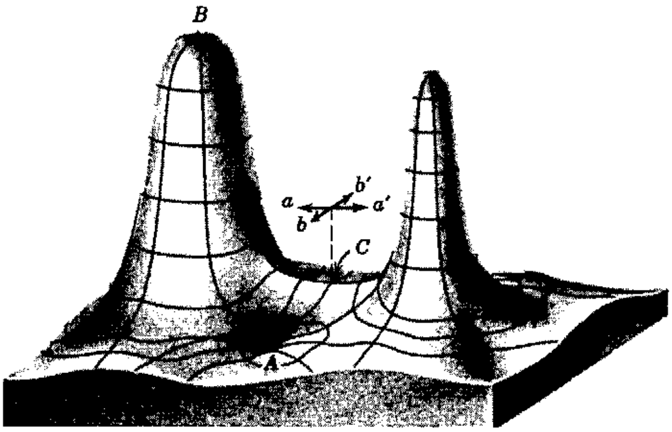
۱۴ـ۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

در فصل ۸، دیدیم که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. برای نیروهای پایستار می‌توانیم یک تابع انرژی پتانسیل $U(x,y,z)$ تعریف کنیم، که به‌صورت زیر با $\mathbf{F}$ مرتبط است

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

در نقاطی که $\partial U/\partial x$ صفر است، ذره‌ای که تحت تأثیر این نیروی پایستار باشد در راستای x در تعادل انتقالی است، چون در این‌صورت F_x صفر است. به‌همین صورت، در نقاطی که $\partial U/\partial y$ یا $\partial U/\partial z$ صفر باشد، ذره به‌ترتیب در راستاهای y و z در تعادل انتقالی است. مشتق U در یک نقطه، و مؤلفهٔ نیروی متناظر با آن در صورتی صفر است که U در آن نقطه دارای یک مقدار فرین (بیشینه یا کمینه) باشد، یا اینکه U نسبت به مختصهٔ متغیر ثابت باشد. پس جسم وقتی در حال تعادل است که U بیشینه، کمینه یا ثابت باشد. هر یک از این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

وقتی U کمینه باشد (نقطهٔ A در شکل ۹)، ذره در حال تعادل پایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی ذره از این وضعیت سبب ایجاد یک نیروی بازگرداننده می‌شود که میل به بازگرداندن ذره به مکان تعادل



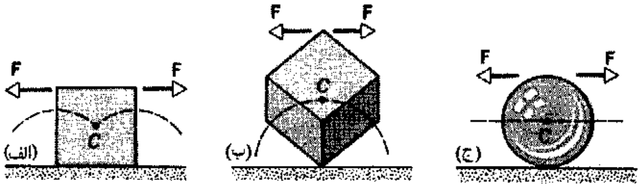
شکل۹. یک سطح انرژی پتانسیل گرانشی. ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانشی متناظر با این شکل قرار بگیرد مانند ذره‌ای رفتار می‌کند که روی یک سطح جامد واقعی و بدون اصطکاک، به همین شکل، می‌لغزد. ذره در نقاط A، B، یا C در حال تعادل است. در نقطهٔ A تعادل پایدار است، زیرا اگر ذره را اندکی از A دور کنیم تمایل دارد که به همان نقطه بازگردد. در نقطهٔ B تعادل ناپایدار است، زیرا ذره‌ای که اندکی از B دور شود تمایل به افزایش فاصله دارد. در نقطهٔ C، اگر ذره در امتداد محور aa' جابه‌جا شود مایل به‌بازگشت به نقطهٔ C است، ولی اگر در امتداد محور bb' جابه‌جا شود مایل به افزایش فاصله است. نقطهٔ C را نقطهٔ زین می‌نامند، زیرا این سطح در این ناحیه تقریباً به‌شکل زین است. تعادل خنثی را اینجا نشان نداده‌ایم؛ این نوع تعادل را باید روی سطح افقی نمایش داد.

دارد. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که اگر جسمی در حال تعادل پایدار باشد، برای تغییر مکان جسم باید یک عامل خارجی روی آن کار انجام بدهد. این کار سبب افزایش انرژی پتانسیل جسم می‌شود.

وقتی U بیشینه باشد (نقطهٔ B در شکل ۹)، ذره در حال تعادل ناپایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی از این وضعیت سبب ایجاد نیرویی می‌شود که تمایل به دورکردن ذره از موقعیت تعادل دارد. در این مورد برای تغییر مکان ذره اصلاً نیازی به‌کار عامل خارجی روی ذره نیست؛ این کار را نیروی پایستار انجام می‌دهد، و در نتیجه انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

اگر U ثابت باشد، ذره در حال تعادل خنثی است. در این مورد ذره را می‌توان بدون اعمال هیچ نیروی دورکننده یا بازگرداننده‌ای، اندکی جابه‌جا کرد.

نکاتی که بیان کردیم در مورد ذرات صدق می‌کند، یعنی برای حرکت انتقالی معتبر است. حالا می‌خواهیم به جسم صلب بپردازیم. در این‌صورت علاوه بر تعادل انتقالی باید تعادل دورانی را هم در نظر بگیریم. مسئلهٔ حرکت جسم صلب در میدان گرانشی مسئلهٔ بسیار ساده‌ای است، چون می‌توانیم فرض کنیم که تمام نیروهای گرانشی وارد بر ذرات یک جسم صلب به یک نقطهٔ واحد اثر می‌کنند ــ چه به‌منظور بررسی تعادل انتقالی باشد و چه به‌منظور بررسی تعادل دورانی. در مسائل مربوط به تعادل تحت تأثیر نیروهای گرانشی، می‌توانیم به‌جای تمامی جسم صلب، نقطه‌ای با همان جرم و مستقر در گرانیگاه را در نظر بگیریم.



شکل ۱۰. تعادل یک جسم گسترده (الف) مکعبی که روی یک‌وجه تکیه دارد درتعادل پایدار است، زیرا اگر در اثر نیروی افقی **F** از جا بلند شود، گرانیگاه آن، C، بالا می‌رود. (ب) مکعبی که روی یک کنج متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است، چون در اثر نیروی افقی **F**، گرانیگاهش سقوط می‌کند. (ج) کره در مقابل یک نیروی افقی در حال تعادل خنثی است، چون در اثر اعمال نیروی **F**، گرانیگاه C نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید. این معیارهای تعادل برای اجسام بعددار را با شرایط مربوط به ذرهٔ شکل ۹ مقایسه کنید.

مثلاً، مکعبی را در نظر بگیرید که روی یک وجه‌اش روی یک میز افقی قرار گرفته است. گرانیگاه مکعب در مرکز سطح مقطع مرکزی‌اش واقع می‌شود (شکل ۱۰الف). فرض کنید نیرویی به این مکعب اعمال می‌کنیم که آن‌را حول محوری در امتداد یکی از اضلاعش و بدون لغزش می‌چرخاند. توجه کنید که گرانیگاه بالا برده شده و به‌این ترتیب روی مکعب کار صورت گرفته است، و این کار انرژی پتانسیل را افزایش می‌دهد. اگر نیرو را حذف کنیم، مکعب به‌وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد. بنابراین این وضعیت اولیه یک حالت تعادل پایدار است. این فرایند، برای ذره‌ای با همان جرم در مکان گرانیگاه، در شکل نشان داده شده است. خط‌چین نمایندهٔ مسیری است که گرانیگاه در طی این حرکت می‌پیماید. مشاهده می‌کنیم، چنان که باید، ذره در مکان تعادل پایدار، حداقل‌انرژی پتانسیل را دارد. به‌این ترتیب می‌شود نتیجه گرفت که جسم صلب در صورتی در تعادل پایدار است که با اعمال نیرو بتوانیم گرانیگاه آن‌را بالا ببریم ولی نتوانیم پایین بیاوریم.

اگر مکعب را بچرخانیم تا روی یک‌کنج به توازن برسد (شکل ۱۰ب). در این‌صورت هم مکعب در حال تعادل است. مشاهده می‌کنیم که این وضعیت تعادل یک وضعیت ناپایدار است. اعمال کوچکترین نیروی افقی سبب دور شدن مکعب از این وضعیت می‌شود و انرژی پتانسیل هم در این فرایند کاهش می‌یابد. ذره‌ای با جرم معادل، که در گرانیگاه مستقر باشد مسیری را که با خط‌چین نشان داده‌ایم طی می‌کند. در وضعیت تعادل ناپایدار، همان‌طورکه باید، ذره بیشترین انرژی پتانسیل را دارد. مطلب بالا را می‌توانیم چنین خلاصه کنیم که، جسم صلب در حال تعادل ناپایدار است اگر هر نیروی افقی بتواند گرانیگاه آن‌را پایین بیاورد.

مکعبی که روی یک ضلع‌اش متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است اگر تحت تأثیر یک نیروی افقی عمود بر آن ضلع قرار بگیرد، ولی در مقابل نیروی افقی‌ای که موازی با آن ضلع وارد شود در تعادل پایدار است. به‌این ترتیب ذره ممکن است نسبت به یک مختصه در تعادل پایدار باشد و نسبت به مختصهٔ دیگر در تعادل ناپایدار. چنین وضعیتی را نقطهٔ زین می‌نامیم. این وضعیت متناظر با نقطهٔ C در شکل ۹ است.

تعادل خنثای جسم صلب با یک کره روی یک سطح افقی نشان داده می‌شود (شکل ۱۰ج). اگر به کره یک نیروی افقی اعمال شود، گرانیگاه آن نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید بلکه روی یک خط افقی حرکت می‌کند. مسیر گرانیگاه در شکل با خط‌چین افقی مشخص شده است. انرژی پتانسیل کره، همانند انرژی پتانسیل ذره‌ای با جرم معادل واقع در گرانیگاه، در طی جابه‌جایی ثابت است. این سیستم در غیاب نیرو هیچ تمایلی به حرکت درجهت خاصی ندارد. جسم صلب در صورتی در حال تعادل خنثی است که نیروهای افقی نتوانند گرانیگاه آن‌را پایین و یا بالا ببرند.

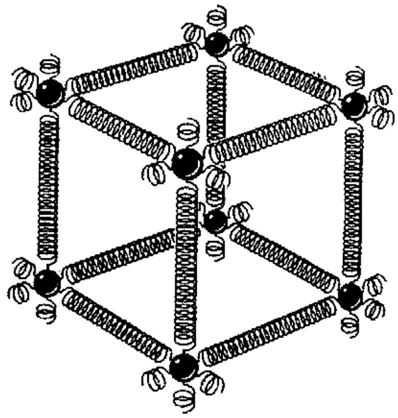
تعادل یک جسم صلب آویخته در چه شرایطی پایدار است؟ چه موقع ناپایدار است؟ و در کدام شرایط خنثی است؟

۱۴ـ۵ کشسانی

میز سه‌پایه ساختاری است که می‌توانیم تعادل آن‌را با روشهایی که در این فصل ارائه شد بررسی کنیم. هرسه پایه روی زمین قرار دارند، و زمین نیروهای قائمی به هرکدام از آنها وارد می‌کند. با استفاده از یک معادلهٔ نیرو (وزن که در گرانیگاه وارد می‌شود باید با جمع سه نیروی قائم برابر باشد) و دو معادلهٔ گشتاور (گشتاورها را حول دو محورعمود بر هم واقع در صفحهٔ افقی کف اتاق محاسبه می‌کنیم)، می‌توانیم سه نیروی مجهول را پیدا کنیم.

اما مسئلهٔ میز چهارپایه شامل چهار نیروی مجهول است و نمی‌توانیم، بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ارتباط میان نیروهای قائم، آن‌را حل کنیم. مثلاً، فرض کنید پایه‌ها از نظر طول اندکی با هم تفاوت دارند. با قراردادن یک وزنهٔ بسیار سنگین روی میز می‌توانیم پایه‌های آن‌را به اندازه‌های متفاوت فشرده کنیم، تا هر چهارتایشان با زمین در تماس قرار بگیرند. در این‌صورت می‌توانیم با استفاده از فشردگی پایه‌ها رابطهٔ چهارم بین نیروها را پیدا کنیم و به حل مسئله بپردازیم (نگاه کنید به مثال ۸).

صلبیت اجسام به اصطلاح صلب در واقع یک تصور است. جامدها از اتمها شکل گرفته‌اند و این اتمها در تماس صلب با یکدیگر قرار ندارند. اتمها رویه‌های سختی ندارند که بتوان آنها را خیلی کیپ در کنار هم چید؛ ابر الکترونی آنها را می‌توان با نیروهای خارجی شکل داد و یا تغییر شکل داد. در اجسام جامد، پیوند اتمها به‌واسطهٔ نیروهایی است که تا حدود زیادی مانند نیروی فنر رفتار می‌کنند. شکل ۱۱ قسمتی از یک شبکهٔ جامد را نشان می‌دهد. شبکه آرایش منظمی از اتمهاست که می‌توان آن‌را در بلورها مشاهده کرد. هر اتم تحت تأثیر شش فنری که آن‌را احاطه کرده به حال تعادل درآمده است؛ ثابت مؤثر فنر بسیار بزرگ است، یعنی تغییر دادن فاصلهٔ میان اتمها مستلزم نیروی بسیار بزرگی است. به‌خاطر بزرگی این نیروست که فرض می‌کنیم اجسام صلب‌اند. درجامدهای دیگر، آرایش اتمها ممکن است به‌صورتی غیر از شبکهٔ مکعبی، مثلاً به شکل ردیفهای طویل باشد؛ این نوع اجسام خیلی صلب نیستند. لاستیک نمونه‌ای از آنهاست.



شکل۱۱. اتمهای یک جسم جامد روی یک شبکهٔ سه‌بعدی تکرارشونده توزیع شده‌اند. نیروهای بین اتمی را با فنر نمایش داده‌ایم.

وقتی چنین موادی را می‌کشیم، در واقع نیروی کافی برای تغییر دادن فاصلهٔ بین اتمها را اعمال می‌کنیم.

همهٔ اجسام "صلب" واقعی تا حدودی کشسان‌اند، یعنی، با کشیدن، هل‌دادن، چرخاندن یا فشردن آنها می‌توانیم ابعادشان را اندکی تغییر بدهیم. برای اینکه شناختی از مرتبهٔ بزرگی این نوع تغییر ابعاد داشته باشیم، استوانه‌ای فولادی به‌طول $1\mathrm{m}$ و قطر $1\mathrm{cm}$ را در نظر می‌گیریم. اگر اتومبیل کوچکی را از چنین میله‌ای بیاویزیم، میله فقط در حدود $0{,}5\mathrm{mm}$ یا ۰٫۰۵ درصد تغییر طول می‌دهد. به‌علاوه، وقتی اتومبیل را جدا کنیم، میله به‌طول اصلی‌اش بازمی‌گردد.

اگر به‌این میله دو اتومبیل آویزان کنید، میله به‌طور دائم کشیده خواهد ماند و با برداشتن بار به طول اولیه‌اش باز نمی‌گردد. اگر سه اتومبیل به آن آویزان کنید، میله می‌شکنند. درست در لحظات قبل از گسستگی، افزایش طول آن‌کمتر از ۰٫۲٪ است. تغییر شکلهایی به‌این اندازه اگرچه کوچک به‌نظر می‌رسند، ولی درکارهای مهندسی بسیار اهمیت دارند.

در شکل ۱۲ دو نوع تغییر شکل (یا تغییر ابعاد) ممکن برای جسم جامد، در اثر نیروهای وارد بر آن‌را نشان داده‌ایم. در شکل ۱۲الف استوانه تحت تأثیر نیروهای کششی قرارگرفته است. در شکل ۱۲ب استوانه تحت تأثیر نیروهای به‌اصطلاح برشی تغییر شکل پیدا کرده است. این نوع تغییر شکل مانند تغییر شکل یک بسته کارت یا تغییر شکل یک کتاب است. (نوع سومی که ممکن است یک جسم تغییر شکل بدهد، تغییر شکل در اثر فشردگی یکنواخت است. این نوع تغییر شکل ناشی از اعمال نیروهای یکنواخت در همهٔ جهتهاست. فشردگی یکنواخت را در فصل ۱۷ بررسی می‌کنیم.) آنچه در هر سهٔ این صورتها مشترک است یکی تنش است که به نیروهای اعمال شده مربوط می‌شود و دیگری کرنش، که نوعی از تغییر شکل است.

تنش و کرنش در موارد متفاوت شکل ۱۲ به‌شکلهای مختلفی بروز می‌کنند، ولی ــدر محدودهٔ کاربردهای مفید مهندسیــ با هم متناسب‌اند. ضریب تناسب آنها را مدول کشسانی می‌نامند. بنابراین

$$\text{کرنش} \times \text{مدول کشسانی} = \text{تنش} \qquad (۲۸)$$

در شکل ۱۳ ارتباط بین تنش و کرنش را برای یک استوانهٔ فولادی آزمونی (مانند شکل ۱۴) نشان داده‌ایم. درگسترهٔ وسیعی از تنشهای اعمال شده، منحنی تنش‌ـکرنش یک منحنی خطی است و معادلهٔ ۲۸، با یک مدول ثابت، برقرار است (این قسمت متناظر با بخش خطی شکل ۱۳ است). با افزایش تنش، ممکن است رابطهٔ تنش‌ـکرنش غیرخطی شود، ولی ماده باز هم کشسان می‌ماند: یعنی، اگرتنش را برداریم، نمونه به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد.

اگر تنش از استقامت تسلیم یا حد کشسانی نمونه بیشتر شود، نمونه به‌طور دائمی تغییر شکل می‌دهد و پس از حذف تنش هم به ابعاد اولیه‌اش بازنمی‌گردد، این نوع‌رفتار را رفتار پلاستیک می‌گوییم. فراتر از آنچه که استقامت تسلیم نامیده می‌شود، ناگزیرگسیختگی پدید می‌آید. این پدیده وقتی روی می‌دهد که تنش به استقامت حدی برسد.

کشش و تراکم

در مورد کشیدگی یا فشردگی ساده، تنش را به‌صورت F/A، نیرو تقسیم بر مساحتی که نیرو بر آن اثر می‌کند، و کرنش، یا تغییر شکل را به‌صورت کمیت بدون بعد $\Delta L/L$، تغییر نسبی طول نمونه، تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر نمونه یک میلهٔ بلند باشد، نه تنها تمامی میله بلکه هر قسمت آن، تحت تأثیر یک تنش معلوم، کرنش یکسانی را متحمل می‌شود. چون کرنش یک کمیت بدون بعد است، مدول معادلهٔ ۲۸ دارای بعد تنش، یعنی نیرو بر واحد سطح است.

مدول مربوط به تنشهای کششی و تراکمی را مدول یانگ می‌نامند. این مدول در کاربردهای مهندسی با نماد E نشان داده می‌شود. معادلهٔ ۲۸ به صورت زیر درمی‌آید

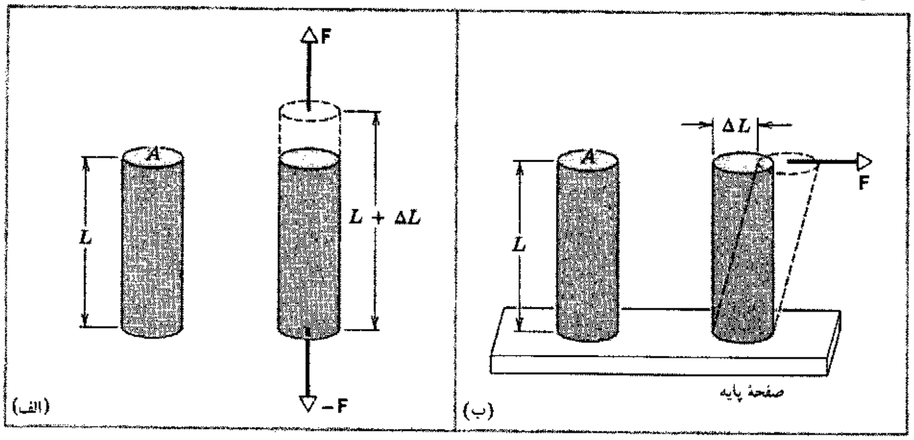
$$\frac{E}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

یا

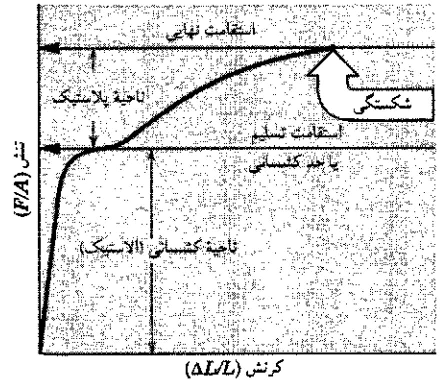
$$\Delta L = \frac{EL}{EA} \qquad (۲۹)$$

کرنش در یک نمونه، $\Delta L/L$، را معمولاً می‌توان به‌راحتی با کرنش‌سنج اندازه‌گیری کرد (شکل ۱۵). این وسائل ساده و کارآمد، که می‌توان آنها را مستقیماً با چسب روی ماشین‌آلات در حال کار نصب کرد، مبتنی بر این اصل ساخته شده‌اند که مقاومت الکتریکی یک سیم (از جنس بعضی مواد) تابعی از کرنش در سیم است.

با آنکه ممکن است مدول کشش و فشارش تقریباً یکی باشد، امکان دارد استقامت جدی در دو مورد کاملاً متفاوت باشد. مثلاً بتون تحت فشار بسیار مقاوم است ولی تحت کشش آن‌چنان سست است که هرگز از آن درکارهای مهندسی (به این منظور) استفاده نمی‌شود.



شکل ۱۲. (الف) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش کششی به‌اندازهٔ ΔL درازتر شده است. (ب) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش برشی، مانند یک دسته کارت تغییر شکل داده است.



شکل ۱۳. منحنی تنش-کرنش برای یک نمونهٔ فولادی، مانند شکل ۱۴. وقتی تنش برابر با استقامت تسلیم نمونه باشد، نمونه به‌طور دائمی تغییر شکل می‌دهد. وقتی تنش برابر با استقامت حدی نمونه شود، نمونه از هم می‌گسلد.

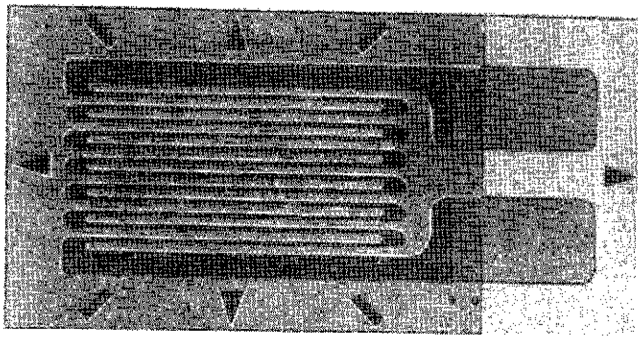
شکل ۱۴. نمونهٔ مورد آزمون برای تعیین منحنی تنش-کرنش (مانند شکل ۱۳).

در جدول ۱ مقادیر مربوط به مدول یانگ و سایر خواص کشسانی چند نوع مصالح مورد استفاده در مهندسی را آورده‌ایم.

برش

در مورد نیروهای برشی هم تنش به‌صورت نیرو بر واحد سطح است، ولی در اینجا بردار نیرو در صفحهٔ سطح مورد نظر قرار می‌گیرد و بر آن عمود نیست. کرنش هم به‌صورت نسبت بدون بعد $\Delta L/L$ است. این کمیتها در شکل ۱۲ب نشان داده شده‌اند. مدول مربوط به اینگونه نیروها را که در کاربردهای مهندسی با نماد G نشان داده می‌شود، مدول برشی می‌نامیم. معادلهٔ ۲۹، با نشاندن G به‌جای E، در مورد تنشهای برشی هم به‌کار می‌رود.

تنشهای برشی در میل‌گردانهایی که زیر بار دوران می‌کنند، در شکستگیهای استخوان به‌علت پیچش، و در فنرها نقش بسیار مهمی دارند.



شکل ۱۵. یک کرنش‌سنج با ابعاد کلی ۹٫۸mm در ۴٫۶mm. این سنجه را با چسب به جسمی که می‌خواهیم کرنش آن‌را اندازه‌گیری کنیم متصل می‌کنیم. مقاومت الکتریکی سنجه با کرنش تغییر می‌کند و این امکان را فراهم می‌آورد تا کرنشهایی تا حدود ۳٪ را اندازه‌گیری کنیم.

مثال ۶. میله‌ای از فولادسازه‌ای در اختیار داریم. شعاع R این میله ۹٫۵mm و طول L آن برابر ۸۱cm است. نیروی $F = ۶٫۲ \times ۱۰^{۴}\mathrm{N}$ (حدود ۷ تن) این میله را در راستای محور می‌کشد. (الف) تنش در این میله چقدر است؟ (ب) در اثر این نیرو میله چقدر افزایش طول پیدا می‌کند؟

حل: (الف) تنش طبق تعریف عبارت است از

$$\text{تنش} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^{۲}} = \frac{۶٫۲ \times ۱۰^{۴}\mathrm{N}}{(\pi)(۹٫۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m})^{۲}}$$
$$= ۲٫۲ \times ۱۰^{۸}\mathrm{N/m^{۲}}$$

استقامت تسلیم برای فولادسازه‌ای برابر با $۲٫۵ \times ۱۰^{۸}\mathrm{N/m^{۲}}$ است، پس این تنش خیلی نزدیک به استقامت حدی میله است.

(ب) با استفاده از معادلهٔ ۲۹ و نتیجه‌ای که در (الف) به‌دست آوردیم داریم

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(۲٫۲ \times ۱۰^{۸}\mathrm{N/m^{۲}})(۰٫۸۱\mathrm{m})}{۲٫۰ \times ۱۰^{۱۱}\mathrm{N/m^{۲}}}$$
$$= ۸٫۹ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m} = ۰٫۸۹\mathrm{mm}$$

جدول ۱. بعضی خواص کشسانی بعضی از مصالح مورد استفاده در مهندسی.

مواد	چگالی $(kg/m^۳)$	مدول یانگ $(۱۰^۹N/m^۲)$	استقامت حدی $(۱۰^۶N/m^۲)$	استقامت خم شدن $(۱۰^۶N/m^۲)$
فولاد[۱]	۷۸۶۰	۲۰۰	۴۰۰	۲۵۰
آلومینیم	۲۷۱۰	۷۰	۱۱۰	۹۵
شیشه	۲۱۹۰	۶۵	[۲]۵۰	—
بتون[۳]	۲۳۲۰	۳۰	[۲]۴۰	—
چوب[۴]	۵۲۵	۱۳	[۲]۵۰	—
استخوان	۱۹۰۰	[۲]۹	[۲]۱۷۰	—
پلی‌استرین	۱۰۵۰	۳	۴۸	—

۱. فولادسازه‌ای (با استاندارد ASTM – A۳۶)

۲. تحت تراکم

۳. استقامت بالا

۴. نوعی کاج

به‌این ترتیب کرنش $\Delta L/L$ برابر است با $(۸٫۹ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m})/(۰٫۸۱\mathrm{m})$، که برابر با $۱٫۱ \times ۱۰^{-۳}$ یا ۰٫۱۱٪ است.

مثال ۷. حداقل قطر استخوان قلم ران در مردان در حدود ۲٫۸cm است، که متناظر است با سطح مقطع $A = ۶ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲$. تحت چه بار تراکمی‌ای این استخوان می‌شکند؟

حل: از جدول ۱ می‌بینیم که استقامت حدی، S_u، استخوان تحت تراکم برابر است با $۱۷۰ \times ۱۰^۶\mathrm{N/m}^۲$. بنابراین نیروی فشارشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$F = S_uA = (۱۷۰ \times ۱۰^۶\mathrm{N/m}^۲)(۶ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲)$$
$$= ۱٫۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N}$$

این نیرو تقریباً معادل ۱۱ تن است. با آنکه این نیرو نیروی بزرگی است، ولی امکان مواجه شدن با آن وجود دارد. مثلاً، ممکن است در یک فرود ناشیانه با چتر روی زمین سخت چنین نیرویی به پاها وارد شود. لازم نیست که نیرو مداوم باشد؛ چند میلی‌ثانیه هم کافی است!

حالا این آمادگی را داریم که بفهمیم چگونه خواص کشسانی مواد می‌تواند در تعیین شرایط تعادل مفید باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸. طول سه‌تا از پایه‌های یک میز چهارپایه $D = ۱٫۰۰\mathrm{m}$ است؛ پایهٔ چهارم اندکی، به‌اندازهٔ $d = ۰٫۵۰\mathrm{mm}$، از سه پایهٔ دیگر بلندتر است، بنابراین میز کمی لنگ است. یک استوانهٔ فولادی سنگینی به جرم $M = ۲۹۰\mathrm{kg}$ را به‌طور سرپا روی میز قرار می‌دهیم، بدین‌ترتیب همهٔ پایه‌ها متراکم می‌شوند و میز دیگر لنگی ندارد. هر پایه میز استوانهٔ چوبی‌ با سطح مقطع $A = ۱٫۰\mathrm{cm}^۲$ است. مدول یانگ برای چوب $E = ۱٫۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{N/m}^۲$ است. فرض کنید سطح میز تراز باقی بماند و پایه‌ها خم نشوند. زمین A چه نیرویی به هر یک از پایه‌ها وارد می‌کند؟

حل: صفحهٔ میز را به عنوان سیستم مورد مطالعه انتخاب می‌کنیم. اگر صفحهٔ میز تراز باقی بماند، هر یک از سه پایه کوتاهتر باید با نیروی یکسان $F_۲$ به‌یک اندازه، $\Delta L_۲$، متراکم شده باشند. پایهٔ بلندتر هم باید با نیروی $F_۱$ به‌اندازهٔ $\Delta L_۱$ متراکم شده باشد، و باید شرط زیر برقرار باشد

$$\Delta L_۲ + d = \Delta L_۱$$

از معادلهٔ ۲۹ $(\Delta L = FL/EA)$، رابطهٔ بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$F_۲D + dAE = F_۱(D + d) \simeq F_۱D \qquad (۳۰)$$

که در جملهٔ آخر تساوی، از d در مقایسه با D چشم پوشیده‌ایم. از معادلهٔ ۶ برای موازنهٔ نیروها در راستای قائم، داریم

$$\sum F_y = ۳F_۲ + F_۱ - Mg = ۰ \qquad (۳۱)$$

اگر معادلات ۳۰ و ۳۱ را برای کمیتهای مجهول حل کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$F_۲ = \frac{Mg}{۴} - \frac{dAE}{۴D}$$
$$= \frac{(۲۹۰\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s}^۲)}{۴}$$
$$- \frac{(۵٫۰ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m})(۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲)(۱٫۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{N/m}^۲)}{(۴)(۱٫۰۰\mathrm{m})}$$
$$= ۷۱۱\mathrm{N} - ۱۶۳\mathrm{N} = ۵۴۸\mathrm{N}$$

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D}$$
$$= 711\mathrm{N} + 489\mathrm{N} = 1200\mathrm{N}$$

می‌توانیم نشان بدهیم، برای اینکه میز به‌وضعیت تعادل برسد، هر یک از سه پایهٔ کوتاهتر به‌اندازهٔ ۰٫۴۲mm و پایهٔ بلندتر به‌اندازهٔ ۰٫۹۲mm متراکم می‌شود. اختلاف این دو مقدار ۰٫۵۰mm، یعنی همان مقداری است که انتظار می‌رود.

برای اینکه سطح میز افقی قرار بگیرد باید استوانه را نزدیکتر به پایهٔ بلندتر قرار بدهیم تا به هر یک از پایه‌های کوتاهتر. محل دقیق استوانه را می‌توانیم از معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها پیدا کنیم، به شرطی که ابعاد سطح میز و موقعیت پایه‌ها را بدانیم.

پرسشها

۱. آیا معادله‌های ۱ و ۳ هر دو با هم شرایط لازم و کافی برای تعادل مکانیکی را فراهم می‌آورند؟ برای تعادل ایستایی چطور؟

۲. آیا توپ بیسبال در لحظه‌ای که در بالاترین نقطهٔ مسیرش یک پرواز قائم به حال سکون درمی‌آید در حال تعادل است؟

۳. آیا وزنهٔ یک آونگ ساده درهیچ نقطه‌ای از مسیرش در حال تعادل هست؟ اگر چنین نقطه‌ای وجود دارد، آن نقطه کدام است؟

۴. چرخی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد در حال تعادل مکانیکی است، چون هیچ نیرو یا گشتاور خارجی به آن وارد نمی‌شود. ولی ذراتی که چرخ را تشکیل داده‌اند شتاب مرکزگرای $\mathbf{a}$ به‌سوی محور دارند. چون $\mathbf{a} \neq 0$ است، چگونه می‌توان گفت که چرخ در حال تعادل است؟

۵. مثالهایی بیاورید از مواردی که در آنها با آنکه برایند نیروهای وارد بر یک جسم صفر است آن جسم در حال تعادل نیست.

۶. آیا در یک ساختمان مسکونی مرکز جرم و گرانیگاه برهم منطبق‌اند؟ در مورد یک دریاچه چطور؟ تحت چه شرایطی تفاوت میان مرکز جرم و گرانیگاه قابل توجه می‌شود؟ مثالی ذکر کنید.

۷. اگر جسم صلبی را بدون چرخش به‌هوا پرتاب کنیم، در صورتی که بتوانیم از مقاومت هوا چشم بپوشیم، در طی پرواز هم چرخشی کسب نمی‌کند. از این آزمایش ساده در مورد مرکز ثقل (گرانیگاه) چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۸. قهرمان المپیک ژیمناستیک ماری‌لورتون عملیات حیرت‌انگیزی روی پارالل با میله‌های ناهمسطح انجام می‌داد. کسی به‌او می‌گوید که تحلیل دقیق فیلمهای عملیات این ژیمناست نشان می‌دهد که مرکز جرم این ژیمناست در تمام حرکتهایی که انجام می‌دهد همواره، همان‌طور که قوانین فیزیک ایجاب می‌کند، بالاتر از تکیه‌گاه(های) او قرار دارد. دربارهٔ این گفته چه نظری دارید؟

۹. ننویی را بین دو درخت بسته‌ایم و آن‌را تکان می‌دهیم. در کدام‌یک از دو مورد زیر احتمال پاره‌شدن آن بیشتر است: (الف) ننو را با کشیدن طنابهایش سفت بسته‌ایم، و (ب) ننو را شل بسته‌ایم، طوری که مقدار قابل‌توجهی شکم داده است. دربارهٔ پاسخ خودتان توضیح بدهید.

۱۰. یک سر نردبانی را به زمین و سر دیگر آن‌را به دیوار قائمی تکیه داده‌ایم. احتمال لغزش نردبان وقتی روی پلهٔ پایین ایستاده‌ایم بیشتر است یا وقتی روی پلهٔ بالا ایستاده‌ایم؟ توضیح بدهید که چرا.

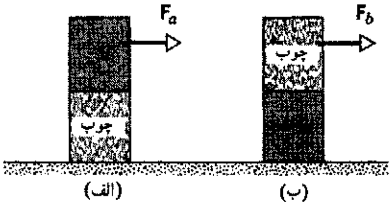
۱۱. کتابی روی میزی قرار گرفته است. میز نیرویی دقیقاً برابر با وزن کتاب به‌طرف بالا به آن وارد می‌کند. میز از کجا "می‌داند" که چه نیرویی به‌طرف بالا باید وارد کند؟ این نیرو، از طریق چه سازوکاری وارد عمل می‌شود؟[1]

۱۲. اگر چنان در برابر یک در باز بایستیم که صورتمان در برابر لبهٔ در و هر پایمان در یک طرف در قرار بگیرد، در می‌یابیم که نمی‌توانیم روی پنجه‌ها بایستیم. چرا؟

۱۳. روی یک صندلی که پشتی آن قائم است بنشینید و سعی کنید بدون خم شدن به‌سمت جلو از جا بلند شوید. چرا نمی‌توانید این کار را انجام بدهید؟

۱۴. یک تیرک موازنهٔ بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند. چگونه؟

۱۵. یک قالب مرکب متشکل از چوب و فلز روی سطح یک میز قرار گرفته است. در کدام‌یک از دو وضعیتی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است می‌توانید قالب را با نیروی کمتری واژگون کنید؟



شکل ۱۶. پرسش ۱۵

۱۶. در مثال ۵، چرا منظور کردن اصطکاک لولا ضروری نیست؟

۱۷. تابلویی توسط دو سیم به دیواری آویزان شده است. سیمها باید در چه راستاهایی باشند تا کشش در آنها به حداقل برسد؟ توضیح بدهید که چطور با آنکه جرم تابلو معین است تعادل تابلو به‌ازای راستاها و کششهای متفاوتی امکان دارد.

۱۸. نشان بدهید که چگونه می‌توان با استفاده از یک نیروسنج اجسامی را وزن کرد که وزن آنها خیلی بیشتر از بزرگترین مقداری است که نیروسنج می‌تواند نشان بدهد.

۱۹. با استفاده از نیروها و گشتاورها توضیح بدهید که چگونه یک درخت می‌تواند در بادهای بسیار شدید تعادلش را حفظ کند.

۲۰. ویروسی که در یک لولهٔ آزمایش پر از مایع در دستگاه سانتریفوژ

۱. نگاه کنید به
"The Smart Table," Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, December 1981, p. 633.

در حال چرخش باشد، از دیدگاه ناظر ساکن در آزمایشگاه، حرکت دایره‌ای یکنواخت (یعنی، حرکت شتابدار) دارد. ولی ناظری که با دستگاه سانتریفوژ می‌چرخد ویروس را بدون شتاب می‌بیند. توضیح بدهید که چگونه این ویروس می‌تواند برای ناظر دوم در حال تعادل باشد ولی برای ناظر اول خیر.

۲۱. قالبی به شکل مکعب‌مستطیل که نسبت اضلاع آن به‌صورت ۱ : ۲ : ۳ است، روی یک سطح افقی قرار دارد. در چه وضعیتی، یعنی وقتی کدام وجه آن در تماس با سطح افقی است، قالب در پایدارترین تعادل است؟

۲۲. آیا جسم واقعاً صلب وجود دارد؟ اگر وجود دارد، مثالی بیاورید. اگر نه، توضیح بدهید که چرا.

۲۳. در صندلی رانندهٔ یک اتومبیل ساکن نشسته‌اید. به شما گفته می‌شود که نیروهایی که زمین به طرف بالا بر هر یک از چهارچرخ وارد می‌کند با هم متفاوت‌اند. تأیید صحت و سقم این ادعا مستلزم بررسی چه عواملی است؟

۲۴. در مثال ۳، اگر دیوار بدون اصطکاک نباشد، آیا قوانین تجربی اصطکاک شرط اضافی دیگری را که برای تعیین مؤلفهٔ قائم نیروی وارد از دیوار به نردبان لازم است فراهم می‌کند؟

۲۵. وقتی استوانهٔ مورد آزمایش در شکل ۱۴ در اثر تنش اعمال شده کشیده می‌شود، افزایش طول می‌دهد. آیا قطر استوانه هم تغییر می‌کند؟ اگر می‌کند چگونه؟

۲۶. آیا مدول یانگ برای لاستیک از مدول یانگ برای فولاد بیشتر است یا کمتر؟ با این معیار، آیا لاستیک کشسانتر از فولاد است؟

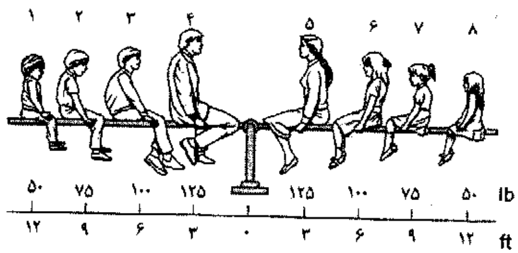
۲۷. یک تیرآهن افقی را که هر سرآن روی تکیه‌گاهی قرار دارد در نقطهٔ وسط بازکرده‌ایم. نشان دهیدکه قسمت بالایی تیرک تحت تراکم است، در حالی‌که قسمت پایینی آن تحت کشش است.

۲۸. چرا در ساختارهای بتونی از میل‌گردهای تقویت‌کننده استفاده می‌کنند؟ (استقامت کششی بتون را با استقامت فشارشی (تراکمی) آن مقایسه کنید.)

مسئله‌ها

بخش ۱۴ـ۱ شرایط تعادل

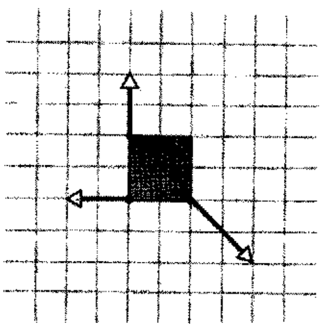
۱. یک خانوادهٔ هشت‌نفره که وزنهای آنها برحسب پوند در شکل ۱۷ نشان داده شده است، یک الاکلنگ را متوازن کرده‌اند. شمارهٔ عضوی



شکل ۱۷. مسئلهٔ ۱

که بیشترین گشتاور را حول تکیه‌گاه (الف) به‌سمت جلوی صفحه و (ب) به‌سمت پشت صفحه ایجاد می‌کند چند است؟

۲. یک جسم صلب مربع شکل با وزن ناچیز تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است، که مطابق شکل ۱۸ به سه گوشهٔ آن وارد می‌شوند. این نیروها در شکل با بردارهایی در مقیاس متناسب رسم شده‌اند. (الف) آیا شرط اول تعادل برقرار است؟ (ب) آیا شرط دوم تعادل برقرار است؟ (ج) اگر جواب هر یک از دو قسمت قبلی منفی است، آیا نیروی چهارمی می‌تواند تعادل جسم را برقرار کند؟ اگر چنین نیرویی وجود دارد، مقدار، جهت و نقطهٔ اثر آن‌را مشخص کنید.

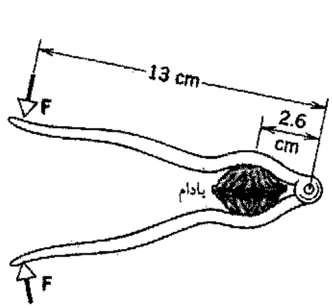


شکل ۱۸. مسئلهٔ ۲

۳. ثابت کنید که هرگاه جسمی فقط تحت تأثیر سه نیرو در تعادل باشد، این نیروها باید هم‌صفحه باشند و خط اثرهای آنها یا باید همدیگر را در یک نقطه قطع کنند یا با هم موازی باشند.

بخش ۱۴ـ۳ مثالهایی از تعادل

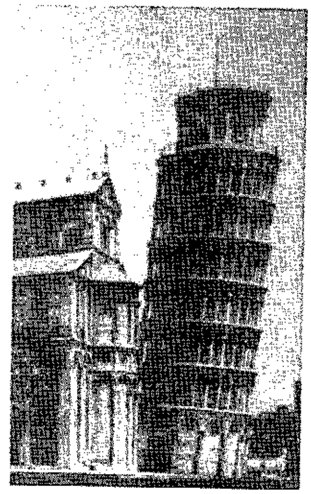
۴. فرض کنید برای اینکه بادامی را بشکنیم لازم است که نیروی ۴۶N از دو طرف به آن وارد کنیم. با استفاده از بادام‌شکن شکل ۱۹ چه نیرویی، F، برای شکستن این بادام لازم است؟



شکل ۱۹. مسئلهٔ ۴

۵. ارتفاع برج کج پیزا ۵۵ متر و قطر آن ۷٫۰ m است (شکل ۲۰). قسمت بالای برج به‌اندازهٔ ۴٫۵m از حالت قائم جابه‌جا شده است. برج را به‌صورت یک استوانهٔ دایره‌ای یکنواخت در نظر بگیرید، (الف) چه جابه‌جایی اضافی دیگری می‌تواند تا برج را به مرز واژگونی برساند؟ (ب) در آن لحظه برج با امتداد قائم چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (فعلاً آهنگ

حرکت برج در قسمت بالایی ۱ میلی‌متر بر سال است.)



شکل ۲۰. مسئلهٔ ۵

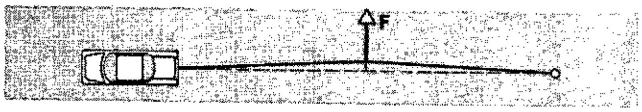
۶. نیروی افقی کوچکی عمود بر یکی از اضلاع بالایی مکعبی که روی یک میز افقی قرار گرفته است، بر وسط آن ضلع وارد می‌شود و مکعب هنوز ساکن است. حالا نیرو را به‌طور یکنواخت افزایش می‌دهیم. آیا مکعب از همان ابتدا واژگون می‌شود یا اینکه شروع به لغزیدن می‌کند؟ ضریب اصطکاک ایستایی بین دوسطح برابر با ۰ر۴۶ است.

۷. صندوقی به شکل مکعب به ضلع ۱ر۲m حاوی یک ماشین صنعتی است. شکل این ماشین چنان است که گرانیگاه صندوق و محتوی آن ۰ر۲۸m بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع شده است. صندوق روی سطح شیبداری قرار دارد که با افق زاویهٔ θ می‌سازد. اگر θ را از صفر به‌تدریج افزایش بدهیم به‌زاویه‌ای می‌رسیم که در آن صندوق یا شروع به لغزیدن می‌کند یا واژگون می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با (الف) ۰ر۶۰ و (ب) ۰ر۷۰ باشد کدام واقعه اتفاق می‌افتد؟ در هر یک از دو مورد زاویهٔ نهایی را معین کنید.

۸. زنجیر قابل انعطافی به‌وزن W بین دو نقطهٔ ثابت هم تراز A و B آویخته شده است (شکل ۲۱). پیدا کنید (الف) نیرویی را که زنجیر به هر یک از دو انتها وارد می‌کند و (ب) کشش زنجیر را در پایین‌ترین نقطه.

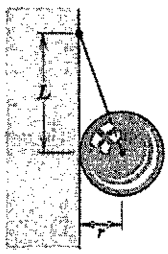
شکل ۲۱. مسئلهٔ ۸

۹. در شکل ۲۲ شخصی می‌خواهد اتومبیلی را که در کنار جاده در گل گیر کرده است، بیرون بکشد. سر طنابی را محکم به سپر جلو اتومبیل گره می‌زند و سر دیگر آن را به یک تیر تلفن که در فاصلهٔ ۶۲ft قرار دارد می‌بندد. سپس به وسط طناب یک نیروی $F = ۱۲۰\,\mathrm{lb}$ را عمود بر طناب وارد می‌کند و مرکز طناب را به اندازهٔ ۱ر۵ft از موقعیت پیشین جابه‌جا می‌کند؛ و اتومبیل کم‌وبیش از جا تکان می‌خورد. نیروی وارد بر اتومبیل از طناب را معین کنید. (طناب در اثر کشش تا حدودی افزایش طول پیدا می‌کند.)



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

۱۰. در شکل ۲۳ کرهٔ یکنواختی به وزن w و شعاع r توسط طنابی به یک دیوار بدون اصطکاک آویزان شده است. محل اتصال طناب به دیوار در فاصلهٔ L بالاتر از مرکز جرم کره است. (الف) کشش طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از دیوار چقدر است؟

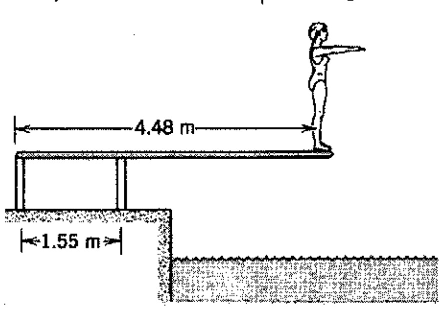


شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جرم اتومبیلی که روی جادهٔ افقی پارک شده است ۱۳۶۰kg و فاصلهٔ بین محورهای جلو و عقب آن ۳۰۵cm است. گرانیگاه این اتومبیل در فاصلهٔ ۱۷۸ سانتی‌متر از محور جلو قرار دارد. کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیرویی که زمین به‌طرف بالا به هر یک از چرخهای جلو وارد می‌کند. و (ب) نیرویی که زمین به‌طرف بالا به هر یک از چرخهای عقب وارد می‌کند. (در هر مورد فرض کنید که نیروهای وارد به دوچرخ با هم مساوی‌اند.)

۱۲. فردی به‌وزن ۱۶۰lb روی یک پل افقی راه می‌رود و در فاصلهٔ سه‌چهارم طول پل از یک انتها می‌ایستد. ساختار پل یکنواخت و وزن آن ۶۰۰lb است. نیروهای قائمی که از تکیه‌گاهها به هر یک از دو انتهای پل وارد می‌شود چقدر است؟

۱۳. شیرجه‌زنی به وزن ۵۸۲N در انتهای یک تخته شیرجهٔ یکنواخت به‌طول ۴ر۴۸m و وزن ۱۴۲N ایستاده است. تخته شیرجه به دو پایه که در فاصلهٔ ۱ر۵۵m از یکدیگر قرار گرفته‌اند متصل شده است (شکل ۲۴). کشش (یا تراکم) را در هر یک از دو پایه محاسبه کنید.



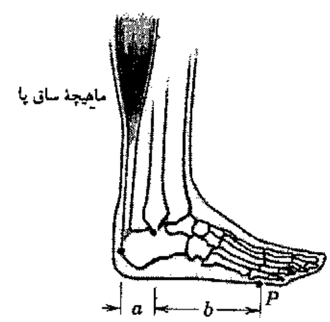
شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. چوب‌متری روی نشانهٔ ۵۰٫۰cm روی لبهٔ کاردی متوازن شده است. اگر دو سکه روی نشانهٔ ۱۲٫۰cm بچسبانیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که چوب‌متر روی نشانه ۴۵٫۵cm متوازن می‌شود. جرم هر سکه ۵٫۰۰g است. جرم چوب‌متر چقدر است؟

۱۵. سه کارگر تیرآهنی را حمل می‌کنند. یکی از آنها یک سر تیر را در دست دارد و دو نفر دیگر دو سر تیرچهٔ باریکی را که از زیر تیرآهن گذشته است گرفته‌اند. تیرچه عمود بر تیرآهن چنان قرار گرفته است که وزن تیرآهن به‌طور مساوی بین سه نفر تقسیم شده است. تیرچه در کجای تیرآهن واقع شده است؟ جرم تیرچه در مقایسهٔ با جرم تیرآهن قابل اغماض است.

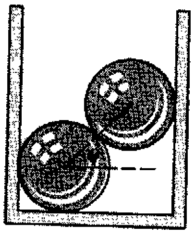
۱۶. یک نظافتچی به جرم ۷۴٫۶kg از نردبانی به جرم ۱۰٫۳kg و طول ۵٫۱۲m استفاده می‌کند. پایهٔ نردبان را در فاصلهٔ ۲٫۴۵m از دیوار می‌گذرد و سر بالایی آن‌را به شیشه ترک‌خورده‌ای تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. وقتی ۳٫۱۰m از طول نردبان را پیموده است شیشه می‌شکند. با چشمپوشی از اصطکاک بین نردبان و شیشه و با این فرض که پایهٔ نردبان نلغزیده است، کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیروی وارد بر شیشه از نردبان درست قبل از شکستن شیشه و (ب) مقدار و جهت نیرویی که درست قبل از شکستن شیشه از زمین به نردبان وارد شده است.

۱۷. در شکل ۲۵ ساختمان ساق و کف پا را مشاهده می‌کنید. وقتی پاشنه از زمین جدا می‌شود، پا عملاً فقط در یک نقطه با زمین در تماس قرار می‌گیرد. این نقطه را در شکل با P مشخص کرده‌ایم. نیروهایی را که باید از ماهیچه و استخوانهای ساق به کف پا وارد شوند تا شخصی به جرم ۶۵kg بتواند روی پنجهٔ یک‌پا بایستد محاسبه کنید. این نیروها را با وزن شخص مقایسه کنید. فرض کنید در این شکل $a = ۵٫۰\text{cm}$ و $b = ۱۵\text{cm}$ است.

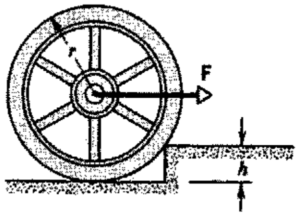


شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. دو کرهٔ یکنواخت یکسان را که وزن هر کدام W است در نظر بگیرید. این کره‌ها در ته یک ظرف مکعب مستطیل شکل روی هم قرار گرفته‌اند (شکل ۲۶) و فرض کنید بین آنها اصطکاک وجود ندارد. خط واصل مراکز دو کره با امتداد افق زاویهٔ θ می‌سازد. نیروهایی را که به هر یک از دو کره از (الف) کف ظرف، (ب) دیواره‌های ظرف و (ج) کرهٔ دیگر وارد می‌شود، پیدا کنید.


شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. برای اینکه چرخی از پله‌ای به ارتفاع h بالا برود، حداقل نیروی افقی، F، که باید به آن وارد شود چقدر است (شکل ۲۷)؟ شعاع چرخ را r و وزن آن‌را W بگیرید.

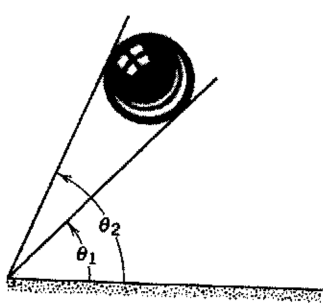


شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. ترازویی تشکیل شده است از میلهٔ صلبی که می‌تواند حول نقطه‌ای که در مرکز میله واقع نیست دوران کند. این ترازو با قراردادن وزنه‌های نابرابر در کفه‌هایی که به دو انتهای میله متصل شده‌اند به‌حالت تعادل درمی‌آید. وقتی جسمی به‌جرم مجهول m را در کفهٔ سمت چپ قرار می‌دهیم ترازو با وزنه‌ای به جرم m_1 در کفهٔ سمت راست متوازن می‌شود و اگر جرم m را در کفهٔ سمت راست قرار بدهیم ترازو با جرم m_2 در کفهٔ سمت چپ متوازن می‌شود. نشان بدهید که

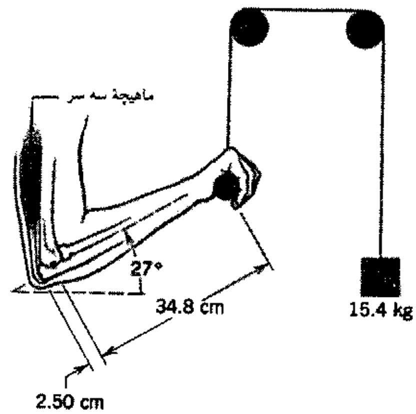
$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

۲۱. کرهٔ یکنواختی به وزن w بین دو سطح شیبدار با زوایای θ_1 و θ_2 (شکل ۲۸) در سکون است. (الف) فرض کنید هیچ اصطکاکی در کار نیست و اندازه و جهت نیروهایی را که سطوح شیبدار به کره وارد می‌کنند پیدا کنید. (ب) اگر اصطکاک را منظور می‌کردیم، چه تغییری حاصل می‌شد؟



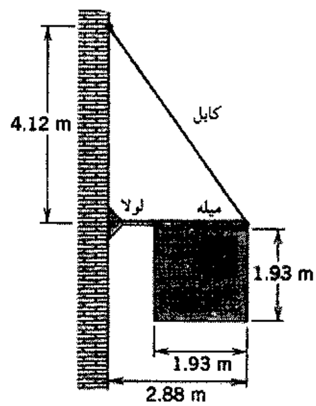
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۱

۲۲. جسمی به جرم ۱۵٫۴kg به‌وسیلهٔ سیستم قرقره‌های شکل ۲۹ به‌سمت بالا کشیده می‌شود. بازو در حالت قائم است و ساعد با افق زاویهٔ ۲۷٫۰° می‌سازد. چه نیروهایی از طرف (الف) ماهیچه سه سر بازو و (ب) استخوان قلم بازو به ساعد وارد می‌شود؟ فرض کنید جرم ساعد و دست روی‌هم برابر با ۲٫۱۳kg است و مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۱۴٫۷cm از نقطهٔ تماس دو استخوان در ساعد واقع شده است. ماهیچهٔ سه‌سر نیروی قائمی به طرف بالا در فاصلهٔ ۲٫۵۰cm از محل تماس دو استخوان (نگاه کنید به شکل) به‌ساعد وارد می‌کند.



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۲

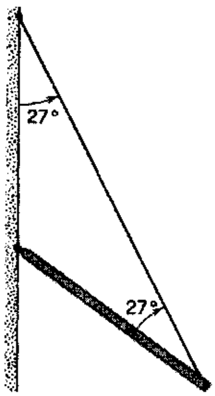
۲۳. در شکل ۳۰ یک تابلوی تبلیغاتی مربع شکل یکنواخت به جرم ۵۲٫۳kg و به ضلع ۱٫۹۳m، از میله‌ای به طول ۲٫۸۸m و با جرم قابل چشمپوشی آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به‌نقطه روی دیوار در فاصلهٔ ۴٫۱۲m متر بالاتر از نقطهٔ اتصال میله به دیوار وصل کرده است. (الف) کشش کابل را حساب کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از دیوار را حساب کنید.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. دریچه‌ای به شکل مربع به ضلع ۳٫۰ft (مساوی با ۰٫۹۱m) در سقف کار گذاشته شده است. این دریچه که ۲۵lb وزن (۱۱kg جرم) دارد از یک طرف لولا شده است و در سمت مقابل دارای یک چفت است. اگر گرانیگاه این دریچه در فاصلهٔ ۴٫۰in (یعنی ۱۰cm) از مرکز دریچه و به لولا نزدیکتر باشد، در این‌صورت (الف) چفت و (ب) لولا چه نیروهایی را باید تحمل کنند؟

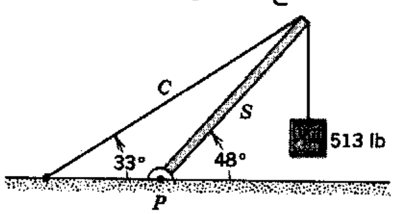
۲۵. یک سر یک تیرچهٔ یکنواخت به‌وزن ۵۲٫۷ lb و طول ۳٫۱۲ft به دیواری لولا شده است. سر دیگر این تیرچه توسط سیمی که هم با تیرچه و هم با دیوار زاویهٔ ۲۷٫۰° می‌سازد، نگه داشته شده است (شکل ۳۱). (الف) کشش سیم را تعیین کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر لولا را به‌دست بیاورید.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۵

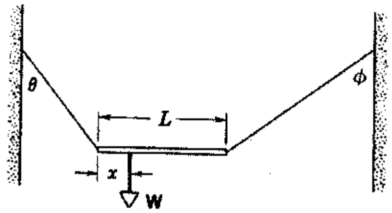
۲۶. جرم دری به ارتفاع ۲٫۱۲m و پهنای ۰٫۹۰۷m برابر با ۲۶٫۸kg است. این در به‌وسیلهٔ دو لولا که در فاصلهٔ ۰٫۲۹۴m از بالا و از پایین در نصب شده‌اند نگه داشته شده است. هر یک از لولاها نصف وزن در را تحمل می‌کند. فرض کنید که گرانیگاه در منطبق بر مرکز هندسی آن است. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهایی را که از در به هر یک از لولاها وارد می‌شود محاسبه کنید.

۲۷. سیستم شکل ۳۲ در حال تعادل است. وزن جسمی که از انتهای شمع S آویخته شده ۵۱۳ lb و وزن خود شمع ۱۰۷ lb است. (الف) کشش کابل C را پیدا کنید و (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی را که از تکیه‌گاه P به شمع وارد می‌شود محاسبه کنید.



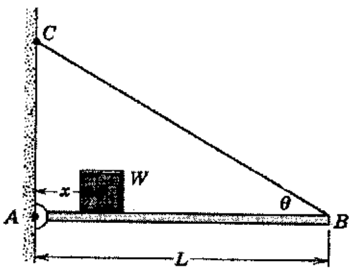
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. میلهٔ غیریکنواختی به وزن W توسط دو نخ بی‌وزن آویخته شده است؛ شکل ۳۳. میله در حالت افقی و در حال سکون است. زاویه‌ای که یکی از نخها با امتداد قائم می‌سازد برابر با θ و زاویهٔ نخ دیگر با امتداد قائم برابر با ϕ است. طول میله L است. فاصلهٔ گرانیگاه میله از انتهای سمت چپ آن، x، چقدر است؟



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۸

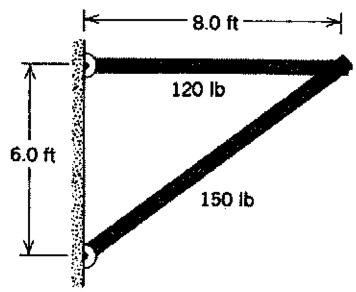
۲۹. میلهٔ نازک افقی AB به‌طول L از سر A به دیوار قائمی لولا شده و سر B آن توسط سیم نازک BC که با افق زاویهٔ θ می‌سازد به دیوار متصل شده است. وزن میله قابل چشم‌پوشی است. فرض کنید وزنهٔ W را می‌توان هر جایی روی این تسمه چسباند؛ مکان وزنه، با فاصلهٔ آن از دیوار، یعنی x، مشخص می‌شود (شکل ۳۴). (الف) کشش سیم، T، را به‌صورت تابعی از x پیدا کنید. مؤلفه‌های (ب) افقی و (ج) قائم نیروی وارد بر تسمه از لولا را محاسبه کنید.



شکل ۳۴. مسئله‌های ۲۹ و ۳۰

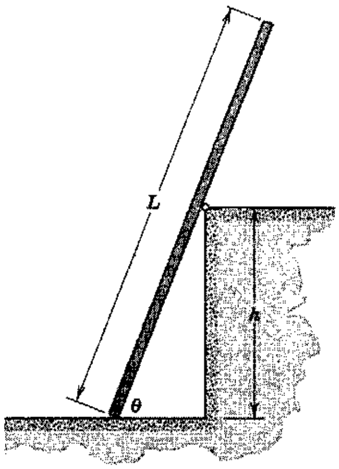
۳۰. در شکل ۳۴، طول میله (L) برابر با $۲٫۷۶m$، و وزن آن w برابر با $۱۹۴N$ است. همچنین، $W = ۳۱۵N$ و $\theta = ۳۲٫۰°$ است. حداکثر کششی که سیم می‌تواند تحمل کند $۵۲۰N$ است. (الف) بیشترین فاصلهٔ وزنه از دیوار، x، قبل از اینکه سیم پاره شود، چقدر است؟ (ب) وقتی W در بیشترین فاصله قرار گرفت، مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از لولا چقدر است؟

۳۱. در شکل ۳۵ دو تیرک یکنواخت هر کدام از یک سر به دیواری لولا شده‌اند. سرهای آزاد این دو تیرک با پیچ و مهره به هم وصل‌اند. مؤلفه‌های افقی و قائم (الف) نیروی وارد بر هر لولا. (ب) نیروی وارد بر هر تیرک از پیچ و مهره را حساب کنید.



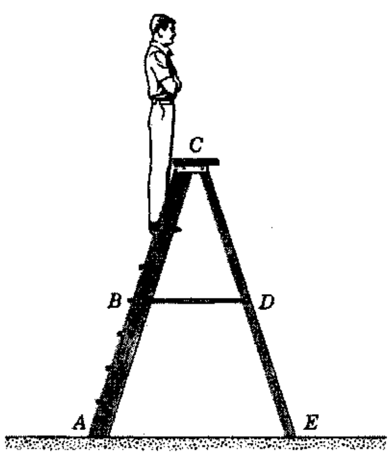
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۳۱

۳۲. یک سر الواری به وزن $۲۷۴N$ و طول $L = ۶٫۲۳m$ روی زمین قرار گرفته است. این الوار را به غلتک بدون اصطکاکی که روی یک دیوار در ارتفاع $h = ۲٫۸۷m$ نصب شده است تکیه داده‌ایم (شکل ۳۶). گرانیگاه الوار در مرکز هندسی آن قرار دارد. این جسم به‌ازای تمام زوایای $\theta \geq ۶۸٫۰°$ متعادل باقی می‌ماند، ولی اگر $\theta < ۶۸٫۰°$ شود شروع به لغزیدن می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته و زمین را تعیین کنید.



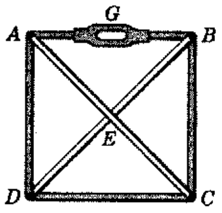
شکل ۳۶. مسئلهٔ ۳۲

۳۳. در نردبان دوطرفهٔ شکل ۳۷ طول هر یک از دو شاخهٔ AC و CE برابر با $۸٫۰ft$ است. این دو قسمت در نقطهٔ C به هم لولا شده‌اند. طول میلهٔ نگهدارنده BD که وسط دو شاخه را به‌هم وصل می‌کند برابر با $۲٫۵ft$ است. شخصی به وزن $۱۹۲lb$ روی نردبان $۶٫۰ft$ بالا می‌رود. با فرض اینکه زمین بدون اصطکاک باشد، و از وزن نردبان هم بتوانیم چشم‌پوشی کنیم، کمیتهای زیر را پیدا کنید: (الف) کشش در میلهٔ نگهدارنده و (ب) نیروهای وارد بر نردبان از طرف زمین. (راهنمایی: بهتر است هر یک از دو جزء نردبان را منزوی کنید و بعد شرایط تعادل را روی هر کدام اعمال کنید.)



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۳۳

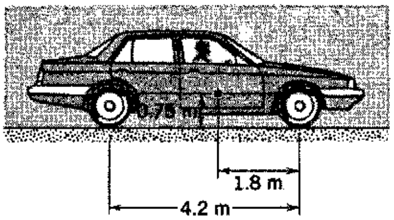
۳۴. به کمک سگک پیچشی G، در میلهٔ AB از کلاف مربعی $ABCD$ در شکل ۳۸، کشش T را ایجاد کرده‌ایم. نیروهای ایجاد شده در سایر شاخه‌های کلاف را تعیین کنید. قطرهای AC و BD، بدون درگیری با هم، در نقطهٔ E یکدیگر را قطع می‌کنند. ملاحظات مربوط به تقارن ممکن است این مسئله و مسائل مشابه را تا حد زیادی ساده‌تر کند.



شکل ۳۸. مسئلهٔ ۳۴

۳۵. یک جعبهٔ مکعب شکل که با ماسه پر شده است ۸۹۲N وزن دارد. می‌خواهیم این جعبه را با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از لبه‌های بالایی آن "بغلتانیم". (الف) کمترین نیروی لازم چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک ایستایی دست‌کم باید چقدر باشد؟ (ج) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیرویی که به این منظور باید مستقیماً به جعبه وارد شود چقدر است؟

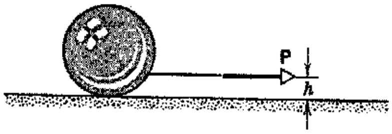
۳۶. اتومبیلی که در یک جادهٔ افقی در حرکت است ناگزیر از یک توقف اضطراری می‌شود. راننده طوری ترمز می‌گیرد که تمام چرخها قفل می‌شوند و اتومبیل می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده ۰٫۴۰ است. فاصلهٔ بین محور جلو و محور عقب ۴٫۲۰m است. مرکز جرم اتومبیل در فاصلهٔ ۱٫۸۰m از محور جلو و ۰٫۷۵۰m بالاتر از سطح جاده است (شکل ۳۹). وزن اتومبیل با راننده‌اش مجموعاً ۱۱٫۰kN است. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) شتاب کندکنندهٔ ناشی از ترمز، (ب) نیروی قائم وارد بر هر یک از چرخهای جلو و عقب و (ج) نیروی وارد از ترمز به هر کدام از چرخهای جلو و عقب. (راهنمایی: اتومبیل با آنکه در تعادل انتقالی نیست، در تعادل دورانی هست.)



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. این مسئلهٔ یکی از مسائل مشهور تعادل است[1] می‌خواهیم آجرهای یکنواختی را چنان روی‌هم قرار بدهیم که (بدون فروریختن) بیشترین پیش‌آمدگی را داشته باشند. این خواسته به این ترتیب عملی می‌شود که گرانیگاه آجر بالایی درست روی لبهٔ آجر زیری‌اش قرار بگیرد، گرانیگاه مجموعهٔ دو آجر بالایی هم درست روی لبهٔ سومین آجر از بالا قرار بگیرد، و به همین ترتیب تا آخر. (الف) این معیار بیشترین پیش‌آمدگی را توجیه کنید؛ و بیشترین پیش‌آمدگی را برای یک مجموعهٔ چهار آجری تعیین کنید. (ب) نشان بدهید که با ادامهٔ این کار می‌توان به هر اندازهٔ دلخواهی پیش‌برآمدگی داشت. (مارتین گاردنر در مقاله‌ای دربارهٔ این موضوع می‌گوید: "با یک دسته کارت شامل ۵۲ برگ" که اولین آنها روی میزی درست مماس بر لبهٔ میز قرار داشته باشد، می‌توانید پیش‌آمدگی‌ای بسازید که به اندازهٔ کمی بیشتر از $۲\frac{۱}{۲}$ برابر طول یک کارت از لبهٔ میز جلو آمده باشد.) (ج) حالا، فرض کنید آجرهای یکنواخت را چنان روی‌هم می‌چینیم که انتهای هر یک به‌اندازهٔ کسر ثابت $۱/n$ طول آجر (L) از آجر زیری‌اش جلوتر آمده باشد. به‌این ترتیب، قبل از فروریختن ساختار، چه تعداد آجر (N) می‌توانیم روی هم بچینیم؟ معقول بودن پاسخی را که پیدا کرده‌اید در مورد $n = ۱$، $n = ۲$، $n = \infty$ بررسی کنید.

۳۸. در شکل ۴۰ کرهٔ همگنی به شعاع r و به وزن W، تحت تأثیر نیروی افقی ثابت $\mathbf{P}$ که به ریسمان متصل به کره وارد می‌شود می‌لغزد. (الف) نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره و زمین μ باشد، ارتفاع h از رابطهٔ $h = r(۱ - \mu W/P)$ به‌دست می‌آید. (ب) نشان بدهید که کره در چنین شرایطی در تعادل انتقالی نیست. آیا نقطه‌ای وجود دارد که حول آن کره در تعادل دورانی باشد؟ (ج) آیا می‌توان با انتخاب مقدار متفاوتی برای h کره را هم در تعادل دورانی و هم در تعادل انتقالی نگه داشت؟ با انتخاب جهت متفاوتی برای $\mathbf{P}$ چطور؟ پاسخهای خودتان را توضیح بدهید.



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۸

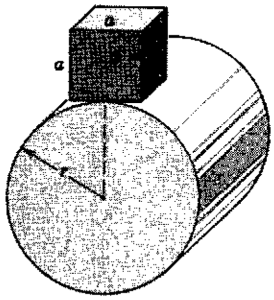
بخش ۱۴ـ۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

۳۹. جامی با شعاع انحنای r روی یک میز افقی قرار گرفته است. نشان بدهید که این جام فقط در صورتی در تعادل پایدار حول نقطهٔ مرکز انحنایش خواهد بود که ارتفاع مرکز جرم ماده انباشته شده در جام نسبت به مرکز جام از r بیشتر نباشد.

---

[1] نگاه کنید به *Scientific American*, November 1964, p. 128.

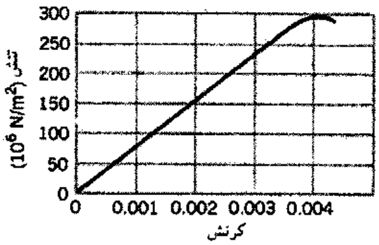
۴۰. مکعبی به ضلع a با چگالی یکنواخت روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع r در حال تعادل است (شکل ۴۱). نشان بدهید که شرط تعادل پایدار برای مکعب، با فرض اینکه اصطکاک برای جلوگیری از لغزش کافی باشد، این است که $r > a/2$ باشد.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۴۰

بخش ۱۴ـ۵ کشسانی

۴۱. شکل ۴۲ منحنی تنش‌ـکرنش را برای سنگ شیشه نشان می‌دهد. مدول یانگ را برای این ماده محاسبه کنید.



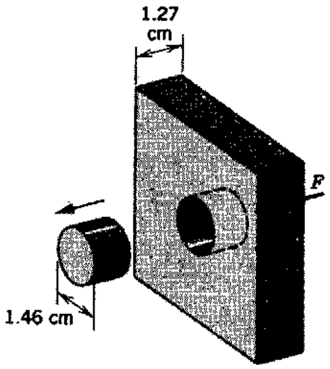
شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۱

۴۲. در یک حادثهٔ سقوط، صخره‌نوردی به جرم ۹۵kg از انتهای طنابی به‌طول ۱۵m و قطر ۹٫۶mm آویزان می‌ماند. اگر طناب به‌اندازهٔ ۲٫۸cm افزایش طول پیدا کند، مدول یانگ برای آن چقدر است؟

۴۳. یک اتاقک بالابر از یک کابل فولادی به قطر ۲٫۵۲cm آویزان است. جرم کل اتاقک و مسافرانش ۸۷۳kg است. وقتی اتاقک ۴۲٫۶m پایین‌تر از موتور بالابر واقع شده باشد، افزایش طول کابل چقدر است؟ (جرم کابل را (در مقایسه با اتاقک) ناچیز فرض کنید.)

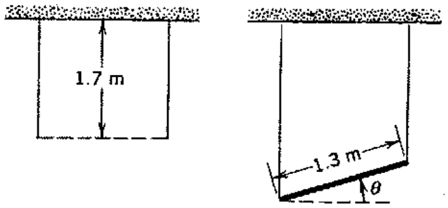
۴۴. یک دیرک آلومینیمی افقی به قطر ۴۸٫۰cm به‌اندازهٔ ۵٫۳۰cm از دیواری بیرون آمده است. وزنه‌ای به جرم ۱۲۰kg از انتهای این دیرک آویزان است. مدول برشی آلومینیم $۳٫۰۰ \times ۱۰^{۱۰} N/m^2$ است. (الف) تنش برشی وارد بر دیرک را محاسبه کنید. (ب) انحراف قائم انتهای دیرک را تعیین کنید.

۴۵. برای ایجاد سوراخی به‌قطر ۱٫۴۶cm در یک ورق فولادی به ضخامت ۱٫۲۷cm چه نیرویی لازم است (شکل ۴۳)؟ استقامت برشی نهایی فولاد $۳۴۵MN/m^2$ است.



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۵

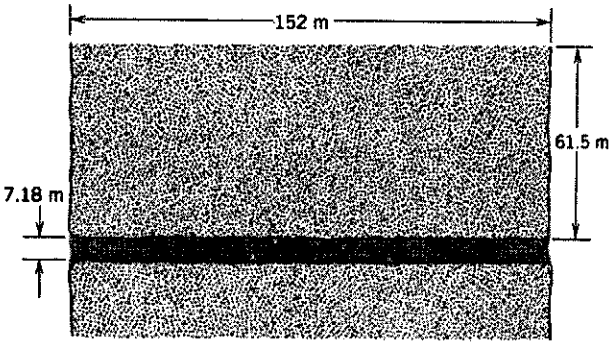
۴۶. در شکل ۴۴ میلهٔ یکنواختی به جرم ۴٫۷kg و طول ۱٫۳m توسط دو سیم از دو انتهایش آویزان شده است. یکی از سیمها فولادی و قطر آن ۱٫۲mm است؛ سیم دیگر آلومینیمی و قطر آن ۰٫۸۴mm است. قبل از آویختن میله، طول سیمها با هم یکی و برابر با ۱٫۷m است. زاویهٔ بین میله و امتداد افق، θ، را تعیین کنید. (از تغییر قطر سیمها چشم بپوشید، میله و سیمها در یک صفحه قرار دارند.)



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۶

۴۷. پرهٔ چرخانه‌ای به طول ۵٫۲۷m از موادی به چگالی $۴٫۵۵g/cm^3$ و استقامت کششی نهایی $۴۴۶MN/m^2$ ساخته شده است. بیشترین سرعت دورانی ممکن برای این پره چقدر است؟ فرض کنید دوران حول محوری عمود بر پره که از یک انتهای آن می‌گذرد انجام می‌شود.

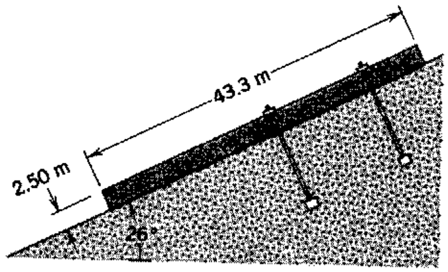
۴۸. می‌خواهیم تونلی به طول ۱۵۲m، ارتفاع ۷٫۱۸m، و عرض ۵٫۷۷m (با سقف تخت) در فاصلهٔ ۶۱٫۵m پایین‌تر از سطح زمین بسازیم (شکل ۴۵). سقف این تونل قرار است که روی ستونهای



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۴۸

فولادی مربعی با سطح مقطع ۹۶۲cm² تکیه کنید. چگالی مواد تشکیل‌دهندهٔ زمین ۲٫۸۳g/cm³ است. (الف) حساب کنید که این ستونها باید چه وزنی را تحمل کنند. (ب) اگر بخواهیم ضریب ایمنی در برابر شکستگی برابر با ۲ باشد، به چه تعداد ستون نیاز داریم؟

۴۹. تخته‌سنگ مکعب مستطیل شکلی روی یک سطح شیبدار ۲۶٫۰° قرارگرفته است (شکل ۴۶). ابعاد این تخته‌سنگ عبارت‌اند از ۴۳٫۳m طول، ۲٫۵۰m ضخامت و ۱۲٫۲m عرض. چگالی سنگ ۳٫۱۷g/cm³ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته‌سنگ و سطح زیر آن ۰٫۳۹۰ است. (الف) مؤلفه وزن تخته‌سنگ در راستای سطح شیبدار چقدر است؟ (ب) نیروی اصطکاک ایستایی چقدر است؟ (ج) جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) را مقایسه کنید تا ببینید که تخته‌سنگ بدجوری در معرض لغزش است. تنها همچسبی بین تخته‌سنگ و سطح شیبدار مانع لغزیدن می‌شود. می‌خواهیم تخته‌سنگ را با میخهایی که عمود بر سطح شیبدار در آن فرو می‌ورد "پابرجا" کنیم، طوری که بدون اتکا با به همچسبی نیز در تعادل پایدار باشد. اگر سطح مقطع هر کدام از پیچهای مخصوص سنگ ۶٫۳۸cm² واستقامت برشی آنها ۳۶۲MN/m² باشد، دست‌کم به چند پیچ نیاز داریم؟ (پیچها سفت نمی‌شوند و بنابراین تأثیری بر نیروهای قائم نمی‌گذارند.)



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۴۹

۵۰. میله‌ای فلزی به طول L و سطح مقطع A را که فاصلهٔ اتمهایش در حالت تعادل x است و مدول یانگ برای آن E است در نظر بگیرید. وقتی نیروی کششی F به میله وارد می‌شود، طول میله به‌اندازهٔ ΔL زیاد می‌شود. برای محاسبهٔ ثابت نیروی اتمی (k)، عبارتی برای (الف) تعداد زنجیره‌های اتمی در هر سطح مقطع، (ب) تعداد اتمهای موجود در زنجیره‌ای به‌طول L، (ج) افزایش طول میکروسکوپی Δx بین اتمها و (د) نیروی کششی f بین اتمها، به‌دست بیاورید. (ه) نیرو را به‌صورت $f = k\Delta x$ بنویسید و نشان بدهید که $k = Ex$ است. (و) مقدار k را برای یک فلز نوعی که برای آن $E = ۱٫۲\text{GN/m}^2$ و $x = ۰٫۱۶\text{nm}$ است، محاسبه کنید.

پیوست الف

سیستم بین‌المللی یکاها (SI)[۱]

یکاهای اصلی SI

کمیت	یکا	نماد	تعریف
طول	متر	m	" ... طول مسیری که نور آن‌را در خلأ در $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه طی می‌کند." (۱۹۸۳)
جرم	کیلوگرم	kg	" ... این نمونه [استوانهٔ خاصی از جنس پلاتین-ایریدیم] از این پس به‌عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود." (۱۸۸۹)
زمان	ثانیه	s	" ... مدتی برابر با ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیوم ۱۳۳." (۱۹۶۷)
جریان الکتریکی	آمپر	A	" ... جریان ثابتی که اگر در دو سیم راست به‌طول نامحدود و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز که به‌فاصلهٔ یک متر موازی با یکدیگر در خلأ واقع شده‌اند برقرار باشد، نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون به‌ازای هر متر از طول سیمها میان آنها ایجاد کند." (۱۹۴۶)
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	" ... $\frac{۱}{۲۷۳٫۱۶}$ دمای مطلق نقطهٔ سه‌گانهٔ آب." (۱۹۶۷)
مقدار ماده	مول	mol	" ... مقدار مادهٔ موجود در هر سیستمی که تعداد اجزای بنیادی آن برابر با تعداد اتمهای موجود در ۰٫۰۱۲ کیلوگرم از کربن ۱۲ باشد." (۱۹۷۱)
شدت روشنایی	شمع	cd	" ... شدت روشنایی ناشی از تابش عمودی سطحی برابر با $\frac{۱}{۶۰۰۰۰۰}$ مترمربع از جسم سیاهی در دمای ذوب پلاتین و فشار ۱۰۱۳۲۵ نیوتون بر مترمربع." (۱۹۶۷)

۱) این تعریفها (در تاریخهای یاد شده) در "کنفرانس عمومی اوزان و [illegible] اختیار شده است. برگرفته از
"The International System of Units (SI)," National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition.

بعضی از یکاهای فرعی SI

کمیت	یکا	نماد	یکای معادل
سطح	مترمربع	m^2	
حجم	مترمکعب	m^3	
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
چگالی (جرمی)	کیلوگرم بر مترمکعب	kg/m^3	
سرعت	متر بر ثانیه	m/s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s	
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	m/s^2	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	rad/s^2	
نیرو	نیوتون	N	$kg \cdot m/s^2$
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
کار، انرژی	ژول	J	$N \cdot m$
توان	وات	W	J/s
مقدار الکتریسیته	کولن	C	$A \cdot s$
اختلاف پتانسیل	ولت	V	$N \cdot m/C$
میدان الکتریکی	ولت بر متر	V/m	N/C
مقاومت الکتریکی	اهم	Ω	V/A
ظرفیت	فاراد	F	$A \cdot s/V$
شار مغناطیسی	وبر	Wb	$V \cdot s$
القا	هانری	H	$V \cdot s/A$
میدان مغناطیسی	تسلا	T	$Wb/m^2, N/A \cdot m$
آنتروپی	ژول بر کلوین	J/K	
ظرفیت گرمایی ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	$J/(kg \cdot K)$	
رسانایی گرمایی	وات بر متر کلوین	$W/(m \cdot K)$	
شدت تابش	وات بر استرادیان	W/sr	

یکاهای مکمل SI

کمیت	یکا	نماد
زاویه	رادیان	rad
زاویهٔ فضایی	استرادیان	sr

پیوست ب

بعضی ثابتهای بنیادی فیزیک

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)	
			مقدار[1]	عدم قطعیت[2]
سرعت نور در خلأ	c	$۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸}$ m/s	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	تقریباً صفر
بار بنیادی	e	$۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$ C	۱٫۶۰۲۱۷۷۳۳	۰٫۳۰
جرم سکون الکترون	m_e	$۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg	۹٫۱۰۹۳۸۹۷	۰٫۵۹
ثابت گذردهی	$\varepsilon_۰$	$۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$ F/m	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	تقریباً صفر
ثابت تراوایی	$\mu_۰$	$۱٫۲۶ \times ۱۰^{-۶}$ H/m	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	تقریباً صفر
جرم سکون الکترون[3]	m_e	$۵٫۴۹ \times ۱۰^{-۴}$ u	۵٫۴۸۵۷۹۹۰۲	۰٫۰۲۳
جرم سکون نوترون[3]	m_n	۱٫۰۰۸۷u	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۰۴	۰٫۰۱۴
جرم سکون اتم هیدروژن[3]	$m(^{۱}\mathrm{H})$	۱٫۰۰۷۸u	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۳۵	۰٫۰۱۱
جرم سکون اتم دوتریم[3]	$m(^{۲}\mathrm{H})$	۲٫۰۱۴۱u	۲٫۰۱۴۱۰۱۷۷۹	۰٫۰۱۲
جرم سکون اتم هلیم[3]	$m(^{۴}\mathrm{He})$	۴٫۰۰۲۶u	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۴	۰٫۰۱۲
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_e	$۱٫۷۶ \times ۱۰^{۱۱}$ C/kg	۱٫۷۵۸۸۱۹۶۲	۰٫۳۰
جرم سکون پروتون	m_p	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg	۱٫۶۷۲۶۲۳۱	۰٫۵۹
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p/m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۷۰۱	۰٫۰۲۰
جرم سکون نوترون	m_n	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg	۱٫۶۷۴۹۲۸۶	۰٫۵۹
جرم سکون موئون	m_μ	$۱٫۸۸ \times ۱۰^{-۲۸}$ kg	۱٫۸۸۳۵۳۲۷	۰٫۶۱
ثابت پلانک	h	$۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$ J·s	۶٫۶۲۶۰۷۵۵	۰٫۶۰
طول موج کامپتونی الکترون	λ_e	$۲٫۴۳ \times ۱۰^{-۱۲}$ m	۲٫۴۲۶۳۱۰۵۸	۰٫۰۸۹
ثابت عمومی گازها	R	۸٫۳۱J/mol.K	۸٫۳۱۴۵۱۰	۸٫۴
ثابت آووگادرو	N_A	$۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ mol$^{-۱}$	۶٫۰۲۲۱۳۶۷	۰٫۵۹

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)	
			مقدار	عدم قطعیت
ثابت بولتزمن	k	$۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\,\mathrm{J/K}$	۱٫۳۸۰۶۵۱۳	۱٫۸
حجم مولی گاز ایده‌آل در شرایط متعارفی	V_m	$۲٫۲۴ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{m^۳/mol}$	۲٫۲۴۱۳۹۹۲	۱٫۷
ثابت فاراده	F	$۹٫۶۵ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{C/mol}$	۹٫۶۴۸۵۳۰۹	۰٫۳۰
ثابت استفان-بولتزمن	σ	$۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}\,\mathrm{W/m^۲.K^۴}$	۵٫۶۷۰۳۹۹	۶٫۸
ثابت ریدبرگ	R	$۱٫۱۰ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m^{-۱}}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۷۱	۰٫۰۰۰۳۶
ثابت گرانش	G	$۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^۳/s^۲.kg}$	۶٫۶۷۲۵۹	۱۲۸
شعاع بور	$a_۰$	$۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$	۵٫۲۹۱۷۷۲۴۹	۰٫۰۴۵
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹٫۲۸ \times ۱۰^{-۲۴}\,\mathrm{J/T}$	۹٫۲۸۴۷۷۰۰	۰٫۳۴
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{J/T}$	۱٫۴۱۰۶۰۷۶۱	۰٫۳۴
مگنتون بور	μ_B	$۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}\,\mathrm{J/T}$	۹٫۲۷۴۰۱۵۴	۰٫۳۴
مگنتون هسته	μ_N	$۵٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{J/T}$	۵٫۰۵۰۷۸۶۵	۰٫۳۴
ثابت ساختار ریز	α	۱/۱۳۷	۱/۱۳۷٫۰۳۵۹۸۹۵	۰٫۰۴۵
کوانتوم شار مغناطیسی	$\Phi_۰$	$۲٫۰۷ \times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{Wb}$	۲٫۰۶۷۸۳۴۶۱	۰٫۳۰
مقاومت هال کوانتیده	R_H	$۲۵۸۰۰\,\Omega$	۲۵۸۱۲٫۸۰۵۶	۰٫۰۴۵

۱) با همان یکا و همان توان دهِ مقدار محاسباتی.

۲) قسمت در میلیون.

۳) جرم برحسب یکای اتمی جرم، $۱\mathrm{u} = ۱٫۶۶۰۵۴۰۲ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$.

۴) شرایط متعارفی (دما و فشار استاندارد)=دمای صفر درجهٔ سلیسیوس و فشار ۱٫۰ بار.

پیوست ج

اطلاعات نجومی

خورشید و زمین و ماه

ویژگی	خورشید [۱]	زمین	ماه
جرم (kg)	$۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	$۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۷٫۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$
شعاع متوسط (m)	$۶٫۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۱٫۷۴ \times ۱۰^{۶}$
چگالی متوسط ($kg/m^۳$)	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب ثقل در سطح ($m/s^۲$)	۲۷۴	۹٫۸۱	۱٫۶۷
سرعت گریز (km/s)	۶۱۸	۱۱٫۲	۲٫۳۸
دورهٔ تناوب[۲] چرخش (d)	۲۶ تا ۳۷[۳]	۰٫۹۹۷	۲۷٫۳
شعاع متوسط مدار (km)	$۲٫۶ \times ۱۰^{۱۷}$ [۴]	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{۸}$ [۵]	$۳٫۸۲ \times ۱۰^{۵}$ [۶]
دورهٔ تناوب مداری	$۲٫۴ \times ۱۰^{۸}$ سال[۴]	۱٫۰۰ سال[۵]	۲۷٫۳ روز[۶]

۱) توان تابشی خورشید $۳٫۹۰ \times ۱۰^{۲۶} W$ است؛ با فرض تابش عمودی، انرژی خورشید با آهنگ $۱۳۸۰ W/m^۲$ به بالای جو زمین می‌رسد.

۲) نسبت به ستاره‌های دور.

۳) خورشید ــ که کره‌ای از گاز است ــ مثل جسم صلب نمی‌چرخد؛ دورهٔ چرخش آن در استوایش ۲۶ روز و در قطبهایش ۳۷ روز است.

۴) حول مرکز کهکشان.

۵) حول خورشید.

۶) حول زمین.

خصوصیات سیاره‌های منظومهٔ شمسی

	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتون
فاصلهٔ متوسط از خورشید ($۱۰^۶ km$)	۵۷٫۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دورهٔ گردش به‌دور خورشید (سال)	۰٫۲۴۱	۰٫۶۱۵	۱٫۰۰	۱٫۸۸	۱۱٫۹	۲۹٫۵	۸۴٫۰	۱۶۵	۲۴۸
دورهٔ چرخش[۱] (روز)	۵۸٫۷	۲۴۳	۰٫۹۹۷	۱٫۰۳	۰٫۴۰۹	۰٫۴۲۶	۰٫۴۵۱[۲]	۰٫۶۵۸	۶٫۳۹
سرعت مداری (km/s)	۴۷٫۹	۳۵٫۰	۲۹٫۸	۲۴٫۱	۱۳٫۱	۹٫۶۴	۶٫۸۱	۵٫۴۳	۴٫۷۴
تمایل محور به مدار	۰٫۰°	۲٫۶°	۲۳٫۵°	۲۴٫۰°	۳٫۰۸°	۲۶٫۷°	۸۲٫۱°	۲۸٫۸°	۶۵°
تمایل مدار به مدار زمین	۷٫۰۰°	۳٫۳۹°	—	۱٫۸۵°	۱٫۳۰°	۲٫۴۹°	۰٫۷۷°	۱٫۷۷°	۱۷٫۲°
خروج از مرکز مدار	۰٫۲۰۶	۰٫۰۰۶۸	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۹۳۴	۰٫۰۴۸۵	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۴۷۲	۰٫۰۰۸۶	۰٫۲۵۰
قطر استوایی (km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۰	۱۲۸۰۰	۶۷۹۰	۱۴۳۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۳۴۰۰
جرم (نسبت به زمین = ۱)	۰٫۰۵۵۸	۰٫۸۱۵	۱٫۰۰۰	۰٫۱۰۷	۳۱۸	۹۵٫۱	۱۴٫۵	۱۷٫۲	۰٫۰۰۲
چگالی متوسط (g/cm^3)	۵٫۶۰	۵٫۲۰	۵٫۵۲	۳٫۹۵	۱٫۳۱	۰٫۷۰۴	۱٫۲۱	۱٫۶۷	۰٫۵(?)
شتاب ثقل در سطح[۳] (m/s^2)	۳٫۷۸	۸٫۶۰	۹٫۷۸	۳٫۷۲	۲۲٫۹	۹٫۰۵	۷٫۷۷	۱۱٫۰	۰٫۰۳
سرعت گریز (km/s)	۴٫۳	۱۰٫۳	۱۱٫۲	۵٫۰	۵۹٫۵	۳۵٫۶	۲۱٫۲	۲۳٫۶	۱٫۳
تعداد قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	۱۶+حلقه‌ها	۱۹+حلقه‌ها	۱۵+حلقه‌ها	۸+حلقه‌ها	۱

۱) نسبت به ستاره‌های دور.

۲) جهت چرخش در خلاف جهت گردش مداری است.

۳) در استوای سیاره.

پیوست د

خواص عناصر

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^{3}) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Actinum	Ac	۸۹	(۲۲۷)	—	۱۰۵۰	۳۲۰۰	۰٫۰۹۲
آلومینیم	Aluminium	Al	۱۳	۲۶٫۹۸۱۵	۲٫۶۹۹	۶۶۰	۲۴۶۷	۰٫۹۰۰
آمریکیم	Americium	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳٫۷	۹۹۴	۲۶۰۷	—
آنتیموان	Antimony	Sb	۵۱	۱۲۱٫۷۵	۶٫۶۹	۶۳۰٫۵	۱۷۵۰	۰٫۲۰۵
آرگون	Argon	Ar	۱۸	۳۹٫۹۴۸	۱٫۶۶۲۶ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۱۸۹٫۲	−۱۸۵٫۷	۰٫۵۲۳
آرسنیک	Arsenic	As	۳۳	۷۴٫۹۲۱۶	۵٫۷۲	۸۱۷(۲۸ جو)	۶۱۳	۰٫۳۳۱
استاتین	Astatine	At	۸۵	(۲۱۰)	—	۳۰۲	۳۳۷	—
باریم	Barium	Ba	۵۶	۱۳۷٫۳۳	۳٫۵	۷۲۵	۱۶۴۰	۰٫۲۰۵
برکلیم	Berkelium	Bk	۹۷	(۲۴۷)	—	—	—	—
بریلیم	Beryllium	Be	۴	۹٫۰۱۲۲	۱٫۸۴۸	۱۲٫۷۸	۲۹۷۰	۱٫۸۳
بیسموت	Bismuth	Bi	۸۳	۲۰۸٫۹۸۰	۹٫۷۵	۲۷۱٫۳	۱۵۶۰	۰٫۱۲۲
بور	Boron	B	۵	۱۰٫۸۱۱	۲٫۳۴	۲۰٫۷۹	۲۵۵۰	۱٫۱۱
برم	Bromine	Br	۳۵	۷۹٫۹۰۹	۳۱۲ (مایع)	−۷٫۲	۵۸	۰٫۲۹۳
کادمیم	Cadmium	Cd	۴۸	۱۱۲٫۴۱	۸٫۶۵	۳۲۰٫۹	۷۶۵	۰٫۲۲۶
کلسیم	Calcium	Ca	۲۰	۴۰٫۰۸	۱٫۵۵	۸۳۹	۱۴۸۴	۰٫۶۲۴
کالیفرنیم	Californium	Cf	۹۸	(۲۵۱)	—	—	—	—
کربن	Carbon	C	۶	۱۲٫۰۱۱	۲٫۲۵	۳۵۵۰	—	۰٫۶۹۱
سریم	Cerium	Ce	۵۸	۱۴۰٫۱۲	۶٫۷۶۸	۷۹۸	۳۴۴۳	۰٫۱۸۸
سزیم	Cesium	Cs	۵۵	۱۳۲٫۹۰۵	۱٫۸۷۳	۲۸٫۴۰	۶٫۶۹	۰٫۲۴۳
کلر	Chlorine	Cl	۱۷	۳۵٫۴۵۳	۳٫۲۱۴ $\times$ ۱۰$^{-۳}$(۰°C)	−۱۰۱	−۳۴٫۶	۰٫۴۸۶
کرم	Chromium	Cr	۲۴	۵۱٫۹۹۶	۷٫۱۹	۱۸۵۷	۲۶۷۲	۰٫۴۴۸
کبالت	Cobalt	Co	۲۷	۵۸٫۹۳۳۲	۸٫۸۵	۱۴۹۵	۲۸۷۰	۰٫۴۲۳
مس	Copper	Cu	۲۹	۶۳٫۵۴	۸٫۹۶	۱۰۸۳٫۴	۲۵۶۷	۰٫۳۸۵

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^{3}) در ۲۰(°C)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g° · C) در ۲۵(°C)
کوریم	Curium	Cm	۹۶	(۲۴۷)	—	۱۳۴۰	—	—
دیسپروزیم	Dysprosium	Dy	۶۶	۱۶۲٫۵۰	۸٫۵۵	۱۴۱۲	۲۵۶۷	۰٫۱۷۲
اینشتینیم	Einsteinium	Es	۹۹	(۲۵۲)	—	—	—	—
اربیم	Erbium	Er	۶۸	۱۶۷٫۲۶	۹٫۰۷	۱۵۲۹	۲۸۶۸	۰٫۱۶۷
اروپیم	Europium	Eu	۶۳	۱۵۱٫۹۶	۵٫۲۴۵	۸۲۲	۱۵۲۷	۰٫۱۶۳
فرمیم	Fermium	Fm	۱۰۰	(۲۵۷)	—	—	—	—
فلوئور	Fluorine	F	۹	۱۸٫۹۹۸۴	۱٫۶۹۶ $\times$ ۱۰$^{-۳}$(۰°C)	−۲۱۹٫۶	−۱۸۸٫۲	۰٫۷۵۳
فرانسیم	Francium	Fr	۸۷	(۲۲۳)	—	(۲۷)	(۶۷۷)	—
گادولینیم	Gadolinium	Gd	۶۴	۱۵۷٫۲۵	۷٫۹۰	۱۳۱۳	۳۲۷۳	۰٫۲۳۴
گالیم	Gallium	Ga	۳۱	۶۹٫۷۲	۵٫۹۰۷	۲۹٫۷۸	۲۴۰۳	۰٫۳۷۷
ژرمانیم	Germanium	Ge	۳۲	۷۲٫۶۱	۵٫۳۲۳	۹۳۷٫۴	۲۸۳۰	۰٫۳۲۲
طلا	Gold	Au	۷۹	۱۹۶٫۹۶۷	۱۹٫۳۲	۱۰۶۴٫۴۳	۲۸۰۸	۰٫۱۳۱
هافنیم	Hafnium	Hf	۷۲	۱۷۸٫۴۹	۱۳٫۳۱	۲۲۲۷	۴۶۰۲	۰٫۱۴۴
هلیم	Helium	He	۲	۴٫۰۰۲۶	۰٫۱۶۶۴ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۲۷۲٫۲	−۲۶۸٫۹	۵٫۲۳
هولمیم	Holmium	Ho	۶۷	۱۶۴٫۹۳۰	۸٫۷۹	۱۴۷۴	۲۷۰۰	۰٫۱۶۵
هیدروژن	Hydrogen	H	۱	۱٫۰۰۷۹۷	۰٫۰۸۳۷۵ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۲۵۹٫۳۴	−۲۵۲٫۸۷	۱۴٫۴
ایندیم	Indium	In	۴۹	۱۱۴٫۸۲	۷٫۳۱	۱۵۶٫۶	۲۰۸۰	۰٫۲۳۳
ید	Iodine	I	۵۳	۱۲۶٫۹۰۴۴	۴٫۹۴	۱۱۳٫۵	۱۸۴٫۳۵	۰٫۲۱۸
ایریدیم	Iridium	Ir	۷۷	۱۹۲٫۲	۲۲٫۵	۲۴۱۰	۴۱۳۰	۰٫۱۳۰
آهن	Iron	Fe	۲۶	۵۵٫۸۴۷	۷٫۸۷	۱۵۳۵	۲۷۵۰	۰٫۴۴۷
کریپتون	Krypton	Kr	۳۶	۸۳٫۸۰	۳٫۴۸۸ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۱۵۶٫۶	−۱۵۲٫۳	۰٫۲۴۷
لانتان	Lanthanum	La	۵۷	۱۳۸٫۹۱	۶٫۱۴۵	۹۱۸	۳۴۶۴	۰٫۱۹۵
لورنسیم	Lawrencium	Lr	۱۰۳	(۲۶۰)	—	—	—	—
سرب	Lead	Pb	۸۲	۲۰۷٫۱۹	۱۱٫۳۶	۳۲۷٫۵۰	۱۷۴۰	۰٫۱۲۹
لیتیم	Lithium	Li	۳	۶٫۹۳۹	۰٫۵۳۴	۱۸۰٫۵۴	۱۳۴۲	۳٫۵۸
لوتتیم	Lutetium	Lu	۷۱	۱۷۴٫۹۷	۹٫۸۴	۱۶۶۳	۳۴۰۲	۰٫۱۵۵
منیزیم	Magnesium	Mg	۱۲	۲۴٫۳۰۵	۱٫۷۴	۶۴۹	۱۰۹۰	۱٫۰۳
منگنز	Manganese	Mn	۲۵	۵۴٫۹۳۸۰	۷٫۴۳	۱۲۴۴	۱۹۶۲	۰٫۴۸۱
مندلویم	Mendelevium	Md	۱۰۱	(۲۵۸)	—	—	—	—
جیوه	Mercury	Hg	۸۰	۲۰۰٫۵۹	۱۳٫۵۵	−۳۸٫۸۷	۳۵۷	۰٫۱۳۸
مولیبدن	Molybdenum	Mo	۴۲	۹۵٫۹۴	۱۰٫۲۲	۲۶۱۷	۴۶۱۲	۰٫۲۵۱
نئودیمیم	Neodymium	Nd	۶۰	۱۴۴٫۲۴	۷٫۰۰	۱۰۲۱	۳۰۷۴	۰٫۱۸۸
نئون	Neon	Ne	۱۰	۲۰٫۱۸۰	۰٫۸۳۸۷ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۲۴۸٫۶۷	−۲۴۶٫۰	۱٫۰۳
نپتونیم	Neptunium	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰٫۲۵	۶۴۰	۳۹۰۲	۱٫۲۶
نیکل	Nickel	Ni	۲۸	۵۸٫۶۹	۸٫۹۰۲	۱۴۵۳	۲۷۳۲	۰٫۴۴۴
نئوبیم	Niobium	Nb	۴۱	۹۲٫۹۰۶	۸٫۵۷	۲۴۶۸	۴۷۴۲	۰٫۲۶۴
نیتروژن	Nitrogen	N	۷	۱۴٫۰۰۶۷	۱٫۱۶۴۹ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	−۲۱۰	−۱۹۵٫۸	۱٫۰۳
نوبلیم	Nobelium	No	۱۰۲	(۲۵۹)	—	—	—	—

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
اسمیم	Osmium	Os	۷۶	۱۹۰٫۲	۲۲٫۵۷	۳۰۴۵	۵۰۲۷	۰٫۱۳۰
اکسیژن	Oxygen	O	۸	۱۵٫۹۹۹۴	۱٫۳۳۱۸ × $۱۰^{-۳}$	−۲۱۸٫۴	−۱۸۳٫۰	۰٫۹۱۳
پالادیم	Palladium	Pb	۴۶	۱۰۶٫۴	۱۲٫۰۲	۱۵۵۴	۳۱۴۰	۰٫۲۴۳
فسفر	Phosphorus	P	۱۵	۳۰٫۹۷۳۸	۱٫۸۳	۴۴٫۲۵α	۲۸۰	۰٫۷۴۱
پلاتین	Platinum	Pt	۷۸	۱۹۵٫۰۹	۲۱٫۴۵	۱۷۷۲	۳۸۲۷	۰٫۱۳۴
پلوتونیم	Plutonium	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹٫۸۴	۶۴۱	۳۲۳۲	۰٫۱۳۰
پولونیم	Polonium	Po	۸۴	(۲۰۹)	۹٫۲۴	۲۵۴	۹۶۲	—
پتاسیم	Potassium	K	۱۹	۳۹٫۰۹۸	۰٫۸۶	۶۳٫۲۵	۷۶۰	۰٫۷۵۸
پرازئودیمیم	Praseodymium	Pr	۵۹	۱۴۰٫۹۰۷	۶٫۷۷۳	۹۳۱	۳۵۲۰	۰٫۱۹۷
پرومتیم	Promethium	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷٫۲۶۴	۱۰۴۲	(۳۰۰۰)	—
پروتاکتینیم	Protactinium	Pa	۹۱	(۲۳۱)	—	۱۶۰۰	—	—
رادیم	Radium	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵٫۰	۷۰۰	۱۱۴۰	—
رادون	Radon	Rn	۸۶	(۲۲۲)	۹٫۹۶ × $۱۰^{-۳}$(۰°C)	−۷۱	−۶۱٫۸	۰٫۰۹۲
رنیم	Rhenium	Re	۷۵	۱۸۶٫۲	۲۱٫۰۴	۳۱۸۰	۵۶۲۷	۰٫۱۳۴
رودیم	Rhodium	Rh	۴۵	۱۰۲٫۹۰۵	۱۲٫۴۴	۱۹۶۵	۳۷۲۷	۰٫۲۴۳
روبیدیم	Rubidium	Rb	۳۷	۸۵٫۴۷	۱٫۵۳	۳۸٫۸۹	۶۸۶	۰٫۳۶۴
روتنیم	Ruthenium	Ru	۴۴	۱۰۱٫۱۰۷	۱۲٫۲	۲۳۱۰	۳۹۰۰	۰٫۲۳۹
ساماریم	Samarium	Sm	۶۲	۱۵۰٫۳۵	۷٫۴۹	۱۰۷۴	۱۷۹۴	۰٫۱۹۷
اسکاندیم	Scandium	Sc	۲۱	۴۴٫۹۵۶	۲٫۹۹	۱۵۴۱	۲۸۳۶	۰٫۵۶۹
سلنیم	Selenium	Se	۳۴	۷۸٫۹۶	۴٫۷۹	۲۱۷	۶۸۵	۰٫۳۱۸
سیلیسیوم	Silicon	Si	۱۴	۲۸٫۰۸۶	۲٫۳۳	۱۴۱۰	۲۳۵۵	۰٫۷۱۲
نقره	Silver	Ag	۴۷	۱۰۷٫۶۸	۱۰٫۴۹	۹۶۱٫۹	۲۲۱۲	۰٫۲۳۴
سدیم	Sodium	Na	۱۱	۲۲٫۹۸۹۸	۰٫۹۷۱۲	۹۷٫۸۱	۸۸۲٫۹	۱٫۲۳
استرونسیم	Strontium	Sr	۳۸	۸۷٫۶۲	۲٫۵۴	۷۶۹	۱۳۸۴	۰٫۷۳۷
گوگرد	Sulfur	S	۱۶	۳۲٫۰۶۶	۲٫۰۷	۱۱۲٫۸	۴۴۴٫۶	۰٫۷۰۷
تانتال	Tantalum	Ta	۷۳	۱۸۰٫۹۴۸	۱۶٫۶	۲۹۹۶	۵۴۲۵	۰٫۱۳۸
تکنسیم	Technetium	Tc	۴۳	(۹۸)	۱۱٫۴۶	۲۱۷۲	۴۸۷۷	۰٫۲۰۹
تلور	Tellurium	Te	۵۲	۱۲۷٫۶۰	۶٫۲۴	۴۴۹٫۵	۹۹۰	۰٫۲۰۱
تربیم	Terbium	Tb	۶۵	۱۵۸٫۹۲۴	۸٫۲۵	۱۳۵۷	۳۲۳۰	۰٫۱۸۰
تالیم	Thallium	Tl	۸۱	۲۰۴٫۳۸	۱۱٫۸۵	۳۰۴	۱۴۵۷	۰٫۱۳۰
توریم	Thorium	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱٫۷۲	۱۷۵۰	(۳۸۵۰)	۰٫۱۱۷
تولیم	Thulium	Tm	۶۹	۱۶۸٫۹۳۴	۹٫۳۱	۱۵۴۵	۱۹۵۰	۰٫۱۵۹
قلع	Tin	Sn	۵۰	۱۱۸٫۷۱	۷٫۳۱	۲۳۱٫۹۷	۲۲۷۰	۰٫۲۲۶
تیتان	Titanium	Ti	۲۲	۴۷۸۸	۴٫۵۴	۱۶۶۰	۳۲۸۷	۰٫۵۲۳
تنگستن	Tungsten	W	۷۴	۱۸۳٫۸۵	۱۹٫۳	۳۴۱۰	۵۶۶۰	۰٫۱۳۴
اورانیم	Uranium	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۹٫۰۷	۱۱۳۲	۳۸۱۸	۰٫۱۱۷
وانادیم	Vanadium	V	۲۳	۵۰٫۹۴۲	۶٫۱	۱۸۹۰	۳۳۸۰	۰٫۴۹۰
زنون	Xenon	Xe	۵۴	۱۳۱٫۳۰	۵٫۴۹۵ × $۱۰^{-۳}$	−۱۱۱٫۷۹	−۱۰۸	۰٫۱۵۹

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
ایتربیم	Ytterbium	Yb	۷۰	۱۷۳٫۰۴	۶٫۹۶۶	۸۱۹	۱۱۹۶	۰٫۱۵۵
ایتریم	Yttrium	Y	۳۹	۸۸٫۹۰۵	۴٫۴۶۹	۱۵۵۲	۵۳۳۸	۰٫۲۹۷
روی	Zinc	Zn	۳۰	۶۵٫۳۷	۷٫۱۳۳	۴۱۹٫۵۸	۹۰۷	۰٫۳۸۹
زیرکونیم	Zirconium	Zr	۴۰	۹۱٫۲۲	۶٫۵۰۶	۱۸۵۲	۴۳۷۷	۰٫۲۷۶

اعداد داخل پرانتز در ستون جرم مولی عبارت‌اند از اعداد جرمی طولانی عمرترین ایزوتوپهای عناصر رادیواکتیو.

همهٔ خواص فیزیکی مربوط به فشار یک اتمسفرند، مگر طور دیگری مشخص شده باشد.
اطلاعات مربوط به گازها فقط برای گازهایی معتبرند که در حالت مولکولی عادی خودشان ـــمثل H_2، He، O_2، Ne و غیره‌ـــ باشند. مقادیر گرمای ویژهٔ گازها در فشار ثابت محاسبه شده‌اند.

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 71st edition (CRC Press, 1990).

پیوست ه

جدول تناوبی عناصر

فلزات قلیایی (شامل هیدروژن)

گازهای بی اثر

1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103	104 Rf*	105 Ha*	106 **	107 **	108 **	109 **		...							

سری لانتانید

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu

سری اکتینید

89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

* نام این عناصر (رادرفوردیم و هاهنیم)، به‌علت ادعاهای متناقضی که در مورد کشف آنها در میان است، هنوز پذیرش عام نیافته است. گروهی در روسیه نامهای کورچاتوویم و نیلسبوریم را پیشنهاد کرده‌اند.

** کشف این عناصر گزارش شده ولی فعلاً هیچ اسمی برای آنها اختیار نشده است.

پیوست و

ذرات بنیادی

۱.ذرات بسیط

لپتون‌ها

ذره	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین ($h/۲\pi$)	جرم سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	محصولات نوعی واپاشی
الکترون	e^-	e^+	-۱	۱/۲	۰٫۵۱۱	∞	
نوترینوی الکترون	ν_e	$\overline{\nu}_e$	۰	۱/۲	< ۰٫۰۰۰۰۰۲	∞	
موئون	μ^-	μ^+	-۱	۱/۲	۱۰۵٫۷	$۲٫۲ \times ۱-^{-۶}$	$e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$
نوترینوی موئون	ν_μ	$\overline{\nu}_\mu$	۰	۱/۲	< ۰٫۳	∞	
تاوء	τ^-	τ^+	-۱	۱/۲	۱۷۸۴	$۳٫۰ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$
نوترینوی تاوء	ν_τ	$\overline{\nu}_\tau$	۰	۱/۲	< ۴۰	∞	

کوارک‌ها

طعم	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین ($h/۲\pi$)	جرم سکون[1] (MeV)	خواص دیگر
بالا	u	$\overline{u}$	$+۲/۳$	۱/۲	۳۰۰	$C = S = T = B = ۰$
پایین	d	$\overline{d}$	$-۱/۳$	۱/۲	۳۰۰	$C = S = T = B = ۰$
افسون	c	$\overline{c}$	$+۲/۳$	۱/۲	۱۵۰۰	افسون$(C) = +$
شگفتی	s	$\overline{s}$	$-۱/۳$	۱/۲	۵۰۰	شگفتی$(S) = -۱$
سر[2]	t	$\overline{t}$	$+۲/۳$	۱/۲	> ۴۰٬۰۰۰	سر بورن$(T) = +۱$
ته	b	$\overline{b}$	$-۱/۳$	۱/۲	۴۷۰۰	ته بورن$(B) = -۱$

ذرات میدان

ذره	نماد	برهم‌کنش	بار (e)	اسپین ($h/۲\pi$)	جرم‌سکون (GeV)
گراویتون[2]		گرانش	۰	۲	۰
بوزون ضعیف	W^+, W^-	ضعیف	±۱	۱	۸۰٫۶
بوزون ضعیف	Z°	ضعیف	۰	۱	۹۱٫۲
فوتون	γ	الکترومغناطیسی	۰	۱	۰
گلوئون	g	قوی (رنگ)	۰	۱	۰

۲. بعضی ذرات منتخب

باریون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمرمتوسط (s)	واپاشی نوعی
پروتون	p	uud	$\overline{\mathrm{p}}$	۱+	۱/۲	۹۳۸	$> ۱۰^{۳۰}$	$\pi^{\circ} + e^{+}(?)$
نوترون	n	udd	$\overline{\mathrm{n}}$	۰	۱/۲	۹۴۰	۸۸۹	$p + e^{-} + \overline{\nu}_e$
لامبادا	Λ°	uds	$\overline{\Lambda^{\circ}}$	۰	۱/۲	۱۱۱۶	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	$p + \pi^{-}$
اومگا	Ω^{-}	sss	$\overline{\Omega^{-}}$	۱−	۳/۲	۱۶۷۳	$۸٫۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$\Lambda^{\circ} + K^{-}$
دلتا	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta^{++}}$	۲+	۳/۲	۱۲۳۲	$۵٫۷ \times ۱۰^{-۲۴}$	$p + \pi^{+}$
لامبادا	Λ_c^{+}	udc	$\overline{\Lambda_c^{+}}$	۱+	۱/۲	۲۲۸۵	$۱٫۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\Lambda^{\circ} + \pi^{+}$

مزون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	واپاشی نوعی
پیون	π^{+}	$u\overline{d}$	π^{-}	۱+	۰	۱۴۰	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^{+} + \nu_{\mu}$
پیون	π°	$u\overline{u} + d\overline{d}$	π°	۰	۰	۱۳۵	$۸٫۴ \times ۱۰^{-۱۷}$	$\gamma + \gamma$
کائون	K^{+}	$u\overline{s}$	K^{-}	۱+	۰	۴۹۴	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^{+} + \nu_{\mu}$
کائون	K°	$d\overline{s}$	$\overline{K^{\circ}}$	۰	۰	۴۹۸	$۰٫۹ \times ۱۰^{-۱۰}$	$\pi^{+} + \pi^{-}$
رو	ρ^{+}	$u\overline{d}$	ρ^{-}	۱+	۱	۷۶۸	$۴٫۵ \times ۱۰^{-۲۴}$	$\pi^{+} + \pi^{-}$
مزون D	D^{+}	$c\overline{d}$	D^{-}	۱+	۰	۱۸۶۹	$۱٫۱ \times ۱۰^{-۱۲}$	$K^{-} + \pi^{+} + \pi^{+}$
پی‌سای	ψ	$c\overline{c}$	ψ	۰	۱−	۳۰۹۷	$۱٫۰ \times ۱۰^{-۲۰}$	$e^{+} + e^{-}$
مزون B	B^{+}	$u\overline{b}$	B^{-}	۱+	۰	۵۲۷۸	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۲}$	$D^{-} + \pi^{+} + \pi^{+}$
اویپسیلون	Υ	$b\overline{b}$	Υ	۰	۱	۹۴۶۰	$۱٫۳ \times ۱۰^{-۲۰}$	$e^{+} + e^{-}$

۱) چون تا به حال کوارک آزاد مشاهده نشده، اندازه‌گیری جرم سکون کوارکها در حالت آزاد هم ممکن نبوده است. جرمهای سکونی که در این جدول آمده‌اند، جرمهای مؤثرند و مربوط به کوارکهایی هستند که ذرات مرکب را می‌سازند و به آنها مقیدند.

۲) انتظار می‌رود چنین ذراتی وجود داشته باشند ولی هنوز مشاهده نشده‌اند.

منبع:

"Review of Particle Properties" *Plysics Letters B*, vol. 239 (April 1990).

پیوست ز

ضرایب تبدیل

ضرایب تبدیل را می‌توان مستقیماً از جدولها خواند. به‌عنوان مثال، ۱ درجه $= ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور، پس $۱۶٫۷^{\circ} = ۱۶٫۷ \times ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور. کمیتهای SI با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بخشی از آنها از کتاب زیر گرفته شده است.

G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, Prenice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

زاویه مسطحه

	°	′	″	rad	rev
یک درجه =	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$
یک دقیقه =	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲٫۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۳۰ \times ۱۰^{-۵}$
یک ثانیه =	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۴٫۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۱۶ \times ۱۰^{-۷}$
یک رادیان =	۵۷٫۳۰	۳۴۳۸	$۲٫۰۶۳ \times ۱۰^{۵}$	۱	۰٫۱۵۹۲
یک دور =	۳۶۰	$۲٫۱۶ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۲۹۶ \times ۱۰^{۶}$	۶٫۲۸۳	۱

زاویهٔ فضایی

۱ کره = ۴π استرادیان = رادیان ۱۲٫۵۷

طول

	cm	m	km	in	ft	mil
یک سانتی‌متر =	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰٫۳۹۳۷	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۶}$
یک متر =	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹٫۳۷	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک کیلومتر =	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۹۳۷ \times ۱۰^{۴}$	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
یک اینچ =	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۵}$	۱	$۸٫۳۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۵۷۸ \times ۱۰^{-۵}$
یک فوت =	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	۱۲	۱	$۱٫۸۹۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک مایل =	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	$۶٫۳۳۶ \times ۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$ متر
یک مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱٫۱۵۱ مایل = ۶۰۷۸ فوت
یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$ متر

یک سال نوری = $۹٫۴۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$ کیلومتر
یک پارسک = $۳٫۰۸۴ \times ۱۰^{۱۳}$ کیلومتر
یک فاتوم = ۶ فوت
یک شعاع بور = $۵٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱}$ متر

یک یارد = ۳ فوت
یک راد = ۱۶٫۵ فوت
یک میل = $۱۰^{-۳}$ اینچ
۱ نانومتر = $۱۰^{-۹}$ متر

مساحت

	$m^۲$	$cm^۲$	$ft^۲$	$in^۲$
یک متر مربع =	۱	$۱۰^۴$	۱۰٫۷۶	۱۵۵۰
یک سانتی‌متر مربع=	$۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۰۷۶ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۱۵۵۰
یک فوت مربع=	$۹٫۲۹۰ \times ۱۰^{-۲}$	۹۲۹٫۰	۱	۱۴۴
یک اینچ مربع =	$۶٫۴۵۲ \times ۱۰^{-۴}$	۶٫۴۵۲	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

یک مایل مربع = $۲٫۷۸۸ \times ۱۰^۷$ فوت مربع = ۶۴۰ ایکر ‏ ‏ ‏ ۱ ایکر = ۴۳۵۶۰ فوت مربع

یک بارن = $۱۰^{-۲۸}$ مترمربع ‏ ‏ ‏ ۱ هکتار = $۱۰^۴$ مترمربع = ۲٫۴۷۱ ایکر

حجم

	$m^۳$	$cm^۳$	li	$ft^۳$	$in^۳$
یک مترمکعب =	۱	$۱۰^۶$	۱۰۰۰	۳۵٫۳۱	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^۴$
یک سانتی‌مترمکعب =	$۱۰^{-۶}$	۱	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک لیتر =	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۲}$	۶۱٫۰۲
یک فوت‌مکعب =	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^۴$	۲۸٫۳۲	۱	۱۷۲۷
یک اینچ‌مکعب =	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	۱۶٫۳۹	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	۱

یک گالن مایع امریکایی = ۴ کوارت مایع امریکایی = ۸ پینت امریکایی = ۱۲۸ اونس مایع امریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب
یک گالن امپریال انگلیسی = ۲۷۷٫۴ اینچ مکعب = ۱٫۲۰۱ گالن مایع امریکایی

جرم

	g	kg	slug	u	oz	lb	ton
یک گرم =	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$	$۳٫۵۲۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۶}$
یک کیلوگرم =	۱۰۰۰	۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۳۵٫۲۷	۲٫۲۰۵	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۳}$
یک اسلاگ =	$۱٫۴۵۹ \times ۱۰^۴$	۱۴٫۵۹	۱	$۸٫۷۸۶ \times ۱۰^{۲۷}$	۵۱۴٫۸	۳۲٫۱۷	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک u =	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۱٫۶۶۰ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۱۳۸ \times ۱۰^{-۲۸}$	۱	$۵٫۸۵۷ \times ۱۰^{-۲۶}$	$۳٫۶۶۲ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۸۳۰ \times ۱۰^{-۳۰}$
یک اونس =	۲۸٫۳۵	$۲٫۸۳۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۱۸ \times ۱۰^{۲۵}$	۱	$۶٫۲۵۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
یک پوند =	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۳۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۱۶	۱	۰٫۰۰۰۵
یک تن =	$۹٫۰۷۲ \times ۱۰^۵$	۹۰۷٫۲	۶۲٫۱۶	$۵٫۴۶۳ \times ۱۰^{۲۹}$	$۳٫۲ \times ۱۰^۴$	۲۰۰۰	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند، ولی غالباً به این عنوان به‌کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم $۱kg = ۲٫۲۰۵lb$. به‌این معناست که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ m/s^۲$)، یک کیلوگرم جرمی است که ۲٫۲۰۵ پوند وزن دارد.

چگالی

	$slug/ft^۳$	$kg/m^۳$	$g/cm^۳$	$lb/ft^۳$	$lb/in^۳$
یک اسلاگ بر فوت‌مکعب =	۱	۵۱۵٫۴	۰٫۵۱۵۴	۳۲٫۱۷	$۱٫۸۶۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک کیلوگرم بر مترمکعب =	$۱٫۹۴۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۲۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۵}$
یک گرم بر سانتی‌مترمکعب =	۱٫۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲٫۴۳	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر فوت‌مکعب =	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶٫۰۲	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$
یک پوند بر اینچ‌مکعب =	۵۳٫۷۱	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^۴$	۲۷٫۶۸	۱۷۲۸	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند چگالی وزنی هستند و به‌این جهت، از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

زمان

	y	d	h	min	s
یک سال =	۱	۳۶۵٫۲	$۸٫۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$	$۵٫۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$	$۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$
یک روز =	$۲٫۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸٫۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$
یک ساعت =	$۱٫۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
یک دقیقه =	$۱٫۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
یک ثانیه =	$۳٫۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

سرعت

	ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
یک فوت بر ثانیه =	۱	۱٫۰۹۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸
یک کیلومتر بر ثانیه =	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸
یک متر بر ثانیه =	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰
یک مایل بر ساعت =	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰
یک سانتی‌متر بر ثانیه =	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

یک نات = یک مایل دریایی بر ساعت = ۱٫۶۸۸ فوت بر ثانیه

یک مایل بر دقیقه = ۸۸٫۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰٫۰۰ مایل بر ساعت

نیرو

	dyn	N	lb	pdl	gf	kgf
یک دین =	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$
یک نیوتون =	$۱۰^{۵}$	۱	۰٫۲۲۴۸	۷٫۲۳۳	۱۰۲٫۰	۰٫۱۰۲۰
یک پوند =	$۴٫۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$	۴٫۴۴۸	۱	۳۲٫۱۷	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶
یک پوندال =	$۱٫۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$	۰٫۱۳۸۳	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۴٫۱۰	$۱٫۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$
یک گرم نیرو =	۹۸۰٫۷	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۰٫۰۰۱
یک کیلوگرم نیرو =	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{۵}$	۹٫۸۰۷	۲٫۲۰۵	۷۰٫۹۳	۱۰۰۰	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند، یکای نیرو نیستند ولی غالباً به‌این عنوان به‌کار می‌روند. برای نمونه، اگر بنویسیم یک گرم نیرو "=" ۹۸۰٫۷ دین، منظورمان این است که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$)، یک گرم جرم تحت تأثیر یک نیروی ۹۸۰٫۷ دین قرار دارد.

فشار

	atm	$dyn/cm^{۲}$	inch of Water	cm − Hg	Pa	$lb/in^{۲}$	$lb/ft^{۲}$
یک اتمسفر =	۱	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۶}$	۴۰۶٫۸	۷۶	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۵}$	۱۴٫۷۰	۲۱۱۶
یک دین بر سانتی‌مترمربع =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۷}$	۱	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۱	$۱٫۴۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۳}$
یک اینچ آب[1] در ۴ درجهٔ سلسیوس =	$۲٫۴۵۸ \times ۱۰^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰٫۱۸۶۸	۲۴۹٫۱	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	۵٫۲۰۲
یک سانتی‌متر جیوه[1] در صفر درجهٔ سلسیوس =	$۱٫۳۱۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۳۳ \times ۱۰^{۴}$	۵٫۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰٫۱۹۳۴	۲۷٫۸۵
یک پاسکال =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۶}$	۱۰	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر اینچ مربع =	$۶٫۸۰۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۵٫۱۷۱	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۳}$	۱	۱۴۴
یک پوند بر فوت مربع =	$۴٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	۴۷۸٫۸	۰٫۱۹۲۲	$۳٫۵۹۱ \times ۱۰^{-۲}$	۴۷٫۸۸	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

۱. هر جا که شتاب گرانی دارای مقدار متعارف ۹٫۸۰۶۶۵ متر بر مجذور ثانیه است.

یک بار = $۱۰^{۶}$ دین بر سانتی‌مترمربع = ۰٫۱ میلی‌پاسکال   یک میلی‌بار = $۱۰^{۳}$ دین بر سانتی‌مترمربع = $۱۰^{۲}$ پاسکال

انرژی، کار، گرما

	Btu	erg	ft · lb	hp · h	J	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
یکای انگلیسی گرما =	۱	۱٫۰۵۵ $\times ۱۰^{۱۰}$	۷۷۷٫۹	۳٫۹۲۹ $\times ۱۰^{-۴}$	۱۰۵۵	۲۵۲٫۰	۲٫۹۳۰ $\times ۱۰^{-۴}$	۶٫۵۸۵ $\times ۱۰^{۲۱}$	۶٫۵۸۵ $\times ۱۰^{۱۵}$	۱٫۱۷۴ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۷٫۰۷۰ $\times ۱۰^{۱۲}$
یک ارگ =	۹٫۴۸۱ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱	۷٫۳۷۶ $\times ۱۰^{-۸}$	۳٫۷۲۵ $\times ۱۰^{-۱۴}$	$۱۰^{-۷}$	۲٫۳۸۹ $\times ۱۰^{-۸}$	۲٫۷۷۸ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۱}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۵}$	۱٫۱۱۳ $\times ۱۰^{-۲۴}$	۶۷۰٫۲
یک فوت پوند =	۱٫۲۸۵ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶ $\times ۱۰^{۷}$	۱	۵٫۰۵۱ $\times ۱۰^{-۷}$	۱٫۳۵۶	۰٫۳۲۳۸	۳٫۷۶۶ $\times ۱۰^{-۷}$	۸٫۴۶۴ $\times ۱۰^{۱۸}$	۸٫۴۶۴ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱٫۵۰۹ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۹٫۰۳۷ $\times ۱۰^{۹}$
یک اسب بخار ساعت =	۲۵۴۵	۲٫۶۸۵ $\times ۱۰^{۱۳}$	۱٫۹۸۰ $\times ۱۰^{۶}$	۱	۲٫۶۸۵ $\times ۱۰^{۶}$	۶٫۴۱۳ $\times ۱۰^{۵}$	۰٫۷۴۵۷	۱٫۶۷۶ $\times ۱۰^{۲۵}$	۱٫۶۷۶ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲٫۹۸۸ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱٫۷۹۹ $\times ۱۰^{۱۶}$
یک ژول =	۹٫۴۸۱ $\times ۱۰^{-۴}$	$۱۰^{۷}$	۰٫۷۳۷۶	۳٫۷۲۵ $\times ۱۰^{-۷}$	۱	۰٫۲۳۸۹	۲٫۷۷۸ $\times ۱۰^{-۷}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۸}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱٫۱۱۳ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۶٫۷۰۲ $\times ۱۰^{۹}$
یک کالری =	۳٫۹۶۹ $\times ۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶ $\times ۱۰^{۷}$	۳٫۰۸۸	۱٫۵۶۰ $\times ۱۰^{-۶}$	۴٫۱۸۶	۱	۱٫۱۶۳ $\times ۱۰^{-۶}$	۲٫۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲٫۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۳}$	۴٫۶۶۰ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۲٫۸۰۶ $\times ۱۰^{۱۰}$
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۳٫۶ $\times ۱۰^{۱۳}$	۲٫۶۵۵ $\times ۱۰^{۶}$	۱٫۳۴۱	۳٫۶ $\times ۱۰^{۶}$	۸٫۶۰۰ $\times ۱۰^{۵}$	۱	۲٫۲۴۷ $\times ۱۰^{۲۵}$	۲٫۲۴۷ $\times ۱۰^{۱۹}$	۴٫۰۰۷ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۲٫۴۱۳ $\times ۱۰^{۱۶}$
یک الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times ۱۰^{-۲۲}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۲}$	۱٫۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۵٫۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۶}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۳٫۸۲۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۴٫۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۶}$	۱	$۱۰^{-۶}$	۱٫۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۶}$	۱٫۰۷۴ $\times ۱۰^{-۹}$
یک مگا الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times ۱۰^{-۱۶}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۶}$	۱٫۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۵٫۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۳٫۸۲۷ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۴٫۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۰}$	$۱۰^{۶}$	۱	۱٫۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۰}$	۱٫۰۷۴ $\times ۱۰^{-۳}$
یک کیلوگرم =	۸٫۵۲۱ $\times ۱۰^{۱۳}$	۸٫۹۸۷ $\times ۱۰^{۲۳}$	۶٫۶۲۹ $\times ۱۰^{۱۶}$	۳٫۳۴۸ $\times ۱۰^{۱۰}$	۸٫۹۸۷ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲٫۱۴۶ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲٫۴۹۷ $\times ۱۰^{۱۰}$	۵٫۶۱۰ $\times ۱۰^{۳۵}$	۵٫۶۱۰ $\times ۱۰^{۲۹}$	۱	۶٫۰۲۲ $\times ۱۰^{۲۶}$
یکای جرم اتمی =	۱٫۴۱۵ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۱٫۴۹۲ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۱۰۱ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۵٫۵۵۹ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۱٫۴۹۲ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۳٫۵۶۴ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۴٫۱۴۶ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۹٫۳۲ $\times ۱۰^{۸}$	۹۳۲٫۰	۱٫۶۶۱ $\times ۱۰^{-۲۷}$	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبت در اینجا ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم‌ارزی نسبیتی جرم‌ـانرژی $E = mc^۲$ به‌دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی (u) به‌انرژی، به‌دست می‌دهند.

توان

	Btu/h	ft · lb/s	hp	cal/s	kW	W
یک یکای انگلیسی گرما بر ساعت =	۱	۰٫۲۱۶۱	۳٫۹۲۹ $\times ۱۰^{-۴}$	۶٫۹۹۸ $\times ۱۰^{-۲}$	۲٫۹۳۰ $\times ۱۰^{-۴}$	۰٫۲۹۳۰
یک فوت‌ـپوند بر ثانیه =	۴٫۶۲۸	۱	۱٫۸۱۸ $\times ۱۰^{-۳}$	۰٫۳۲۳۹	۱٫۳۵۶ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶
یک اسب بخار =	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸٫۱	۰٫۷۴۵۷	۷۴۵٫۷
یک کالری بر ثانیه =	۱۴٫۲۹	۳٫۰۸۸	۵٫۶۱۵ $\times ۱۰^{-۳}$	۱	۴٫۱۸۶ $\times ۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۷۳۷٫۶	۱٫۳۴۱	۲۳۸٫۹	۱	۱۰۰۰
یک وات =	۳٫۴۱۳	۰٫۷۳۷۶	۱٫۳۴۱ $\times ۱۰^{-۳}$	۰٫۲۳۸۹	۰٫۰۰۱	۱

شار مغناطیسی

	maxwell	WEBER
۱ ماکسول =	۱	$۱۰^{-۸}$
۱ وبر =	$۱۰^{۸}$	۱

میدان مغناطیسی

	gauss	TESLA	milligauss
۱ گاؤس =	۱	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰۰
۱ تسلا =	$۱۰^{۴}$	۱	$۱۰^{۷}$
۱ میلی گاؤس =	۰٫۰۰۱	$۱۰^{-۷}$	۱

پیوست ح

فرمولهای ریاضی

هندسه

دایره‌ای به شعاع r: محیط $= ۲\pi r$؛ مساحت $= \pi r^۲$

کره‌ای به شعاع r: مساحت $= ۴\pi r^۲$؛ حجم $= \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

استوانهٔ قائمی به شعاع r و ارتفاع h:

مساحت $= ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h$؛ حجم $= \pi r^۲ h$

مثلثی با قاعدهٔ a و ارتفاع h: مساحت $= \frac{۱}{۲}ah$

معادلهٔ درجهٔ دو

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

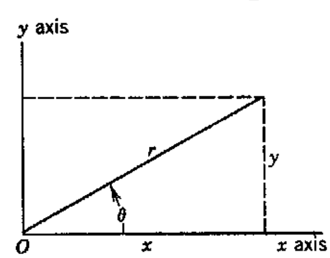
$$\Rightarrow \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

توابع مثلثاتی زاویهٔ θ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

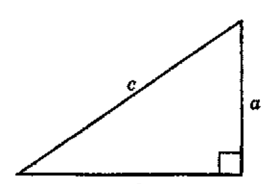
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



قضیهٔ فیثاغورس

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$



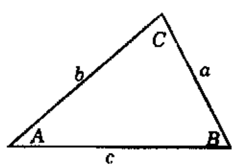
در مثلث

زاویه‌های A، B، C مقابل اضلاعی a، b، c هستند.

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\,\cos C$$



نشانه‌ها و نمادهای ریاضی

$=$ مساوی است با

$\approx$ تقریباً مساوی است با

$\sim$ از مرتبهٔ بزرگی است

$\neq$ مساوی نیست با (متفاوت است با)

$\equiv$ یکسان است با، طبق تعریف عبارت است از

$>$ بزرگتر است از ($\gg$ خیلی بزرگتر است از)

$<$ کوچکتر است از ($\ll$ خیلی کوچکتر است از)

$\geq$ بزرگتر است یا مساوی است با (یا کوچکتر نیست از)

$\leq$ کوچکتر است یا مساوی است با (یا بزرگتر نیست از)

$\pm$ به‌اضافه یا منهای ($\sqrt{۴} = \pm ۲$)

$\propto$ متناسب است با

$\sum$ علامت جمع

$\overline{x}$ مقدار متوسط x

ضرب بردارها

اگر $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بردارهای یکه در راستای x و y و z باشند:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = ۱, \; \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = ۰$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = ۰$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \; \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \; \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

هر بردار a برحسب مؤلفه‌هایش به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

اگر a و b و c بردارهایی به‌ترتیب به‌طول a و b و c باشند و s یک کمیت اسکالر باشد:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$
$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

اگر θ زاویهٔ کوچکتر (از دو زاویهٔ) میان a و b باشد

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\ \cos\theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$= (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\mathbf{j}$$
$$+ (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab\ \sin\theta$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$$
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots (x^2 < 1)$$
$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \cdots (x^2 < 1)$$

بسط نمایی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (|x| < 1)$$

بسط مثلثاتی (θ برحسب رادیان)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$
$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

مشتقها و انتگرالها

در آنچه می‌آید، u و v توابعی از x و a و m مقادیر ثابت‌اند. به هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت (اختیاری) انتگرال‌گیری اضافه کرد.

۱. $\dfrac{dx}{dx} = ۱$	۱. $\int dx = x$
۲. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$	۲. $\int au\, dx = a\int u\, dx$
۳. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	۳. $\int (u+v)dx = \int u\, dx + \int v\, dx$
۴. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-۱}$	۴. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+۱}}{m+۱}(m \neq -۱)$
۵. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{۱}{x}$	۵. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
۶. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	۶. $\int u\dfrac{dv}{dx}dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}dx$
۷. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	۷. $\int e^x dx = e^x$
۸. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$	۸. $\int \sin x\, dx = -\cos x$
۹. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	۹. $\int \cos x\, dx = \sin x$
۱۰. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^۲ x$	۱۰. $\int \tan x\, dx = \ln\lvert\sec x\rvert$
۱۱. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^۲ x$	۱۱. $\int \sin^۲ x\, dx = \dfrac{۱}{۲}x - \dfrac{۱}{۴}\sin ۲x$
۱۲. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$	۱۲. $\int e^{-ax}dx = -\dfrac{۱}{a}e^{-ax}$
۱۳. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$	۱۳. $\int xe^{-ax}dx = -\dfrac{۱}{a^۲}(ax+۱)e^{-ax}$
۱۴. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$	۱۴. $\int x^۲e^{-ax}dx = -\dfrac{۱}{a^۳}(a^۲x^۲+۲ax+۲)e^{-ax}$
۱۵. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$	۱۵. $\int_۰^\infty x^n e^{-ax}dx = \dfrac{n!}{a^{n+۱}}$
۱۶. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$	۱۶. $\int_۰^\infty x^{۲n}e^{-ax^۲}dx = \dfrac{۱\cdot۳\cdot۵\cdots(۲n-۱)}{۲^{n+۱}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

پیوست ط

برنامه‌های کامپیوتری

در این پیوست سه مثال از برنامه‌های کامپیوتری‌ای که در متن کتاب از آنها برای محاسبات سینماتیکی شامل نیروهای متغیر وارد بر ذره استفاده شده است ارائه می‌شود. این برنامه‌ها به زبان BASIC نوشته شده‌اند و به‌راحتی می‌شود آنها را با اغلب کامپیوترهای شخصی سازگار کرد. در هر مورد، سرعت اولیه و مکان اولیه ذره را باید به‌ترتیب در سطرهای ۴۰ و ۵۰ وارد برنامه کرد.

۱. نیروهای وابسته به زمان

از این برنامه در بخش ۶ـ۶ برای پیدا کردن مکان و سرعت اتومبیلی که شتابش وابسته به زمان است استفاده شد. این برنامه را می‌شود برای هر شتاب وابسته به زمانی به‌کار برد؛ کافی است سطر ۱۸۰ را طوری تغییر بدهیم که $a(t)$ مورد نظر را نشان بدهد. در این مورد از مثال بخش ۶ـ۶، یعنی $a(t) = -۲٫۶۷t$، استفاده می‌کنیم.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- TIME DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(T), V0, X0;  COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES
40 VO = 29.2
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU = .5
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 100
160 DT = TU/NT
170 'INSERT A(T) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
180 DEF FNA(T)=-2.67*T
190 V=V0
200 X=X0
210 PRINT "TIME            VELOCITY        POSITION"
220 LPRINT  "TIME            VELOCITY        POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
260 T = (TIME-1)*TU + N*DT
270 AI=FNA(T)
280 AI1=FNA(T-DT)
290 AV=.5*(AI+AI1
```

```
300 DV=AV*DT
310 V = V + DV
320 DX = .5*(V + V - DV)*DT
330 X = X+DX
340 NEXT N
350 PRINT TIME*TU,V,X
360 LPRINT TIME*TU,V,X
370 NEXT TIME
400 END
```

نمونهٔ خروجی

TIME	VELOCITY	POSITION
.5	28.86625	14.54437
1	27.86499	28.75499
1.5	26.19618	42.2981
2	23.85994	54.83993
2.5	20.85615	66.04676
3	17.18486	75.5848
3.5	12.84612	83.1203
4	7.839843	88.31959
4.5	2.166084	90.84886
5	-4.175166	90.37431

۲. نیروهای وابسته به سرعت

این برنامه را می‌شود، طبق آنچه در بخش ۶ـ۷ گفته شد، برای بررسی حرکت پرتابه‌ای که تحت تأثیر نیروی مقاومت هواست به‌کار برد. در این مورد نیرو را در سطر ۲۰۰ به‌صورت $F(x) = g - bv^2$ می‌نویسیم، که در آن $g = ۹٫۸$ و $b = ۰٫۳۳$ است. در سطر ۲۰۰ هر نیروی وابسته به سرعت دیگری هم می‌شود قرار داد. خروجی نشان می‌دهد که ذره، در مدت ۱٫۵s و پس از طی ۶m، به سرعت حدی ۵٫۴m/s می‌رسد.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- VELOCITY DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(V), V0, X0;   COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES
40 VO = 0
50 XO = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU=.25
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT=100
160 DT=TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT A(V) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNA(V)=9.8 - .33*V*V
210 PRINT "TIME          VELOCITY        POSITION"
220 LPRINT "TIME         VELOCITY        POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
```

(ادامه)

```
260 AV=FNA(V)
270 DV=AV*DT
280 V = V + DV
290 DX = .5*(V + V - DV)*DT
300 X = X+DX
310 NEXT N
320 PRINT TIME*TU,V,X
330 LPRINT TIME*TU,V,X
340 NEXT TIME
400 END
```

نمونهٔ خروجی

TIME	VELOCITY	POSITION
.25	2.299237	.2966358
.5	3.905542	1.08959
.75	4.765719	2.18636
1	5.161553	3.434
1.25	5.330923	4.748592
1.5	5.401125	6.091382
1.75	5.42984	7.445783
2	5.441519	8.804918
2.25	5.446261	10.16598
2.5	5.448183	11.52782

۳. نیروهای وابسته به مکان

این برنامه در بخش ۸ـ۴ برای بررسی حرکت ذره‌ای که تحت‌تأثیر نیروی $F = -kx$ نوسان می‌کند به‌کار برده شد. نیرو را به‌صورت $F(x) = -۹٫۶x$، یعنی وقتی $k = ۹٫۶$ است، در سطر ۲۰۰ وارد می‌کنیم. خروجی نشان می‌دهد که این ذره با دورهٔ ۳٫۲s نوسان می‌کند، درست همان‌طور که برای ذره‌ای با چنین جرمی (سطر ۶۰) انتظار می‌رود.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- POSITION DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN F(X), V0, X0, M;  COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES AND MASS OF PARTICLE
40 V0 = 0      'METERS PER SECOND
50 X0 = .05        'METERS
60 M = 2.5 'KILOGRAMS'
70 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
80 '     FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
90 TMAX = 40
100 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
110 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
120 TU=.1
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 10
160 DT = TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT F(X) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNF(X)=-9.600001*X
210 PRINT " TIME       VELOCITY       POSITION"
220 PRINT "   (S)        (M/S)           (M) "
230 LPRINT " TIME       VELOCITY       POSITION"
240 LPRINT "   (S)        (M/S)           (M) "
250 LPRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#########.###";V0,X0
260 PRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#########.###";V0,X0
```

(ادامه)

```
270 'BEGIN ITERATION
280 FOR TIME = 1 TO TMAX
290 FOR N = 1 TO NT
300 A=FNF(X)/M 'ACCELERATION IN INTERVAL
310 X = X + V*DT + .5*A*DT*DT 'POSITION AT END OF INTERVAL
320 V = V + A*DT 'VELOCITY AT END OF INTERVAL
330 NEXT N
340 PRINT USING "###.##";TIME*TU;:PRINT USING "+#########.###";V,X
350 LPRINT USING "###.##";TIME*TU;:LPRINT USING "+#########.###";V,
360 NEXT TIME
400 END
```

نمونة خروجي

TIME (S)	VELOCITY (M/S)	POSITION (M)
0.00	+0.000	+0.050
0.10	-0.019	+0.049
0.20	-0.037	+0.046
0.30	-0.054	+0.042
0.40	-0.069	+0.035
0.50	-0.082	+0.028
0.60	-0.091	+0.019
0.70	-0.097	+0.010
0.80	-0.099	-0.000
0.90	-0.097	-0.010
1.00	-0.092	-0.019
1.10	-0.083	-0.028
1.20	-0.070	-0.036
1.30	-0.056	-0.042
1.40	-0.039	-0.047
1.50	-0.020	-0.050
1.60	-0.001	-0.051
1.70	+0.019	-0.050
1.80	+0.037	-0.047
1.90	+0.055	-0.042
2.00	+0.070	-0.036
2.10	+0.083	-0.028
2.20	+0.092	-0.020
2.30	+0.098	-0.010
2.40	+0.100	-0.000
2.50	+0.099	+0.010
2.60	+0.093	+0.019
2.70	+0.084	+0.028
2.80	+0.072	+0.036
2.90	+0.057	+0.043
3.00	+0.040	+0.047
3.10	+0.021	+0.050
3.20	+0.001	+0.052
3.30	-0.018	+0.051
3.40	-0.037	+0.048
3.50	-0.055	+0.043
3.60	-0.071	+0.037
3.70	-0.084	+0.029
3.80	-0.093	+0.020
3.90	-0.099	+0.011
4.00	-0.102	+0.001

پیوست ی

برندگان جایزه نوبل

۱۹۰۱	ویلهلم کنراد رونتگن Wilhelm Konrad Röntgen	(۱۹۲۳ – ۱۸۴۵)	به‌خاطر کشف پرتوهای x
۱۹۰۲	هندریک آنتون لورنتز Hendrik Antoon Lorentz	(۱۹۲۸ – ۱۸۵۳)	به‌خاطر پژوهشهایشان دربارهٔ اثر میدان مغناطیسی بر پدیده‌های تابشی.
	پیتر زیمان Pieter Zeeman	(۱۹۴۳ – ۱۸۶۵)	
۱۹۰۳	آنتوان هانری بکرل Antoine Henri Becquerel	(۱۹۰۸ – ۱۸۵۲)	به‌خاطر کشف پرتوزایی طبیعی.
	پیر کوری Pierre Curie	(۱۹۰۶ – ۱۸۵۹)	به‌خاطر پژوهشهای مشترکشان دربارهٔ پدیده‌های تابشی‌ای که توسط بکرل کشف شده بود.
	ماری اسکودوسکا-کوری Marie Sklowdowska-Curie	(۱۹۳۴ – ۱۸۶۷)	
۱۹۰۴	لرد ریلی (جان ویلیام استرات) Lord Rayleigh (John William Strutt)	(۱۹۱۹ – ۱۸۴۲)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد چگالی گازهای مهم و همچنین به‌خاطر کشف آرگون.
۱۹۰۵	فیلیپ ادوارد آنتون فون‌لنارد Philipp Eduard Anton von Lenard	(۱۹۴۷ – ۱۸۶۲)	به‌خاطر کارهایش در مورد پرتوهای کاتودی.
۱۹۰۶	جوزف جان تامسون Joseph John Thomson	(۱۹۴۰ – ۱۸۵۶)	به‌خاطر پژوهشهای نظری و تجربی‌اش در مورد رسانایی الکتریکی گازها.
۱۹۰۷	آلبرت آبراهام مایکلسون Albert Abraham Michelson	(۱۹۳۱ – ۱۸۵۲)	به‌خاطر طراحی اسبابهای اندازه‌گیری دقیق اپتیکی و پژوهشهایی که به کمک آنها انجام داد.
۱۹۰۸	گابریل لیپمان Gabriel Lippmann	(۱۹۲۱ – ۱۸۴۵)	به‌خاطر ابداع روش باز تولید رنگها با نورنگاری بر پایهٔ پدیده‌های تداخلی.
۱۹۰۹	گولیلمو مارکونی Guglielmo Marconi	(۱۹۳۷ – ۱۸۷۴)	به‌خاطر سهمی که در تکمیل تلگراف بی‌سیم داشتند.
	کارل فردیناند براون Carl Ferdinand Braun	(۱۹۱۸ – ۱۸۵۰)	
۱۹۱۰	یوهانس دیدریک وان‌دروالس Johannes Diderik van der Waals	(۱۹۲۳ – ۱۸۳۷)	به‌خاطر کارش در مورد معادلهٔ حالت گازها و مایعات.
۱۹۱۱	ویلهلم وین Wilhelm Wien	(۱۹۲۸ – ۱۸۶۴)	به‌خاطر تحقیقاتش دربارهٔ قوانین حاکم بر تابش گرمایی.
۱۹۱۲	نیلس گوستاو دالن Nils Gustaf Dalen	(۱۹۳۷ – ۱۸۶۹)	به‌خاطر اختراع تنظیم‌کننده‌های خودکار، که در فانوسهای دریایی و راهنماهای شناور بکار می‌رود.

۱۹۱۳	هایک کامرلینگ اونس (۱۸۵۳ – ۱۹۲۶) Heike Kamerlingh Onnes		به‌خاطر پژوهشهایش در مورد خواص ماده در دماهای پایین، که منجر به تولید هلیم مایع هم شد.
۱۹۱۴	ماکس فون لاؤ (۱۸۷۹ – ۱۹۶۰) Max von Laue		به‌خاطر کشف پراش پرتوهای x از بلورها.
۱۹۱۵	ویلیام هنری براگ (۱۸۶۲ – ۱۹۴۲) William Henry Bragg		به‌خاطر خدماتشان در تحلیل ساختارهای بلوری به‌وسیلهٔ پرتوهای x.
۱۹۱۶	ویلیام لارنس براگ (۱۸۹۰ – ۱۹۷۱) William Lawrence Bragg		
۱۹۱۷	چارلز گلوور بارکلا (۱۸۷۷ – ۱۹۴۴) Charles Glover Barkla		به‌خاطر کشف پرتوهای x مشخصهٔ عناصر.
۱۹۱۸	ماکس پلانک (۱۸۵۸ – ۱۹۴۷) Max Planck		به‌خاطر کشف کوانتومهای انرژی.
۱۹۱۹	یوهانس اشتارک (۱۸۷۴ – ۱۹۵۷) Johannes Stark		به‌خاطر کشف اثر دوپلر در پرتوهای مثبت و شکافتگی خطوط طیفی در میدانهای الکتریکی.
۱۹۲۰	شارل ادوارد گیوم (۱۸۶۱ – ۱۹۳۸) Charles Edouard Guillaume		به‌خاطر کشف نابهنجاریها در آلیاژهای فولادی نیکل، که امکان اندازه‌گیریهای دقیقی را در فیزیک فراهم کرد.
۱۹۲۱	آلبرت اینشتین (۱۸۷۹ – ۱۹۵۵) Albert Einstein		به‌خاطر خدماتش به فیزیک نظری، و به‌ویژه به‌خاطر کشف اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۲	نیلس بور (۱۸۸۵ – ۱۹۶۲) Niels Bohr		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار اتمها و تابشهای ناشی از آنها.
۱۹۲۳	رابرت اندروز میلیکان (۱۸۶۸ – ۱۹۵۳) Robert Andrews Millikan		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد بار الکتریکی بنیادی و اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۴	کارل مان‌گئورگ زیگبان (۱۸۸۶ – ۱۹۵۴) Karl Manne George Siegbahn		به‌خاطر کشفها و پژوهشهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی پرتو ایکسی.
۱۹۲۵	جیمز فرانک (۱۸۸۲ – ۱۹۶۴) James Franck		به‌خاطر کشف قوانین حاکم بر برخورد الکترون با اتم.
	گوستاو هرتز (۱۸۸۷ – ۱۹۷۵) Gustav Hertz		
۱۹۲۶	ژان باتیست پرن (۱۸۷۰ – ۱۹۴۲) Jean Baptiste perrin		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار ناپیوستهٔ ماده و به‌خصوص کشف تعادل ته‌نشینی.
۱۹۲۷	آرتور هالی کامپتون (۱۸۹۲ – ۱۹۶۲) Arthur Holly Compton		به‌خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.
	چارلز تامسون ریز ویلسون (۱۸۶۹ – ۱۹۵۹) Charles Thomson Rees Wilson		به‌خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.
۱۹۲۸	اوئن ویلانز ریچاردسون (۱۸۷۹ – ۱۹۵۹) Owen Willans Richardson		به‌خاطر تحقیق در بارهٔ پدیدهٔ گرمایونی و به‌خصوص به‌خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.
۱۹۲۹	لویی-ویکتور دوبروی (۱۸۹۲ – ۱۹۸۷) (Prince) Louis-Victor de Broglie		به‌خاطر کشف خصلت موجی الکترون.
۱۹۳۰	چاندراسکارا ونکاتا رامان (۱۸۸۸ – ۱۹۷۰) (Sir) Chandrasekhara Venkata Raman		به‌خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.
۱۹۳۲	ورنر هایزنبرگ (۱۹۰۱ – ۱۹۷۶) Werner Heisenberg		به‌خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتومی داشته است.

۱۹۳۳	اروین شرودینگر Erwin Schrodinger	(۱۹۶۱ – ۱۸۸۷)	به‌خاطر کشف و ابداع شکلهای جدید و پربار نظریهٔ اتمی.
	پاؤل آدرین موریس دیراک Paul Adrien Maurice Dirac	(۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)	
۱۹۳۵	جیمز چادویک James Chadwick	(۱۹۷۴ – ۱۸۹۱)	به‌خاطر کشف نوترون.
۱۹۳۶	ویکتور فرانتس هس Victor Franz Hess	(۱۹۶۴ – ۱۸۸۳)	به‌خاطر کشف تابش کیهانی.
	کارل دیوید آندرسون Carl David Anderson	(۱۹۹۱ – ۱۹۰۵)	به‌خاطر کشف پوزیترون.
۱۹۳۷	کلینتون جوزف دیویسون Clinton Joseph Davisson	(۱۹۵۸ – ۱۸۸۱)	به‌خاطر کشف تجربی پراش الکترونها توسط بلورها.
	جورج پاگت تامسون George Paget Thomson	(۱۹۷۵ – ۱۸۹۲)	
۱۹۳۸	انریکو فرمی Enrico Fermi	(۱۹۵۴ – ۱۹۰۱)	به‌خاطر نشان دادن پرتوزایی مصنوعی بعضی عناصر در اثر دریافت تابش نوترون، و کشف بعضی واکنشهای هسته‌ای که با تاباندن نوترونهای کند ایجاد می‌شود.
۱۹۳۹	ارنست اورلاندو لارنس Ernest Orlndo Lawrence	(۱۹۵۸ – ۱۹۰۱)	به‌خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به‌خصوص در بارهٔ عناصر پرتوزای مصنوعی.
۱۹۴۳	اوتو اشترن Otto Stern	(۱۹۶۹ – ۱۸۸۸)	به‌خاطر سهمش در ابداع روش پرتو مولکولی و به خاطر کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.
۱۹۴۴	ایزیدور ایزاک رابی Isidor Isaac Rabi	(۱۹۸۸ – ۱۸۹۸)	به‌خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.
۱۹۴۵	ولفگانگ پائولی Wolfgang Pauli	(۱۹۵۸ – ۱۹۰۰)	به‌خاطر کشف اصل طرد، که به اصل پائولی هم معروف است.
۱۹۴۶	پرسی ویلیامز بریجمن Percy Williams Bridgman	(۱۹۶۱ – ۱۸۸۲)	به‌خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای فوق‌العاده زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینهٔ فیزیک فشارهای بالا داشته است.
۱۹۴۶	سر ادوارد ویکتور اپلتون Sir Edward Victor Appleton	(۱۹۶۵ – ۱۸۹۲)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد فیزیک جو بالایی، به‌خصوص به‌خاطر کشف لایهٔ معروف به اپلتون.
۱۹۴۸	پاتریک مینارد استوارت بلاکت Patrick Maynard Stuart Blackett	(۱۹۷۴ – ۱۸۹۷)	به‌خاطر تکمیل روش اتاقک ابری ویلسون، و واقعیتهایی که به وسیلهٔ این روش در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی کشف کرد.
۱۹۴۹	هیدکی یوکاوا Hideki Yukawa	(۱۹۸۱ – ۱۹۰۷)	به‌خاطر پیشگویی وجود مزونها بر پایهٔ تحقیقات نظری‌اش در بارهٔ نیروهای هسته‌ای.
۱۹۵۰	سیسل فرانک پاول Cecil Frank Powell	(۱۹۶۹ – ۱۹۰۳)	به‌خاطر تکمیل روش نورنگاشتی مطالعهٔ فرایندهای هسته‌ای و کشفهایش در مورد مزونها با استفاده از این روش.
۱۹۵۱	جان داگلاس کاکرافت (Sir) John Douglas Cockcroft	(۱۹۶۷ – ۱۸۹۷)	به‌خاطر کار پیشگامانه‌شان در مورد استحالهٔ هسته‌های اتمی به‌وسیلهٔ ذرات اتمی شتابدار.
	ارنست توماس سینتون والتون Ernest Thomas Sinton Walton	(–۱۹۰۳)	
۱۹۵۲	فلیکس بلوخ Felix Bloch	(۱۹۸۳ – ۱۹۰۵)	به‌خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیسی هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.

	ادوارد میلز پورسل	(–۱۹۱۲) Edward Mills Purcell	
۱۹۵۳	فریتس زرنیکه	(۱۹۶۶ – ۱۸۸۸) Frits Zernike	به‌خاطر ارائه روش تباین فاز، به‌خصوص به‌خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.
۱۹۵۴	ماکس بورن	(۱۹۷۰ – ۱۸۸۲) Max Born	به‌خاطر پژوهشهای بنیادی‌اش در مکانیک کوانتومی، به‌خصوص به‌خاطر تعبیر آماری تابع موج.
	والتر بوث	(۱۹۵۷ – ۱۸۹۱) Walther Bothe	به‌خاطر ابداع روش تطابق و کشفهایش با استفاده از این روش.
۱۹۵۵	ویلیز اوژن لمب	(–۱۹۱۳) Willis Eugne Lamb	به‌خاطر کشفهایش در مورد ساختار ریز طیف هیدروژن.
	پولی کارپ کوش	(–۱۹۱۱) Polykarp Kusch	به‌خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.
۱۹۵۶	ویلیام شاکلی	(۱۹۸۹ – ۱۹۱۰) William Shockley	به‌خاطر پژوهشهایشان در بارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.
	جان باردین	(۱۹۹۱ – ۱۹۰۸) John Bardeen	
	والتر هاوزر براتین	(۱۹۸۷ – ۱۹۰۲) Walter Houser Brattain	
۱۹۵۷	چن نینگ یانگ	(–۱۹۲۲) Chen Ning Yang	به‌خاطر پژوهش بینادی‌شان در مورد قوانین پاریته که منجر به کشفهای مهمی در مورد ذرات بنیادی شد.
	تسونگ دائولی	(–۱۹۲۶) Tsung Dao Lee	
۱۹۵۸	پاول آلکسیویچ چرنکوف	(–۱۹۰۴) Pavel Aleksejevic Cerenkov	به‌خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.
	ایلیا میخائیلویچ فرانک	(۱۹۹۰ – ۱۹۰۸) Il'ja Michajlovic Frank	
	ایگور ایوانویچ تام	(۱۹۷۱ – ۱۸۹۵) Igor Evgen'evic Tamm	
۱۹۵۹	امیلیو جینو سگری	(۱۹۸۹ – ۱۹۰۵) Emilio Gino Segre	به‌خاطر کشف پادپروتون.
	اوئن چمبرلین	(–۱۹۲۰) Owen chamberlian	
۱۹۶۰	دونالد آرتور گلیزر	(–۱۹۲۶) Donald Arthur Glaser	به‌خاطر اختراع اتاقک حباب.
۱۹۶۱	روبرت هوفشتاتر	(۱۹۹۰ – ۱۹۱۵) Robert Hofstadter	به‌خاطر مطالعات بدیع‌اش در مورد پراکنش الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایش در بارهٔ ساختار نوکلئونها.
	رودولف لودویگ موسبائر	(–۱۹۲۹) Rudolf Ludwig Mössbauer	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشدیدی پرتوهای گاما و کشف اثری در همین زمینه که به نام خود او معروف شده است.
۱۹۶۲	لف داویدویچ لانداؤ	(۱۹۶۸ – ۱۹۰۸) Lev Davidovic Landau	به‌خاطر نظریه‌های بدیع‌اش در بارهٔ مادهٔ چگال، به‌خصوص در مورد هلیوم مایع.
۱۹۶۳	یوجین پال ویگنر	(–۱۹۰۲) Eugene Paul Wigner	به‌خاطر سهمش در تدوین نظریهٔ هستهٔ اتم و ذرات بنیادی، به‌خصوص از طریق کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.

	ماریا جو پرت مایر	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۲) Maria Goeppert Mayer	به‌خاطر کشفهایشان در مورد ساختار پوسته‌ای هسته.
	جی. هانس. دی. ینسن	(۱۹۰۷ – ۱۹۷۳) J. Hans D. Jensen	
۱۹۶۴	چارلز تاونز	(۱۹۱۵–) Charles H. Townes	به‌خاطر کارهای اساسی‌اش در زمینهٔ الکترونیک کوانتومی، که منجر به ساخت نوسانگرها و تقویت‌کننده‌ها بر پایه اصل میزر‌ـ‌لیزر شد.
	نیکولای باسوف	(۱۹۲۲–) Nikolai G. Basov	
	الکساندر پرو خوروف	(۱۹۱۶–) Alexander M. Prochorov	
۱۹۶۵	سن‌ـ‌ایتیر و توماناگا	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۹) Sin- Itiro Tomonaga	به‌خاطر تحقیقات بنیادی‌شان در زمینهٔ الکترودینامیک کوانتومی که پیامدهای مهمی در فیزیک ذرات بنیادی داشت.
	جولیان شوینگر	(۱۹۱۸–) Julian Schwinger	
	ریچارد فاینمن	(۱۹۱۸ – ۱۹۸۸) Richard P. Feynman	
۱۹۶۶	آلفرد کاستلر	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۴) Alfred Kastler	به‌خاطر کشف و توسعهٔ روشهای اپتیکی برای مطالعهٔ تشدید هرتزی در اتمها.
۲۹۶۷	هانس آلبرشت بته	(۱۹۰۶–) Hans Albrecht Bethe	به‌خاطر مشارکتهایش در نظریهٔ واکنشهای هسته‌ای، به‌خصوص کشفهایش در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.
۱۹۶۸	لوئیس آلوارز	(۱۹۱۱ – ۱۹۸۸) Luise W. Alvarez	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌اش در توسعهٔ فیزیک ذرات بنیادی، به‌خصوص با کشف تعداد زیادی از حالتهای تشدیدی.
۱۹۶۹	موری گل‌ـ‌مان	(۱۹۲۹–) Murray Gell-Mann	به‌خاطر مشارکتش در طبقه‌بندی ذرات بنیادی و برهم‌کنشهای آنها، و کشفهایش در این مورد.
۱۹۷۰	هانس آلون	(۱۹۰۸–) Hannes Alven	به‌خاطر کار اساسی و کشفهایش در زمینهٔ مغناطوهیدرودینامیک، با کاربردهای مفید در فیزیک پلاسما.
	لویی نل	(۱۹۰۴–) Louis Neel	به‌خاطر پژوهش بنیادی و کشفهایش در بارهٔ پادفرومغناطیس و فری‌مغناطیس، با کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد.
۱۹۷۱	دنیس گابور	(۱۹۰۰ – ۱۹۷۹) Dennis Gabor	به‌خاطر کشف اصول تمام‌نگاری (هولوگرافی).
۱۹۷۲	جان باردین	(۱۹۰۸ – ۱۹۹۱) John Bardeen	به‌خاطر پرداختن نظریه‌ای برای ابررسانایی
	لئون کوپر	(۱۹۳۰–) Leon N. Cooper	
	رابرت شریفر	(۱۹۳۱–) J. Robert Schrieffer	
۱۹۷۳	لئو ایزاکی	(۱۹۲۵–) Leo Esaki	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در نیمرساناها.
	ایوار جیاوور	(۱۹۲۹–) Ivar Giaever	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در ابررساناها.
	برایان جوزفسون	(۱۹۴۰–) Brian D. Josephson	به‌خاطر پیشگویی نظری خصوصیات عبور ابر جریان از سد تونلی.

۱۹۷۴	آنتونی هیویش	(–۱۹۲۴)	Antony Hewish	به‌خاطر کشف تپ‌اخترها.
	مارتین رایل	(۱۹۸۴ – ۱۹۱۸)	(Sir) Martin Ryle	به‌خاطر کار پیشگامانه‌اش در زمینهٔ نجوم رادیویی.
۱۹۷۵	آگه بور	(–۱۹۲۲)	Aage Bohr	به‌خاطر کشف ارتباط میان حرکت جمعی و حرکت ذره، و تدوین نظریه‌ای در مورد ساختار هستهٔ اتم بر این اساس.
	بن ماتلسون	(–۱۹۲۶)	Ben Mottelson	
	جیمز رینواتر	(۱۹۸۶ – ۱۹۱۷)	James Rainwater	
۱۹۷۶	برتون ریشتر	(–۱۹۳۱)	Burton Richter	به‌خاطر کشف یک ذرهٔ بنیادی مهم (به‌طور مستقل).
	ساموئل چائوچونگ تینگ	(–۱۹۳۶)	Samuel Chao Chung Ting	
۱۹۷۷	فیلیپ وارن اندرسون	(–۱۹۲۳)	Philip Warren Anderson	به‌خاطر تحقیقات نظری بنیادی‌شان دربارهٔ سیستمهای مغناطیسی و سیستمهای نامنظم.
	نویل فرانسیس موت	(–۱۹۰۵)	Nevil Francis Mott	
	جان هاسبروگ وان ولک	(۱۹۸۰ – ۱۸۹۹)		
۱۹۷۸	پیتر کاپیتزا	(۱۹۸۴ – ۱۸۹۴)	Peter L. Kapitza	به‌خاطر ابداعات و کشفهای اساسی در فیزیک دماهای پایین.
	آرنو پنزیاس	(–۱۹۲۶)	Arno N. Penzias	به‌خاطر کشف تابش میکروموجی زمینهٔ کیهانی.
	رابرت وودرو ویلسون	(–۱۹۳۶)	Robert Woodrow Wilson	
۱۹۷۹	شلدون لی گلاشو	(–۱۹۳۲)	Sheldon lee Glashow	به‌خاطر تدوین مدل وحدت‌یافتهٔ نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی، و به‌خاطر پیشگویی وجود جریانهای خنثی.
	عبدالسلام	(–۱۹۲۶)	Abdus Salam	
	استیون واینبرگ	(–۱۹۳۳)	Steven Weinberg	
۱۹۸۰	جیمز کرونین	(–۱۹۳۱)	James W. Cronin	به‌خاطر کشف موارد نقض اصول تقارن بنیادی در واپاشی مزونهای Kی خنثی.
	وال فیچ	(–۱۹۲۳)	Val L. Fitch	
۱۹۸۱	نیکولاس بلومبرگن	(–۱۹۲۰)	Nicolaas Bloembergen	به‌خاطر سهمشان در تکمیل طیف‌نمایی لیزری.
	آرتور لئونارد شاؤلو	(–۱۹۲۱)	Arthur Leonard Schawlow	
	کای زیگبان	(–۱۹۱۸)	Kai M. Siegbahn	به‌خاطر کارهایش در پیشبرد طیف‌نمایی الکترونی با تفکیک زیاد.
۱۹۸۲	کنت ویلسون	(–۱۹۳۶)	Kenneth Geddes Wilson	به‌خاطر ابداع روشی برای تحلیل پدیده‌های بحرانی.

۱۹۸۳	سوبرامانیان چاندراسکار	(۱۹۱۰–) Subrehmanyan Chandrasekhar	به‌خاطر مطالعات نظری‌اش دربارهٔ ساختار و تحول ستاره‌ها.
	ویلیام فاولر	(۱۹۱۱–) William A. Fowler	به‌خاطر مطالعاتش در مورد تشکیل عناصر شیمیایی در عالم.
۱۹۸۴	کارلو روبیا	(۱۹۳۴–) Carlo Rubbia	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌شان در "پروژهٔ بزرگ "که به کشف ذرات میدانی W و Z منجر شد.
	سایمون وان درمیر	(۱۹۲۵–) Simon Van Der Meer	
۱۹۸۵	کلاوس فون کلیتسینگ	(۱۹۴۳–) Klaus von Klizing	به‌خاطر کشف اثر کوانتومی هال.
۱۹۸۶	ارنست روسکا	(۱۹۰۶–) Ernst Ruska	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.
	گرد بینیگ	(۱۹۴۷–) Gerd Binnig	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی تونلی روبشی.
	هاینریش روهرر	(۱۹۳۳–) Heinrich Rohrer	
۱۹۸۷	کارل آلکس مولر	(۱۹۲۷–) Karl Alex Müller	به‌خاطر کشف ابررسانایی گرم.
	گئورگ بدنورز	(۱۹۵۰–) J. Georg Bednorz	
۱۹۸۸	لیون لدرمن	(۱۹۲۲–) Leon M. Lederman	به‌خاطر آزمایشهایشان با باریکه‌های نوترینو و کشف نوترینوی موئون.
	ملوین شوارتز	(۱۹۳۲–) Melvin Schwartz	
	جک استینبرگر	(۱۹۲۱–) Jack Steinberger	
۱۹۸۹	هانس دهملت	(۱۹۲۲–) Hans G. Dehmelt	به‌خاطر ابداع فنی برای دام‌اندازی اتمهای منفرد
	ولفگانگ پاؤل	(۱۹۱۳–) Wolfgang Paul	
	نورمن رمزی	(۱۹۱۵–) Norman F. Ramsey	به‌خاطر کشفهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی تشدیدی اتمی، که به‌ساخت میرزهیدروژن و ساعت اتمی منجر شد.
۱۹۹۰	ریچارد تیلور	(۱۹۲۹–) Richard E. Taplor	به‌خاطر آزمایشهایشان دربارهٔ پراکنش الکترونها از هسته‌ها، که حاکی از حضور کوارک در نوکلئونهاست.
	جرومی فریدمن	(۱۹۳۰–) Jerome I. Friedman	
	هنری کندال	(۱۹۲۶–) Henry W. Kendall	
۱۹۹۱	پی‌یر ژیل دژن	(۱۹۳۲–) Pierre-Gilles de Gennes	به‌خاطر کشفهایی در مورد آرایش مولکولها در موادی مثل بلورهای مایع، ابررساناها، و پولیمرها.
۱۹۹۲	ژرژ شارپاک	(۱۹۳۳–) Georges Charpak	به‌خاطر موفقیتهایش در طراحی آشکارسازهای الکترونیکی سریع برای ذرات پرانرژی

پاسخ مسائل شماره فرد

فصل ۱

۳. $52{,}6\mathrm{min}$؛ ۲٫۵درصد
۵. ٪۴۴− درصد
۷. (الف) بله. (ب)$8{,}6\mathrm{s}$
۹. ۷۲۰ روز.
۱۱. $55\mathrm{s}$؛ تقریباً یک دقیقه.
۱۳. ۲ روز و ۵ ساعت.
۱۵. (الف) $100\mathrm{m}$؛ $8{,}56\mathrm{m}$؛ $28{,}1\mathrm{ft}$
(ب) $1\mathrm{mi}$؛ $109\mathrm{m}$؛ $358\mathrm{ft}$
۱۷. $1{,}88\times10^{22}\mathrm{cm}^3$
۱۹. (الف) $4{,}00\times10^4\mathrm{km}$
(ب) $5{,}10\times10^8\mathrm{km}^2$
(ج) $1{,}08\times10^{12}\mathrm{km}^3$
۲۱. $2{,}86\times10^{-3}$ سال نوری بر قرن
۲۳. (الف) $4{,}85\times10^{-6}\mathrm{pc}$؛ $1{,}58\times10^{-5}\mathrm{ly}$
(ب) $9{,}48\times10^{12}\mathrm{km}$؛ $3{,}08\times10^{13}\mathrm{km}$
۲۵. (الف) ۳۹۰
(ب) $5{,}9\times10^7$
(ج) $3500\mathrm{km}$
۲۷. $5{,}97\times10^{26}$
۲۹. نیویورک
۳۱. $840\mathrm{km}$
۳۳. $132\mathrm{kg/s}$
۳۷. $605{,}780211\mathrm{nm}$
۳۹. (الف) $43{,}2\mathrm{cm}^2$
(ب) $43\mathrm{cm}^2$
۴۱. $\sqrt{Gh/c^3}=4{,}05\times10^{-35}\mathrm{m}$

فصل ۲

۱. $81\mathrm{ft}(24\mathrm{m})$
۳. $2\mathrm{cm/y}$
۵. $48\mathrm{mi/h}$ (این شخص علاوه بر سفر هفتگی راههای دیگری هم رفته است.)
۷. (الف) $45{,}0\mathrm{mi/h}(72{,}4\mathrm{km/h})$
(ب) $42{,}8\mathrm{mi/h}(68{,}8\mathrm{km/h})$
(ج) $43{,}9\mathrm{mi/h}(70{,}6\mathrm{km/h})$
۹. (الف) ۰، ۰، ۲−، ۰، $12\mathrm{m}$
(ب) ۲−، $12\mathrm{m}$
(ج) ۷، $0\mathrm{m/s}$
۱۱. (الف) $5{,}7\mathrm{ft/s}$
(ب) $7{,}0\mathrm{ft/s}$
۱۳. (الف) $28{,}5\mathrm{cm/s}$
(ب) $18{,}0\mathrm{cm/s}$
(ج) $40{,}5\mathrm{cm/s}$
(د) $28{,}1\mathrm{cm/s}$
(هـ) $30{,}4\mathrm{cm/s}$
۱۵. $-2\mathrm{m/s}^2$
۱۹. (الف) $OA:+{\bullet}-$؛ $AB:0,0$
$BC:+,+$؛ $CD:+,0$
(ب) خیر.
۲۱. (هـ) وضعیتهای الف، ب، و د
۲۳. (الف) $80\mathrm{m/s}$
(ب) $110\mathrm{m/s}$
(ج) $20\mathrm{m/s}^2$
۲۵. (ب) ۳۰٫۰−، ۲۰٫۰−، ۱۰٫۰−، $0{,}0\mathrm{m/s}$
(ج) ۴۰٫۰−، ۲۰٫۰−، ۰٫۰، ۲۰٫۰، ۴۰٫۰، $60{,}0\mathrm{m/s}$
(هـ) $20{,}0\mathrm{m/s}^2$، $20{,}0\mathrm{m/s}^2$، ۲۰٫۰
۲۷. (ب) $19\mathrm{m/s}$
(ج) $31\mathrm{m}$
۲۹. $2{,}8\mathrm{m/s}^2(9{,}4\mathrm{ft/s}^2)$
۳۱. $560\mathrm{ms}$
۳۳. $1{,}4\times10^{15}\mathrm{m/s}^2$
۳۵. $2{,}6\mathrm{s}$
۳۷. (الف) $4{,}5\times10^4\mathrm{ft/s}^2$
(ب) $5{,}8\mathrm{ms}$
۳۹. (الف) $5{,}71\mathrm{m/s}^2$
(ب) $3{,}68\mathrm{s}$
(ج) $5{,}78\mathrm{s}$
(د) $95{,}4\mathrm{m}$
۴۱. (الف) $60{,}6\mathrm{s}$
(ب) $36{,}4\mathrm{m/s}$
۴۳. (الف) $0{,}75\mathrm{s}$
(ب) $50\mathrm{m}$

۴۵. (الف) ۸۲m
(ب) ۱۹m/s
۴۷. (الف) $۱۲ft/s^۲$ $(۳٫۶m/s^۲)$
(ب) ۳٫۷ft/s (۱٫۴m/s)
۴۹. (الف) ۰٫۷۴s
(ب) $-۲۰ft/s^۲$
۵۱. (الف) ۴۸٫۵m/s
(ب) ۴٫۹۵s
(ج) ۳۴٫۳m/s
(د) ۳٫۵۰s
۵۳. (الف) ۳۲٫۴m/s
(ب) ۶٫۶۲s
۵۵. عطارد
۵۷. ۱٫۲۳cm، ۴٫۹۰cm، ۱۱٫۰cm، ۱۹٫۶cm، ۳۰٫۶cm
۵۹. ۳٫۰m(۹٫۸ft)
۶۱. (الف) ۳۵۰ms
(ب) ۸۲ms
۶۳. ۲۲٫۲cm و ۸۸٫۹cm زیر دهانه.
۶۵. $۱۳۰m/s^۲$، بالا
۶۷. (الف) ۳٫۴۱s
(ب) ۵۷٫۰m
۶۹. تقریباً ۰٫۳s
۷۱. (الف) ۱۷٫۱s
(ب) ۲۹۳m
۷۵. ۶٫۸cm

فصل ۳

۱. جابه‌جاییها باید (الف) موازی، (ب) پادموازی، و (ج) عمود بر هم باشند.
۳. (الف) ۳۷۰m، ۵۷° شرق شمال.
(ب) اندازهٔ جابه‌جایی= ۳۷۰ متر؛ مساحت طی‌شده= ۷۲۰ متر.
۷. (الف) ۴٫۵ واحد، ۵۲° شمال شرق.
(ب) ۸٫۴ واحد، ۲۵° جنوب شرق
۹. والپول (زندان ایالتی)
۱۱. (الف) ۴٫۹m، (ب) ۱۲m
۱۳. ۴٫۷۶km
۱۵. (الف) ۲۸m، و (ب) ۱۳m
۱۷. (الف) ۱۰i + ۱۲j + ۱۴k
(ب) ۲۱ft
(ج) می‌تواند مساوی یا بزرگتر باشد، ولی نه کوچکتر
(د) ۲۶ft
۱۹. (الف) ۳i − ۲j + ۵k
(ب) ۵i − ۴j − ۳k
(ج) −۵i + ۴j + ۳k
۲۱. (الف) ۱۴۰۰i + ۲۱۰۰j − ۴۸k
(ب) صفر
۲۳. (الف) $r_x = ۲٫۵۰$، $r_y = ۱۵٫۳$
(ب) ۱۵٫۵ (ج) ۸۰٫۷°
۲۷. (الف) $ai + aj + ak$، $ai + aj - ak$، $ai - aj - ak$، $ai - aj + ak$
(ب) ۵۴٫۷° (ج) $a\sqrt{۳}$
۳۳. (الف) −۱۹ . (ب) ۲۷، جهت $+z$
۳۹. (الف) −۲۱ (ب) −۹
(ج) ۵i − ۱۱j − ۹k
۴۱. (الف) صفر (ب) −۱۶ (ج) −۹
۴۳. (الف) ۲٫۹۷ (ب) ۱٫۵۱i − ۲٫۶۷j − ۱٫۳۶k
(ج) ۴۸٫۵°
۴۹. ۷۰٫۵°

فصل ۴

۱. (الف) ۹۲۰mi، ۶۳° جنوب شرق.
(ب) ۴۱۰mi/h، ۶۳° جنوب شرق.
(ج) ۵۵۰mi/h
۳. (الف) ۳٫۹km/h (ب) ۱۳°
۵. (الف) ۲۴ns (ب) ۲٫۷mm
(ج) $۹٫۶ \times ۱۰^۸cm/s$؛ $۲٫۳ \times ۱۰^۸cm/s$
۷. (الف) ۸tj + k (ب) ۸j (ج) سهمی
۹. ۶۰۰
۱۱. (الف) ۵۱۴ms (ب) ۹٫۹۴ft/s
۱۳. (الف) ۱۸cm (ب) ۱٫۹m
۱۵. (الف) ۳٫۰۳s (ب) ۷۵۸m (ج) ۲۹٫۷m/s
۱۷. خیر
۱۹. (الف) ۱٫۱۶s (ب) ۱۳٫۰m
(ج) ۱۸٫۸m/s؛ ۵٫۵۶m/s (د) خیر
۲۱. ۷۶٫۰۰
۲۳. (الف) ۹۹ft (ب) ۹۰ft/s (ج) ۱۸۰ft
۲۵. (الف) ۲۸۵km/h (ب) ۳۳°
۲۷. (الف) ۳۱۰ms (ب) ۱٫۹m و ۲٫۹m بالاتر از دستها.
۲۹. سومی
۳۱. بله
. (الف) ۲۶۰m/s (ب) ۴۵s
۳۵. ۲۳ft/s
۳۷. (الف) ۹٫۸s (ب) ۲۷۰۰ft
۳۹. تقریباً ۴۰m (۱۳۰ft)

۴۱. (الف) ۲۰cm (ب) خیر؛ توپ ۴٫۴cm بالاتر از زمین به تور می‌خورد.

۴۳. بین زوایای ۳۱° و ۶۳° بالای افق.

۴۵. ۱۱۵ft/s

۴۷. (الف) $D = v\sqrt{(2L/g)\sin\theta} - L\cos\theta$
(ب) پرتابه در صورتی که D مثبت باشد از بالای سر ناظر می‌گذرد و اگر D منفی باشد، به ناظر نمی‌رسد.

۴۹. ۵٫۶۶s

۵۱. ۸٫۹۸ × $10^{22}\mathrm{m/s^2}$

۵۳. (الف) ۷٫۴۹km/s (ب) ۸٫۰۰m/s^2

۵۵. (الف) ۹۴cm (ب) ۱۹m/s (ج) ۲۴۰۰m/s^2

۵۷. (الف) ۱۳۰km/s (ب) ۸۵۰km/s^2

۶۱. (الف) ۹۲ (ب) ۹٫۶ (ج) $(9.6)^2 = 92$

۶۳. ۲٫۶cm/s^2

۶۵. (الف) ۳۳٫۶m/s^2 (ب) ۸۹٫۷m/s^2

۶۷. ۳۶s ثانیه؛ خیر

۶۹. باد از سمت غرب با سرعت ۵۵mi/h می‌وزد.

۷۱. ۳۱m/s

۷۵. (الف) ۵٫۸m/s (ب) ۱۷m (ج) ۶۷° (د) ۴۹°

۷۷. ۱۷۰km/h؛ ۷٫۳° جنوب غرب

۷۹. (الف) ۳۰۰ برخلاف جریان (ب) ۶۹min
(ج) ۸۰min (د) ۸۰min
(ه) عمود بر جریان؛ ۶۰min

۸۱. (الف) سر قایق باید ۲۵° به‌طرف بالای رودخانه گرفته شود.
(ب) ۰٫۲۱h

۸۳. ۰٫۸۳c

۸۵. (ب) $t = 2.16\mathrm{s}$، $x = 97.7\mathrm{m}$، $y = 22.8\mathrm{m}$
(ج) $t = 4.31\mathrm{s}$، $x = 195\mathrm{m}$، $v_x = 45.3\mathrm{m/s}$، $v_y = -21.1\mathrm{m/s}$

فصل ۵

۱. ۶٫۳y

۳. (الف) ۱٫۰ × 10^{-15}N (ب) ۸٫۹ × 10^{-30}N

۵. ۸۰cm/s^2

۷. ۶۵۰۰N

۹. (الف) ۳٫۱cm/s^2 (ب) ۱٫۲ × 10^{5}km
(ج) ۲٫۷km/s

۱۱. (الف) $42\hat{i} + 34\hat{j}$, ms (ب) $630\hat{i} + 250\hat{j}$, m

۱۳. (الف) ۱٫۳۹ × 10^{8}N؛ ۶٫۹۴ × 10^{6}N
(ب) ۴٫۱۱y؛ ۴٫۱۹y

۱۵. (الف) ۰٫۶۲m/s^2 (ب) ۰٫۱۳m/s^2 (ج) ۲٫۶m

۱۷. (الف) ۴۴٫۴slug؛ ۱۴۲۰lb
(ب) ۴۱۲kg؛ ۴۰۴۰N

۱۹. (الف) ۱۲٫۲N؛ ۲٫۶۵kg (ب) صفر؛ ۲٫۶۵kg

۲۱. ۱۶۰۰lb

۲۳. ۱٫۱۹ × 10^{6}N (۱۳۳ تن)

۲۵. (الف) ۱٫۸mN (ب) ۳٫۳mN

۲۷. ۰٫۱۵N

۲۹. (الف) ۲۱۰m/s^2(۷۱۰ft/s^2)
(ب) ۱۷kN(۴۰۰۰lb)

۳۱. (الف) ۷٫۳kg(۰٫۵۰slug)
(ب) ۸۹N(۲۰lb)

۳۳. (الف) ۲٫۱m/s^2 (ب) ۱۲۰N (ج) ۲۱m/s^2

۳۵. (الف) ۱٫۸m/s^2 (ب) ۳٫۸m/s
(ج) ۴٫۰m (د) ۱۱°

۳۷. ۱۸٫۴kN

۳۹. (ب) ۱۲ft/s^2 (ج) ۸٫۹°

۴۱. ۳۳m/s

۴۳. (الف) ۷۳۰N (ب) ۱۳۰۰N

۴۵. (الف) ۳۲۶۰N (ب) ۲۷۲۰kg (ج) ۱٫۲۰m/s^2

۴۷. (الف) ۵٫۰ × 10^{5}N (ب) ۱٫۴ × 10^{6}N

۴۹. $2M\left(\frac{a}{a+g}\right)$

۵۱. (الف) $g\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب
(ب) $g\sin\theta$، به طرف پایین شیب
(ج) $(g-a)\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب
(د) $(g+a)\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب
(ه) صفر (و) $m(g-a)\cos\theta$

۵۳. (الف) ۶٫۸m/s (ب) بله، می‌تواند در حین سقوط، از طناب بالا برود.

۵۵. (الف) ۰٫۹۷m/s^2
(ب) $T_1 = 1.2\mathrm{N}$؛ $T_2 = 3.5\mathrm{N}$

۵۷. (الف) ۱۳۵N (ب) ۴۵٫۳N (ج) ۷۵٫۴N

۵۹. (الف) ۰٫۲۱۷m/s^2 (ب) ۱۷٫۸N

۶۱. (الف) ۱۲٫۱kN (ب) ۱۰٫۵kN
(ج) ۱٫۶۰kN به‌طرف وزنهٔ تعادل

۶۳. (الف) ۳۷N (ب) ۵۵N
(ج) ۳۶m/s^2، به‌طرف بالا

۶۵. (ب) $P/(m+M)$ (ج) $PM/(m+M)$
(د) $P(m+2M)/2(m+M)$

۶۷. ۱۳۰lb

فصل ۶

۱. ۲٫۳°

۳. ۹٫۳m/s^2

۵. ۹۰۰N

۷. (الف) ۹٫۱kN (ب) ۹٫۰kN
۹. (الف) خیر (ب) نیروی ۱۲ پوندی به‌طرف چپ و نیروی ۵ پوندی به‌طرف بالا
۱۱. (الف) ۱۱٫۱N (ب) ۴۷٫۳N (ج) ۴۰٫۱N
۱۵. (الف) $v_{\circ}^{۲}/۴g\sin\theta$ (ب) خیر
۱۷. (الف) ۱۰kg (ب) $۲٫۷\text{m/s}^{۲}$
۱۹. (الف) ۶۱N (ب) ۶۶N (ج) ۵٫۹kN
۲۱. (الف) ۷۰lb (ب) $۴٫۶\text{ft/s}^{۲}$
۲۳. (ب) ۳۰MN
۲۵. (الف) $۱٫۲۴\text{m/s}^{۲}$ (ب) ۱۳٫۴N
۲۷. $g(\sin\theta - \sqrt{۲}\mu_k\cos\theta)$
۲۹. (الف) $۳٫۴۶\text{m/s}^{۲}$ (ب) ۰٫۹۱۰N در کشش
(ج) $۳٫۴۶\text{m/s}^{۲}$؛ ۰٫۹۱۰N در تراکم
۳۱. (الف) $۷٫۶\text{m/s}^{۲}$ (ب) $۰٫۸۶\text{m/s}^{۲}$
۳۳. (الف) (۳۲۰۰N)۷۳۰lb (ب) ۰٫۳۰
۳۵. (الف) ۰٫۴۶ (ب) ۰٫۹۲
۳۷. ۸۷۰N؛ ۱۷°
۳۹. ۰٫۰۳۲
۴۱. (الف) ۰٫۴۳ (ب) ۴۲m
۴۳. (الف) ۱۷۵lb (ب) ۵۰٫۵lb
۴۵. (الف) ۳۰cm/s
(ب) $۱۷۰\text{cm/s}^{۲}$، در امتداد شعاع به طرف مرکز
(ج) ۲٫۹mN
(د) ۰٫۴۰
۴۷. ۲٫۳۲km
۴۹. (الف) در پایین دایره (ب) ۳۱ft/s
۵۱. (الف) ۰٫۰۳۳۷N (ب) ۹٫۷۷N
۵۳. (الف) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta+\mu_s)}{r(۱-\mu_s\tan\theta)}}$
(ب) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta-\mu_s)}{r(۱+\mu_s\tan\theta)}}$
۵۵. (الف) ۲۳۵m/s (ب) $۱۰۷\text{m/s}^{۲}$ (ج) ۲۳۲N
۵۷. (الف) $۰٫۶۳۲F_{\circ}T/m$ (ب) $۰٫۳۶۸F_{\circ}T^{۲}/m$
۵۹. $\sqrt{mg/b}$
۶۱. $۲٫۰ \times ۱۰^{-۵}\text{N.s/m}$
۶۳. ۱٫۳۰m/s
۶۵. (الف) $\left(\frac{m}{b}\right)\ln(v_i/v_f)$
(ب) ۱۹s
۶۷. ۳۷۰m
۶۹. (الف) ۱۱٫۷s (ب) ۵۹٫۸m/s (ج) ۰٫۶۱۰
۷۱. ۸۱۹m، ۸۳۸m، ۸۳۳m، ۸۰۵m، ۷۶۲m، ۳۰۰
۷۳. (الف) $t = ۱٫۹۵\text{s}$، $x = ۸۰٫۴\text{m}$، $y = ۲۰٫۰\text{m}$
$v_x = ۳۷٫۳\text{m/s}$، $v_y = ۰$، $a_x = -۳٫۷۳\text{m/s}^{۲}$،
$a_y = -۹٫۸۰\text{m/s}^{۲}$
(ب) $t = ۱٫۷۹\text{s}$، $x = ۶۸٫۳\text{m}$، $y = ۱۷٫۸\text{m}$
$v_x = ۳۱٫۷\text{m/s}$، $v_y = ۰$، $a_x = -۶٫۳۳\text{m/s}^{۲}$،
$a_y = -۹٫۸۰\text{m/s}^{۲}$؛
(ج) ۱۵۱m، ۱۲۱m
(د) برای $b = ۰٫۱۰\text{s}^{-۱}$: $v_x = ۳۰٫۳\text{m/s}$،
$v_y = -۱۸٫۵\text{m/s}$
برای $b = ۰٫۲۰\text{s}^{-۱}$: $v_x = ۲۱٫۱\text{m/s}$، $v_y = -۱۶٫۴\text{m/s}$

فصل ۷

۱. (الف) ۵۸۰J (ب) صفر (ج) صفر
۳. (الف) ۴۳۰J (ب) ۴۰۰J− (ج) صفر
۵. (الف) $-\frac{۳}{۴}Mgd$ (ب) Mgd
۷. (الف) ۲۱۶۰J (ب) ۱۴۳۰J−
۹. (الف) ۲۱۵lb (ب) $۱٫۰۱ \times ۱۰^{۴}\text{ft.lb}$
(ج) ۴۸٫۰ft (د) $۱٫۰۳ \times ۱۰^{۴}\text{ft.lb}$
۱۱. ۸۰۰J
۱۳. $\frac{۳}{۲}F_{\circ}x_{\circ}$
۱۵. (الف) ۲۳mm (ب) ۴۵N
۱۷. (الف) ۱۳۵N (ب) ۶۰٫۰J
۱۹. ۱۲۰۰km/s
۲۱. $Ab: +$؛ $Bc: ۰$؛ $CD: -$؛ $DE: +$
۲۳. ۱۰۰ft، خیر
۲۵. (۲۴٫۴J)۲۰٫۲ft.lb
۲۷. ۲٫۴۱ (پدر)، ۴٫۸۲m/s (پسر)
۲۹. (الف) $۹٫۰ \times ۱۰^{۴}$ مگاتن TNT (ب) ۴۵km
۳۱. ۶٫۵۵m/s
۳۳. (الف) ۳۰۴mJ (ب) ۱٫۷۵J− (ج) ۳٫۳۲m/s
(د) ۲۲٫۵cm
۳۵. (۰٫۹۷hp)۷۲۰W
۳۷. ۲۴W
۳۹. (الف) $۲٫۴۵ \times ۱۰^{۵}\text{ft.lb}$ (ب) ۰٫۶۱۹hp
۴۱. ۹۰٫۳kN
۴۳. ۲۵hp
۴۵. (الف) ۰٫۷۷mi (ب) ۷۱kW
۴۷. ۱۶٫۶kW
۴۹. (ب) $mtv_f^{۲}/t_f^{۲}$
۵۱. ۲٫۶۶hp
۵۳. (ب) ۱٫۹۵
۵۵. (الف) ۱۰٫۰kW (ب) ۲٫۹۷kJ
۵۷. ۶۹hp

۶۱. (الف) ۰٫۱۳c (ب) ۴٫۶keV (ج) کمتر از ۱٫۳ درصد
۶۳. (الف) ۷۹٫۱keV (ب) ۳٫۱۱MeV (ج) ۱۰٫۹MeV

فصل ۸

۱. ۱۱۰MN/m
۳. (الف) ۷٫۸MJ (ب) ۶٫۲
۵. ۲٫۱۵m/s
۷. (الف) ۲۷٫۰kJ (ب) ۲٫۹۴kJ
(ج) ۱۵۸m/s؛ a و b
۹. (الف) ۲٫۵۶J (ب) ۱۱٫۱m/s
۱۱. ۸۳۰ft
۱۳. ۲٫۷۵m/s
۱۵. (الف) ۱۳۰۰MW (ب) ۱۳۷M$
۱۹. ۴٫۲۴m
۲۱. (الف) ۳۴٫۲ft/s (ب) ۴٫۳۲m
۲۳. $mgL/32$
۲۵. ۱۱٫۱cm
۲۷. (الف) ۸٫۰۶mg، ۸۲٫۹° به‌طرف چپ خط قائم
(ب) $5R/2$
۲۹. (الف) $U(x) = -Gm_1m_2/x$
(ب) $Gm_1m_2d/x_1(x_1+d)$
۳۱. (الف) ۶۹٫۲J (ب) ۷٫۹۹m/s (ج) پایستار
۳۵. (الف) ۴۴٫۶cm (ب) ۳٫۴۷cm
۳۷. (الف) $\sqrt{5gR}$ (ب) $\theta = \sin^{-1}(1/3)$
۴۱. (ج) -1.2×10^{-19}J (د) 2.2×10^{-19}J
(ه) $\approx 1 \times 10^{-9}$N، به‌طرف M
۴۵. (الف) $-U_0(r_0 r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0}$
(ب) ۰٫۱۴، ۰٫۰۰۷۸، 6.8×10^{-6}
۴۷. (الف) ۳٫۰۲kJ (ب) ۳۹۱J
(ج) −۲٫۶۳kJ
۴۹. ۳۹kW
۵۱. ۴۷۲kJ
۵۳. ۴٫۱۹m
۵۵. ۶۵٫۱cm/s
۵۷. (الف) ۴۸٫۷m/s (ب) ۶۴٫۵kJ
۵۹. (الف) ۲۴٫۰ft/s (ب) ۳٫۰۰ft/s
(ج) ۹٫۰۰ft (د) ۴۸٫۸ft
۶۱. (الف) ۱۰٫۸ PJ (ب) ۲۶۳۰۰۰y
۶۳. ۱٫۱۰kg کم می‌شود
۶۵. ۲۶۶ برابر محیط استوای زمین
۶۷. ۱۹۱
۶۹. ۲٫۲۱eV
۷۱. (الف) −۱۲٫۵kJ (ب) ۲٫۷۰kJ
(ج) −۹٫۸۰kJ (د) ۱٫۷۰kJ (ه) ۱۰۰J
(و) $x = 2.95$m، $y = -2.95$m
۷۳. (الف) ۰٫۵۴۱J، ۰٫۵۴۱J، ۰٫۵۴۱J
(ب) ۰٫۵۴۱J، ۱٫۰۸J، ۰٫۳۸۳J

فصل ۹

۱. (ج)

$$x_1 = x_{cm} - (m_2/M)(L + a_i \cos\omega t)$$
$$x_2 = x_{cm} + (m_1/M)(L + d_i \cos\omega t)$$
$$v_1 = (m_2/M) d_i \omega \sin\omega t$$
$$v_2 = -(m_1/M) d_i \omega \sin\omega t$$

۳. ۴۶۴۰km (۱۷۳۰km زیر سطح زمین)
۵. ۷۵٫۲km/h
۷. (الف) پایین؛ $mv/(m+M)$
(ب) بالون دوباره ساکن می‌شود
۹. (الف) L (ب) صفر
۱۱. (الف) در وسط فاصلهٔ دو جسم
(ب) ۱٫۲mm به‌طرف جسم سنگین‌تر حرکت می‌کند.
(ج) ۰٫۰۱۶۰g، پایین
۱۳. $g(1 - 2x/L)$
۱۵. ۵۵٫۲kg
۱۷. $L/5$ از میلهٔ سنگینی، در راستای محور تقارن
۱۹. $x_{cm} = y_{cm} = 20$cm؛ $z_{cm} = 16$cm
۲۱. در فاصلهٔ $4R/3\pi$ از قاعدهٔ تخت، روی محور تقارن
۲۳. (الف) 6.94×10^2J
(ب) 3.56×10^2kg.m/s؛ ۳۸٫۷° جنوب شرق
۲۵. (الف) ۶٫۹۶J (ب) $P_i = 0.854$kgm/s، ۲۷٫۴° بالای افق؛ $P_f = 0.854$kgm/s، ۲۷٫۴° در راستای قائم؛ ۰٫۷۸۶kgm/s
(ج) ۱٫۵۳s
۲۹. ۰٫۱۰۳ft/s، به‌طرف عقب
۳۱. $wv_{rel}/(W + w)$
۳۳. ۲۷
۳۵. (الف) محفظهٔ موشک: ۷۲۹۰m/s؛ مواد منفجره: ۸۲۰۰m/s
(ب) قبل: ۱۲٫۷۱GJ؛ بعد: ۱۲٫۷۵GJ
۳۷. (الف) 1.4×10^{-22}kg.m/s؛ ۱۵۰° از مسیر الکترون و ۱۲۰° از مسیر نوترون (ب) ۱٫۰eV
۳۹. (الف) ۷۴۶m/s (ب) ۹۶۳m/s
۴۱. بله
۴۳. $\sqrt{2gh}\left(\frac{u\cos\alpha}{\sqrt{1 - u\cos^2\alpha}}\right)$، $u = \frac{m}{m+M}$

۴۵. ۲٫۶۶m/s
۴۷. (الف) ۱۷۹۰N، (ب) ۶۰۹J
۵۱. (الف) ۲٫۷۲ (ب) ۷٫۳۹
۵۳. ۱٫۳۳km/s
۵۵. ۶۰N
۵۷. (الف) ۴۹٫۱kg (ب) ۱۴۱kg
۵۹. (الف) (۵۲۶۰lb)۲۳٫۴kN (ب) (۵۷۸۰hp)۴٫۳۱MW

فصل ۱۰

۱. ۶۴kN
۳. ۲μu
۵. (الف) ۲٫۴۰N.s (ب) ۲٫۴۰N.s
(ج) ۲٫۰۰kN (د) ۶۲٫۷J
۷. (۷۴۴lb)۳٫۲۹kN
۹. (الف) ۲٫۲۰N.s، به‌طرف چپ
(ب) ۲۱۲N، به‌طرف راست
۱۱. (الف) ۱٫۹۵ × ۱۰^{۵}kg.m/s، برای هر جهت پیشروی
(ب) به‌طرف عقب: ۶۶٫۱MJ+
به‌طرف جلو: ۵۰٫۹MJ−
در جهت عرضی: ۷٫۶۱MJ+
۱۳. ۴۱٫۷cm/s
۱۷. (الف) ۱٫۰۳kg.m/s (ب) ۲۵۰J
(ج) ۱۰٫۳N (د) ۸۲۴N
۱۹. ۱۲۴kW
۲۱. (الف) ۱٫۹m/s، به‌طرف راست (ب) بله
۲۳. ۴٫۲m/s
۲۵. (الف) ۲٫۷۴m/s (ب) ۱٫۴۶km/s
۲۷. ≈ ۲mm/g
۲۹. ۱٫۲kg
۳۱. (الف) ۷۴٫۴m/s (ب) ۸۱٫۵m/s، ۸۴٫۱m/s
۳۳. (الف) A: ۴٫۵۷m/s؛ B: ۳٫۹۴m/s (ب) ۷٫۵۳m/s
۳۵. ۱۲٫۹ تن
۳۷. (الف) ۴٫۲۱ft/s؛ ۲۲۱۰ft.lb
(ب) ۳٫۲۱ft/s؛ ۵٫۵۱ft/s
۳۹. ۴۱٫۰N
۴۱. ۳۵٫۹cm
۴۳. $\sqrt{2E\left(\frac{M+m}{Mm}\right)}$
۴۷. (الف) ۴٫۰i + ۵٫۰j, m/s
(ب) ۷۰۰J به‌دست می‌آید
۵۱. (الف) ۲۶۰° از جهت پروتون فرودی
(ب) ۲۲۷m/s؛ ۴۶۶m/s
۵۳. $v = V/4$

۵۵. (الف) ۳٫۴۳m/s، ۱۷٫۳۰° به‌طرف راست
(ب) ۹۵۴kJ
۵۷. (الف) ۲۸٫۰۰° (ب) ۷٫۴۴m/s
۶۱. ۲٫۴۴m/s به‌طرف چپ
۶۳. (الف) ۱۱۷MeV (ب) K_n = ۱۰۲MeV؛
K_n = ۱۵٫۰MeV
۶۵. (الف) (−۱٫۰۴î + ۰٫۶۵۵ĵ) × ۱۰$^{-۱۹}$kg.m/s
(ب) ۷٫۶۶MeV

فصل ۱۱

۳. (الف) ۵٫۵ × ۱۰^{۱۵}s (ب) ۲۶
۵. (الف) ۰٫۱۰۵rad/s (ب) ۱٫۷۵ × ۱۰$^{-۳}$rad/s
(ج) ۱٫۴۵ × ۱۰$^{-۴}$rad/s
۷. ۱۱ rad/s
۹. (الف) ۴٫۸m/s (ب) خیر
۱۱. ۲۳h۵۶min
۱۳. (الف) ۸۱۴۰rev/min^{۲} (ب) ۴۲۵rev
۱۵. (الف) −۱٫۲۸rad/s^{۲} (ب) ۲۴۸rad
(ج) ۳۹٫۵rev
۱۷. (الف) ۲٫۰rev/s (ب) ۳٫۸s
۱۹. (الف) ۳۶۹s (ب) −۳٫۹۰ × ۱۰$^{-۳}$rad/s^{۲}
(ج) ۱۰۸s
۲۱. (ب) −۲٫۳۰ × ۱۰$^{-۹}$rad/s^{۲}
(ج) ≈ ۴۶۱۰ (د) ۲۴ms
۲۳. (الف) ۳٫۴۹rad/s (ب) ۲۰٫۶in/s
(ج) ۱۰٫۱in/s (د) ۷۱٫۹in/s^{۲}؛ ۳۵٫۳in/s^{۲}
۲۵. ۵٫۶rad/s^{۲}
۲۷. (الف) ۳٫۶۵rad/s (ب) ۳۸٫۰m/s
(ج) ۶٫۷۸m/s^{۲} (د) ۱۳۹m/s^{۲}
۲۹. ۴٫۵۶s
۳۱. (الف) −۱٫۱۸rev/min^{۲} (ب) ۱۰۳۰۰
(ج) ۱٫۰۸mm/s^{۲} (د) ۳۰٫۲m/s^{۲}
۳۳. (الف) (۱٫۹ × ۱۰^{۴}m/min)۶٫۳ × ۱۰^{۴}ft/min
(ب) (۲٫۱ × ۱۰^{۴}m/min)۶٫۸ × ۱۰^{۴}ft/min
۳۵. ۱۶٫۴s
۳۷. (الف) $r\alpha^2t^2$ (ب) $r\alpha$ (ج) ۴۴٫۱°
۳۹. (الف) ۷۱rad/s (ب) −۱۳rad/s^{۲}
(ج) ۷۲m
۴۱. (الف) $x^2 + y^2 = R^2$؛ دایره‌ای به شعاع R؛ ω سرعت زاویه‌ای جسم است.
(ب) $v_x = -\omega y$؛ $v_y = \omega x$؛ v مماس بر دایره است؛ $v = \omega R$
(ج) $a = \omega^2 R$؛ a در راستای شعاع به طرف مرکز دایره است.

فصل ۱۲

۱. (الف) ۱۳۰۵g.cm^{2} (ب) ۵۴۵g.cm^{2} (ج) ۱۸۵۰cm^{2}

۳. ۶٫۷۵ × ۱۰^{12}rad/s

۵. (الف) ۶۴۹۰kg.m^{2}

(ب) ۴٫۳۶MJ

۷. ۰٫۰۹۷kg.m^{2}

۹. (ب) $MR^2/4$

۱۳. (الف) $dm/M = 2r\,dr/R^2$

(ب) $dI = 2Mr^3dr/R^2$

(ج) $I = \frac{1}{2}MR^2$

۱۵. ۳٫۶۶N.m، عمود بر صفحه به طرف داخل

۱۷. ۱۲N.m، عمود بر صفحه به طرف خارج

۱۹. ۷٫۶۳rad/s^{2}، به طرف خارج صفحه

۲۱. (الف) ۲۸٫۲rad/s^{2} (ب) ۳۳۸ N.m

۲۳. ۱٫۳۶kW

۲۵. (الف) ۲٫۵۷ × ۱۰^{29}J (ب) ۱٫۴۹Gy

۲۷. ۶۹۰rad/s

۲۹. (الف) $2\theta/t^2$ (ب) $2R\theta/T^2$

(ج) $T_1 = M(g - 2R\theta/t^2)$؛

$T_2 = Mg - (2\theta/t^2)(MR + I/R)$

۳۱. ۱٫۷۳ × ۱۰^{5}g.cm^{2}

۳۳. ۶٫۱۱m/s

۳۵. (الف) ۷٫۶۷rad/s^{2}− (ب) ۱۱٫۷N.m−

(ج) ۴۵٫۸kJ (د) ۶۲۴rev

(هـ) انرژی اتلاف شده در اثر اصطکاک برابر با ۴۵٫۸kJ است.

۳۷. (الف) ۴٫۸۲ × ۱۰^{5}N (ب) ۱٫۱۲ × ۱۰^{4}N.m

۳۹. (الف) ۱٫۸۸ × ۱۰^{12}J/s

(ب) ۲٫۶۷ × ۱۰$^{-22}$rad/s^{2}−

(ج) ۴٫۰۶ × ۱۰^{9}N

۴۱. (الف) ۴۷٫۹km/h (ب) ۳٫۶۵rad/s^{2}

(ج) ۸٫۶۸kW

۴۵. (الف) ۵۶٫۵rad/s (ب) ۸٫۸۸rad/s^{2}−

(ج) ۶۹٫۲m

۴۷. (الف) ۱۲٫۵cm/s^{2} (ب) ۴٫۶۳s

(ج) ۲۸٫۸rev/s (د) ۷۰٫۸rev/s

۴۹. ۴۸m

۵۱. (الف) $W/6$ (ب) $2g/3$

۵۵. $\alpha = 2F/MR$؛ $a = F/M$

۵۷. (الف) ۵۷٫۹rad/s (ب) ۴٫۲۱m

فصل ۱۳

۵. mvd

۱۱. (الف) ۴٫۱۷m/s^{2}− (ب) ۱۶٫۹rad/s^{2}−

(ج) ۲٫۶۲N.m−

۱۵. (الف) ۱٫۴۹N.m (ب) ۲۰٫۸rad

(ج) ۳۱٫۰J− (د) ۲۰٫۳W

۱۷. مرکز جرم در جهت نیروی ضربه‌ای با سرعت ۲٫۹۰m/s حرکت می‌کند؛ چوب با سرعت زاویه‌ای ۱۰٫۷rad/s حول مرکز جرم دوران می‌کند.

۲۱. (ب) $ML^2/(L^2 + 12d^2)$

۲۵. (الف) ۱٫۱۸s (ب) ۸٫۶۰m

(ج) ۵٫۱۸rev (د) ۶٫۰۷m/s

۲۷. ۳٫۰min

۲۹. $mv/(m+M)R$

۳۱. (الف) ۱۷۱ دور بر دقیقه (ب) ۰٫۷۹۲

۳۳. (الف) ۵٫۱۲mrad/s (ب) ۱٫۹۰cm/s

۳۵. (الف) $MR^2\omega_0^2/4$؛ $MR^2\omega_0/2$

(ب) $R^2\omega_0^2/2g$ (ج) ω_0

۳۷. $\sqrt{2gr\sec\theta_0}$

۳۹. (الف) هر یک در دایره‌ای به شعاع ۱٫۴۶m با سرعت زاویه‌ای ۰٫۹۴۵rad/s دوران می‌کند.

(ب) ۹٫۱۲rad/s (ج) $K_a = 97{,}5\text{J}$؛ $K_b = 941\text{J}$

۴۱. ۰٫۱۲۷−

۴۳. ۱٫۹۰ دقیقه

فصل ۱۴.

۱. (الف) دو (ب) هفت

۵. (الف) ۲٫۵m (ب) ۷٫۳۰°

۷. (الف) می‌لغزد؛ ۳۱° (ب) واژگون می‌شود؛ ۳۴°

۹. ۱۲۰۰lb

۱۱. (الف) ۲٫۷۸kN (ب) ۳٫۸۹kN

۱۳. پایهٔ چپ: ۱٫۱۷kN (کشش)

پایهٔ راست: ۱٫۸۹kN (تراکم)

۱۵. سه چهارم طول تیر از کارگری که انتهای آن را گرفته است.

۱۷. ۱٫۹۱kN = نیروی عضله، به‌طرف بالا، ۳W

۲٫۵۵kN = نیروی استخوان، به‌طرف پایین، ۴W

۱۹. $W\sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$

۲۱. (الف) $F_1 = w\sin\theta_2/\sin(\theta_2-\theta_1)$؛

(ب) $F_2 = w\sin\theta_1/\sin(\theta_2-\theta_1)$، عمود بر صفحه‌ها

۲۳. (الف) ۴۱۶N (ب) ۲۳۸N؛ ۱۷۲N

۲۵. (الف) ۴۷٫۰lb (ب) ۲۱٫۳lb؛ ۱۰٫۹lb

۲۷. (الف) ۱۴۶۰lb (ب) ۱۲۲۰lb؛ ۱۴۲۰lb

۲۹. (الف) $Wx/L\sin\theta$ (ب) $Wx/L\tan\theta$

(ج) $W(1-x/L)$

۳۱. (الف) لولای پایین: $F_h = 180\,\text{lb}$، $F_v = 210\,\text{lb}$؛

لولای بالا: $F_h = 180\,\text{lb}$، $F_v = 60\,\text{lb}$

(ب) $F_h = ۱۸۰\text{lb}$، $F_v = ۶۰\text{lb}$ وارد بر هر تیر، در جهتهای مخالف

۳۳. (الف) ۴۷lb (ب) $F_A = ۱۲۰\text{lb}$؛ $F_E = ۷۲\text{lb}$

۳۵. (الف) ۴۴۶N (ب) ۰٫۵۰۰

(ج) بله، °۴۵ به‌طرف بالا، ۳۱۵N

۳۷. (الف) $L/۲$، $L/۴$، $L/۶$ (ج) $N = n$

۴۱. ۷۵GN/m^{۲}

۴۳. ۳٫۶۵mm

۴۵. ۲۰۱kN

۴۷. ۲۰۸ دور بر دقیقه

۴۹. (الف) ۱۸٫۰MN (ب) ۱۴٫۴MN (ج) ۱۶

نمایه

Ramin.samad@yahoo.com